THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

515
~~517~~
C126
v.5

MATHEMATICS

515
C126
v.5

24 My 26

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
TOME XXIX, N° 2.

NEUE
INTEGRATIONS-WEGE.

VON

Prof. Dr. P. Helmling
in Dorpat.

(*Lu le 31 mars 1881.*)

ST.-PÉTERSBOURG, 1881.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:
MM. Eggers et Cie
et J. Glasounof;

à Riga:
M. N. Kymmel;

à Leipzig:
Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 35 Kop. = 1 Mk. 20 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Août 1881. C. Vesselofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

I.

Im 17. Band der Zeitschrift für Mathematik und Physik von Dr. O. Schlömilch, gleich im Eingang, hat Herr Hess ein von Schlömilch behandeltes Problem: «Die Uebertragung der Abhängigkeit zweier Veränderlichen»[1]) von einem neuen Standpunkt aufgenommen und hat das Endresultat durch eine merkwürdige, in ihrem Bau höchst einfache Determinante dargestellt. Das Ergebniss dieser vorzüglichen Arbeit hat jedoch, wie mir scheint, für die Integralrechnung eine weit gewichtigere Bedeutung, die ich versuchen will, im Folgenden darzulegen.

Sei $\varphi(x) = ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ eine ganze rationale Function von x, von positivem Charakter, und es sollen auch nur solche Werthe von x zugelassen werden, für welche sie positiv bleibt. Ferner soll $\varphi(x)$ von $x = 0$, bis $x = x$ nur wachsen, was bekanntlich der Fall ist, wenn $\varphi'(x) > 0$ bleibt. Ausserdem sei $\varphi''(x)$ von der Null verschieden. — Es mögen sodann noch der Reihe nach die Differentialquotienten:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx};\ \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2};\ \ldots\ldots\ \frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}$$

dargestellt werden durch:

$$\varphi_1;\quad \varphi_2;\ \ldots\ldots\ \varphi_m.$$

Denkt man sich $e^{\varphi(x)}$ entwickelt in die bekannte, unbedingt convergente unendliche Reihe, so überzeugt man sich leicht, dass das Integral $\int e^{\varphi(x)} . dx$ für $x = 0$ verschwindet, oder wie

---

[1]) Man sehe darüber den Anfang des 2. Bandes der Analysis von Dr. O. Schlömilch vom Jahre 1866.

595519

man sich auszudrücken pflegt, mit 0 anfängt. Werden mit dem Integral identische Transformationen, wie etwa die theilweise Integration vorgenommen, so muss für diese Transformationen dasselbe gelten. Nun hat man

$$\int e^{\varphi(x)}dx = \int \frac{e^{\varphi}\varphi_1}{\varphi_1}\,dx = \int \frac{1}{\varphi_1}\frac{de^{\varphi}}{dx}\,dx = \frac{e^{\varphi}}{\varphi_1} + \int \frac{e^{\varphi}\varphi_2}{\varphi_1^2}\,.\,dx$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergiebt sich:

$$1\ldots\ldots\ \int_0^x e^{\varphi(x)}dx = \frac{e^{\varphi(x)}}{\varphi_1}\left(1 + \frac{a_1}{\varphi_1^2} + \frac{a_2}{\varphi_1^2} + \ldots\ldots \frac{a_{\nu-1}}{\varphi_1^{2\nu-2}}\right) + \int \frac{e^{\varphi(x)}a_\nu}{\varphi_1^{2\nu}}\,dx$$

Indem man aber auf das Restglied zur Rechten aufs Neue die theilweise Integration anwendet, erhält man für die Coefficienten a_ν die folgende Recursionsformel:

$$2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{\nu+1} = (2\nu + 1)\cdot\varphi_2\cdot a_\nu - \varphi_1\cdot\frac{d}{dx}(a_\nu)$$

wodurch jeder folgende aus dem vorhergehenden berechnet werden kann. Auf diese Weise findet man für die einzelnen Coefficienten:

$$3\left\{\begin{array}{l} a_1 = \varphi_2;\ a_2 = 1\cdot3\cdot\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3;\ a_3 = 1\cdot3\cdot5\cdot\varphi_2^3 - 10\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \varphi_1^2\varphi_4 \\ a_4 = 1\cdot3\cdot5\cdot7\varphi_2^4 - 105\cdot\varphi_1\varphi_2^2\varphi_3 + 15\varphi_1^2\varphi_2\varphi_4 + 10\varphi_1^2\varphi_3^2 - \varphi_1^3\varphi_5 \\ a_5 = 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\varphi_2^5 - 1260\cdot\varphi_1\varphi_2^3\varphi_3 + 210\varphi_1^2\varphi_2^2\varphi_4 + 280\varphi_1^2\varphi_2\varphi_3^2 - 35\varphi_1^3\varphi_3\varphi_4 - \\ \quad - 21\varphi_1^3\varphi_2\varphi_5 + \varphi_1^4\varphi_6 \\ a_6 = 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot\varphi_2^6 - 5\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\,\varphi_1\varphi_2^4\varphi_3 + 3150\varphi_1^2\varphi_2^3\varphi_4 + 6300\varphi_1^2\varphi_2^2\varphi_3^2 - \\ \quad - 1260\,\varphi_1^3\varphi_2\varphi_3\varphi_4 - 378\varphi_1^3\varphi_2^2\varphi_5 - 280\varphi_1^3\varphi_3^3 + 28\varphi_1^4\varphi_2\varphi_6 + 35\varphi_1^4\varphi_4^2 + \\ \quad + 56\varphi_1^4\varphi_3\varphi_5 - \varphi_1^5\varphi^7 \end{array}\right.$$

In gleicher Weise erhält man:

$$4\ldots\ \int_x^\infty e^{-\varphi(x)}dx = \frac{e^{-\varphi(x)}}{\varphi_1}\left(1 - \frac{a_1}{\varphi_1^2} + \frac{a_2}{\varphi_1^4} - \frac{a_3}{\varphi_1^6} + \ldots \mp \frac{a_{\nu-1}}{\varphi_1^{2\nu-2}}\right) \mp \int \frac{e^{\varphi(x)}a_\nu}{\varphi_1^{2\nu}}\,dx$$

und indem man dieselbe Methode anwendet auf das Integral $\int e^{\varphi(x)i}_{dx}$, und der Kürze wegen die Reihen

$$1 - \frac{a_2}{\varphi_1^4} + \frac{a_4}{\varphi_1^8} - \frac{a_6}{\varphi_1^{12}} + \ldots\ldots \mp \frac{a_{2\nu}}{\varphi_1^{4\nu}}\ldots\ldots\ldots$$

$$5a\ldots\ldots\ldots\quad \frac{a_1}{\varphi_1^2} - \frac{a_3}{\varphi_1^6} + \frac{a_5}{\varphi_1^{10}} - \ldots\ldots \mp \frac{a_{2\nu-1}}{\varphi_1^{4\nu-2}}\ldots\ldots$$

bezüglich mit P und Q bezeichnet:

$$\int_0^x \cos\left(\varphi(x)\right) dx = \frac{P\sin\varphi - Q.\cos\varphi}{\varphi_1} + \varrho_0 \quad \ldots\ldots 5$$

$$\int_0^x \sin\left(\varphi(x)\right) dx = \frac{P\cos\varphi + Q\sin\varphi}{\varphi_1} + \varrho_1\ ^{1}) \quad \ldots\ldots 6$$

Die im Vorhergehenden mit $(\mathfrak{a}_\nu)$ bezeichneten Coefficienten nun fallen zusammen mit der von Herrn Hess gefundenen Determinante, was eigentlich aus dem Gange der dabei in Anwendung kommenden Operationen von selbst einleuchtet. Man erhält nämlich:

$$\mathfrak{a}_\nu = \frac{1}{\nu!}\begin{vmatrix}
\nu\varphi_2 & {}_{\nu-1}\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\nu\varphi_3 & \alpha_{22}\varphi_2 & {}_{\nu-2}\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\nu\varphi_4 & \alpha_{32}\varphi_3 & \alpha_{33}\varphi_2 & {}_{\nu-3}\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\nu\varphi_5 & \alpha_{42}\varphi_4 & \alpha_{43}\varphi_3 & \alpha_{44}\varphi_2 & {}_{\nu-4}\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\
\nu\varphi_6 & \alpha_{52}\varphi_5 & \alpha_{53}\varphi_4 & \alpha_{54}\varphi_3 & \alpha_{55}\varphi_2 & {}_{\nu-5}\varphi_1 & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\
\ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\
\nu\varphi_\nu & \alpha_{\nu-1,2}\varphi_{\nu 1} & \alpha_{\nu-1,3}\varphi_{\nu 2} & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \alpha_{\nu-1,\nu-1}\varphi_2 & 1\cdot\varphi_1 \\
\nu\varphi_{\nu+1} & \alpha_{\nu 2}\varphi_\nu & \alpha_{\nu 3}\varphi_{\nu-1} & \alpha_{\nu 4}\varphi_{\nu-2} & \ldots. & \ldots. & \alpha_{\nu,\nu-1}\varphi_3 & \alpha_{\nu\nu}\varphi_2
\end{vmatrix} \quad \ldots\ldots 7$$

Die einzelnen Coefficienten α werden nach folgendem Schema gebildet:

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mu+1,2} &= \alpha_{\mu,1} + \alpha_{\mu 2} & \qquad \alpha_{\mu+1\,\mu+1} &= \alpha_{\mu\mu} + \alpha_{\mu\,\mu+1} \\
\alpha_{\mu+1,3} &= \alpha_{\mu,2} + \alpha_{\mu 3} & \qquad \alpha_{\mu+1\,\mu+2} &= \alpha_{\mu\,\mu+1} + \alpha_{\mu\,\mu+2} \\
\alpha_{\mu+1,4} &= \alpha_{\mu,3} + \alpha_{\mu 4} & \qquad \alpha_{\mu+1\,\mu+3} &= \alpha_{\mu\,\mu+2} + \alpha_{\mu\,\mu+3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots 8 \\
\alpha_{\mu+1,\mu} &= \alpha_{\mu\,\mu+1} + \alpha_{\mu\mu} & \qquad \alpha_{\nu\,\nu-1} &= \alpha_{\nu-1\,\nu-2} + \alpha_{\nu-1\,\nu-1} \\
& & \qquad \alpha_{\nu\nu} &= \alpha_{\nu-1\,\nu-1} + 1.
\end{aligned}$$

---

[1]) Die Restausdrücke ϱ_0, ϱ_1 sollen später untersucht werden.

Demnach ergiebt sich zum Beispiel:

$$\mathfrak{a}_6 = \frac{1}{6!}\begin{vmatrix} 6\varphi_2 & 5\varphi_1 & & & & \\ 6\varphi_3 & 11\varphi_2 & 4\varphi_1 & & & \\ 6\varphi_4 & 17\varphi_3 & 15\varphi_2 & 3\varphi_1 & & \\ 6\varphi_5 & 23\varphi_4 & 32\varphi_3 & 18\varphi_2 & 2\varphi_1 & \\ 6\varphi_6 & 29\varphi_5 & 55\varphi_4 & 50\varphi_3 & 20\varphi_2 & 1\varphi_1 \\ 6\varphi_7 & 35\varphi_6 & 84\varphi_5 & 105_4 & 70\varphi_3 & 21\varphi_2 \end{vmatrix} \quad (8a)$$

$$\mathfrak{a}_7 = \frac{1}{7!}\begin{vmatrix} 7\varphi_2 & 6\varphi_1 & & & & & \\ 7\varphi_3 & 13\varphi_2 & 5\varphi_1 & & & & \\ 7\varphi_4 & 20\varphi_3 & 18\varphi_2 & 4\varphi_1 & & & \\ 7\varphi_5 & 27\varphi_4 & 38\varphi_3 & 22\varphi_2 & 3\varphi_1 & & \\ 7\varphi_6 & 34\varphi_5 & 65\varphi_4 & 60\varphi_3 & 25\varphi_2 & 2\varphi_1 & \\ 7\varphi_7 & 41\varphi_6 & 99\varphi_5 & 125\varphi_4 & 85\varphi_3 & 27\varphi_2 & 1\varphi_1 \\ 7\varphi_8 & 48\varphi_7 & 140\varphi_6 & 224\varphi_5 & 210\varphi_4 & 112\varphi_3 & 28\varphi_2 \end{vmatrix}$$

Man kann aber der Determinante (7) eine zur wirklichen Berechnung sehr brauchbare Form geben, wenn man sie auf ihre Diagonalreihe reducirt. Zu diesem Zweck sei allgemein:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu-1,1} & \alpha_{\nu-1,2} & \alpha_{\nu-1,3} & \alpha_{\nu-1,4} & \cdots & \alpha_{\nu-1,\nu} & \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \alpha_{\nu 4} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} & \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} & \cdots & \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} & \cdots & \alpha_{\nu 2} \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} & \cdots & \alpha_{\nu 3} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} & \cdots & \alpha_{\nu 4} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{45} & \alpha_{55} & \alpha_{\nu 5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{\nu-1,\nu} & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Zieht man, in der zweiten Form, von der mit α_{11} multiplicirten zweiten Zeile die mit α_{12} multiplicirte erste Zeile ab, so kommt für die zweite Zeile:

$$0 \quad \mathfrak{a}_{22} \quad \mathfrak{a}_{23} \quad \mathfrak{a}_{24} \cdots \mathfrak{a}_{2\nu}$$

wobei:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{22} &= \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \\ \mathfrak{a}_{23} &= \alpha_{11}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{31} \\ \mathfrak{a}_{24} &= \alpha_{11}\alpha_{42} - \alpha_{12}\alpha_{41} \quad (10) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{a}_{2\nu} &= \alpha_{11}\alpha_{\nu 2} - \alpha_{12}\alpha_{\nu 1} \end{aligned}$$

Multiplicirt man weiter die dritte Zeile mit $\mathfrak{a}_{22}$ und zieht die mit α_{23} multiplicirte zweite davon ab, so folgt für die dritte Zeile:

$$0 \quad 0 \quad \mathfrak{a}_{33} \quad \mathfrak{a}_{34} \quad \mathfrak{a}_{35} \ldots\ldots \quad \mathfrak{a}_{3\nu}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{33} &= \alpha_{33}\,\mathfrak{a}_{22} - \alpha_{23}\,\mathfrak{a}_{23} \\
\mathfrak{a}_{34} &= \alpha_{43}\,\mathfrak{a}_{22} - \alpha_{23}\,\mathfrak{a}_{24} \\
\mathfrak{a}_{35} &= \alpha_{53}\,\mathfrak{a}_{22} - \alpha_{23}\,\mathfrak{a}_{25} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10a \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{a}_{3\nu} &= \alpha_{\nu 3}\,\mathfrak{a}_{22} - \alpha_{23}\,\mathfrak{a}_{2\nu}
\end{aligned}$$

Behandelt man in gleicher Weise die vierte Zeile, so geht sie über in:

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \mathfrak{a}_{44} \quad \mathfrak{a}_{45} \quad \mathfrak{a}_{46} \ldots\ldots \quad \mathfrak{a}_{4\nu}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{44} &= \alpha_{44}\,\mathfrak{a}_{33} - \alpha_{34}\,\mathfrak{a}_{34} \\
\mathfrak{a}_{45} &= \alpha_{54}\,\mathfrak{a}_{33} - \alpha_{34}\,\mathfrak{a}_{35} \\
\mathfrak{a}_{46} &= \alpha_{64}\,\mathfrak{a}_{33} - \alpha_{34}\,\mathfrak{a}_{36} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10b \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{a}_{4\nu} &= \alpha_{\nu 4}\,\mathfrak{a}_{33} - \alpha_{34}\,\mathfrak{a}_{3\nu}
\end{aligned}$$

Auf demselben Wege erhält man allgemein für die Elemente der neuen Zeilen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{m+1\,m+1} &= \alpha_{m+1\,m+1}\cdot\mathfrak{a}_{mm} - \alpha_{mm+1}\cdot\mathfrak{a}_{mm+1} \\
\mathfrak{a}_{m+1\,m+2} &= \alpha_{m+2\,m+2}\cdot\mathfrak{a}_{mm} - \alpha_{mm+1}\cdot\mathfrak{a}_{mm+2} \\
\mathfrak{a}_{m+1\,m+3} &= \alpha_{m+3\,m+1}\cdot\mathfrak{a}_{mm} - \alpha_{mm+1}\cdot\mathfrak{a}_{mm+3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 11 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{a}_{m+1\,\nu} &= \alpha_{\nu\,m+1}\cdot\mathfrak{a}_{mm} - \alpha_{mm+1}\cdot\mathfrak{a}_{m\nu}
\end{aligned}$$

Die ganze Determinante wird dadurch auf ihre Diagonal-Reihe reducirt, und wenn man die Elemente, die sich dabei aufheben, weglässt, so ergiebt sich schliesslich

$$\Delta = \mathfrak{a}_{\nu\nu} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 12$$

Indem man aber in die Gleichungen für $\mathfrak{a}_{33}\ \mathfrak{a}_{44}\ \mathfrak{a}_{55}\ \mathfrak{a}_{\nu\nu}$ die gewonnenen Formen für $\mathfrak{a}_{23}\ \mathfrak{a}_{24}\ \mathfrak{a}_{2\nu}$; $\mathfrak{a}_{34}\ \mathfrak{a}_{35} \ldots \mathfrak{a}_{3\nu}\ \mathfrak{a}_{45} \ldots \mathfrak{a}_{46} \ldots \mathfrak{a}_{4\nu}$ etc. etc. einführt, und nach den Unterdeterminanten der Diagonal-Reihe ordnet, findet sich ohne Schwierigkeit:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{\nu\nu} = {} & \alpha_{\nu\nu}\cdot\mathfrak{a}_{\nu-1\,\nu-1} - \alpha_{\nu\nu-1}\cdot 1!\,\varphi_1\mathfrak{a}_{\nu-2\,\nu-2} + \alpha_{\nu\nu-2}\,2!\,\varphi_1{}^2\,\mathfrak{a}_{\nu-3\,\nu-3} \\
& - \alpha_{\nu\nu-3}\cdot 3!\,\varphi_1{}^3\,\mathfrak{a}_{\nu-4\,\nu-4} + \ldots\ldots \pm \alpha_{\nu 2}\,(\nu-2)!\,\varphi_1{}^{\nu-2}\,\mathfrak{a}_{11} \mp (\nu-1)!\,\alpha_{\nu 1}\cdot\varphi_1{}^{\nu-1} \quad \ldots 13
\end{aligned}$$

Wie man sieht, sind die ersten Factoren (α) die Elemente der letzten Zeile. Für die Diagonalglieder niederer Ordnung findet sich nach demselben Gesetz:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{11} &= \alpha_{11} \\
\mathfrak{a}_{22} &= \alpha_{22}\,\mathfrak{a}_{11} - \alpha_{12}\cdot\alpha_{21} \\
\mathfrak{a}_{33} &= \alpha_{33}\,\mathfrak{a}_{22} - \alpha_{23}\cdot\alpha_{32}\cdot\mathfrak{a}_{11} + \alpha_{12}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{31} \\
\mathfrak{a}_{44} &= \alpha_{44}\cdot\mathfrak{a}_{33} - \alpha_{34}\cdot\alpha_{43}\cdot\mathfrak{a}_{22} + \alpha_{23}\cdot\alpha_{34}\cdot\alpha_{42}\cdot\mathfrak{a}_{11}\cdot - \alpha_{12}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{34}\cdot\alpha_{41} \qquad \ldots\ldots\ldots 14 \\
\mathfrak{a}_{55} &= \alpha_{55}\cdot\mathfrak{a}_{44} - \alpha_{45}\cdot\alpha_{54}\cdot\mathfrak{a}_{33} + \alpha_{34}\cdot\alpha_{45}\cdot\alpha_{53}\cdot\mathfrak{a}_{22} - \alpha_{23}\cdot\alpha_{34}\cdot\alpha_{45}\cdot\alpha_{52}\cdot\mathfrak{a}_{11} \\
&\quad + \alpha_{12}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{34}\cdot\alpha_{45}\cdot\alpha_{51} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

wobei die α, vom Index m, $m + 1$, sich alle auf φ_1 reduciren. Ausserdem ersieht man aus dem Gleichungssystem 14, für $\mathfrak{a}_{33}$, $\mathfrak{a}_{44}$, $\mathfrak{a}_{55}$, $\ldots\ldots\mathfrak{a}_{mm}$, dass die Glieder auf der rechten Seite nach den Elementen bezüglich der 3ten, 4ten, 5ten, $\ldots\ldots m$ten Zeile geordnet sind.

Durch die Reductionsformeln 13 und 14, ist die Berechnung der Determinante $\Delta = \mathfrak{a}_{\nu\nu}$ auf die Elemente der Diagonalreihe reducirt, und somit auf das mindeste Maass von Arbeit gebracht. Wenn φ eine ganze rationale Funktion von x vom Grade n ist, so verschwinden alle Differentialquotienten, deren Index höher als n ist. Dadurch werden die Gleichungen 14 wesentlich vereinfacht. Sie bestehen z. B. für $n = 3$ aus zwei, für $n = 4$ aus drei, für $n = m$ aus $m - 1$ Termen. Ferner überzeugt man sich leicht, z. B. aus $\mathfrak{a}_6$, $\mathfrak{a}_7\ldots\ldots$ dass der Devisor $\nu!$ in dem Produkt der Diagonalreihe in № 8a aufgeht [1]) und dass dasselbe allgemein sich reducirt auf:

$$1.3.5\ldots\ldots(2\nu-1).\varphi_2^{\nu}$$

Dieser Ausdruck ist auch zugleich, wie später gezeigt werden soll, der numerisch beträchtlichste in der Determinante $\mathfrak{a}_\nu$.

Bezeichnet man $\frac{\varphi_m}{\varphi_2}$ mit q_m, und das Produkt $1.3.5\ldots.(2\nu-1)$ mit α_ν, so kann man z. B. dem $\mathfrak{a}_6\ldots.$ folgende Form geben:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_6 = \alpha_6\cdot\varphi_2^{\,6}\,(1 &- \beta_{61}\cdot q_1 q_3 + q_1^{\,2}\,(\beta_{62}\,q_4 + \beta_{63}\,q_3 q_3) - q_1^{\,3}\,(\beta_{64}\,q_5 + \beta_{65}\,q_4\,q_3 + \beta_{66}\cdot q_3 q_3 q_3) \\
&+ q_1^{\,4}\,(\beta_{67}\cdot q_6 + \beta_{68}\cdot q_5\,q_3 + \beta_{69}\cdot q_4 q_4) - \beta_{610}\cdot q_1^{\,5}\cdot q_7)
\end{aligned}$$

wobei

$$\beta_{61} = \frac{5}{3};\ \beta_{62} = \frac{2.5}{3.11};\ \beta_{63} = \frac{4.5}{3.11};\ \beta_{64} = \frac{2}{5.11};\ \beta_{65} = \frac{4}{3.11};\ \beta_{66} = \frac{8}{3.9.11};$$

$$\beta_{67} = \frac{4}{3.5.9.11};\ \beta_{68} = \frac{8}{3.5.9.11};\ \beta_{69} = \frac{5}{3.5.9.11};\ \beta_{610} = \frac{1}{1.3.5.7.9.11} = \frac{1}{\alpha_6}.$$

---

[1]) So z. B. № 8a in $\mathfrak{a}_7\ldots\frac{1}{7!}(7\varphi_2.13\varphi_2.18\varphi_2.22\varphi_2.25\varphi_2.27\varphi_2.28\varphi_2) = 1.3.5.7.9.11.13.\varphi_2^{\,7}$.

Vermittelst der Recursionsgleichung 2 erhält man hieraus:

$$\alpha_7 = \alpha_7 \cdot \varphi_2^{\,7}\,(1 - \beta_{71} \cdot q_1 q_3 + q_1^{\,2}\,(\beta_{72} \cdot q_4 + \beta_{73} \cdot q_3 q_3) - q_1^{\,3}(\beta_{74} \cdot q_4 + \beta_{75}\, q_4 q_3 + \beta_{76} \cdot q_3 q_3 q_3 + q_1^{\,4}\,(\beta_{77} \cdot q_6 + \beta_{78} \cdot q_5 \cdot q_3 + \beta_{79} \cdot q_4 \cdot q_4 + \beta_{710} \cdot q_4 q_3 q_3) - q_1^{\,5}\,(\beta_{711}\, q_7 + \beta_{712}\, q_6 q_3 + \beta_{713}\, q_5 q_4) + q_1^{\,6}\, \beta_{714} \cdot q_8)$$

wobei

$$\beta_{71} = 2;\ \beta_{72} = \frac{5}{13};\ \beta_{73} = \frac{4.10}{3.13};\ \beta_{74} = \frac{2}{3.13};\ \beta_{75} = \frac{2.5}{3.13};\ \beta_{76} = \frac{3.5}{3.9.13};$$

$$\beta_{77} = \frac{2}{3.11.13};\ \beta_{78} = \frac{8}{3.11.13};\ \beta_{79} = \frac{5}{3.11.13};\ \beta_{710} = \frac{4}{3.9.13};\ \beta_{711} = \frac{4}{3.5.7.11.13};$$

$$\beta_{712} = \frac{4}{5.9.11.13};\ \beta_{713} = \frac{2}{3.5.11.13};\ \beta_{714} = \frac{1}{1.3.5.7.9.11.13} = \frac{1}{\alpha_7}.$$

Ganz eben so findet sich:

$$\alpha_8 = \alpha_8 \cdot \varphi_2^{\,8}\,(1 - \beta_{81} \cdot q_1 q_3 + q_1^{\,2}\,(\beta_{82} \cdot q_4 + \beta_{83}\, q_3 q_3) - q_1^{\,3}\,(\beta_{84} \cdot q_5 + \beta_{85} \cdot q_4 \cdot q_3 + \beta_{86} \cdot q_3 q_3 q_3) + q_1^{\,4}\,(\beta_{87}\, q_6 + \beta_{88}\, q_5 q_3 + \beta_{89}\, q_4 q_4 + \beta_{810}\, q_4 q_3 q_3 + \beta_{811}\, q_3 q_3 q_3 q_3) - q_1^{\,5}\,(\beta_{812}\, q_7 + \beta_{813}\, q_6 q_3 + \beta_{814}\, q_5 q_4 + \beta_{815}\, q_5 q_3 q_3 + \beta_{816}\, q_4 q_4 q_3) + q_1^{\,6}\,(\beta_{817}\, q_8 + \beta_{818}\, q_7 q_3 + \beta_{819}\, q_6 q_4 + \beta_{820}\, q_5 q_5) - q_1^{\,7}\, \beta_{821}\, q_9)$$

wobei:

$$\beta_{81} = \frac{7}{3};\ \beta_{82} = \frac{7}{15};\ \beta_{83} = \frac{14}{9};\ \beta_{84} = \frac{1}{15};\ \beta_{85} = \frac{4}{9};\ \beta_{86} = \frac{8}{27};\ \beta_{87} = \frac{4}{3.13};\ \beta_{88} = \frac{2}{3.15};$$

$$\beta_{89} = \frac{1}{3.13};\ \beta_{810} = \frac{4.7.8}{3.9.13.15};\ \beta_{811} = \frac{8}{9.9.13};\ \beta_{812} = \frac{2}{3.4.13.15};\ \beta_{813} = \frac{3.19}{9.11.13.15};\ \beta_{814} = \frac{2}{3.13.15};$$

$$\beta_{815} = \frac{4.29}{3.9.11.13.15};\ \beta_{816} = \frac{7.19}{3.9.11.13.15};\ \beta_{817} = \frac{1}{3.7.11.13.15};\ \beta_{818} = \frac{8}{3.5.7.9.11.13};$$

$$\beta_{819} = \frac{2}{9.11.13.15};\ \beta_{820} = \frac{2}{3.5.11.13.15};\ \beta_{821} = \frac{1}{1.3.5.7.9.11.13.15} = \frac{1}{\alpha_8}.$$

Wie man sieht, nehmen die Coefficienten β, nach rechts hin, von einer gewissen Stelle an, ziemlich rasch ab, bis zu $\frac{1}{\alpha\nu}$. Da nun auch in der Regel die Quotienten $q_3\ q_4\ q_5 \ldots$ ächte Brüche sind, so haben die mit höheren Potenzen von q_1 behafteten Glieder keinen wesentlichen Einfluss mehr, weil sie auch noch mit $\varphi_1^{\,2\nu}$ dividirt werden. Der Quotient q_1 liegt meistentheils zwischen 1 und 2. — Schreibt man daher

$$\alpha_{\nu+1} =$$

$$\alpha_{\nu+1} \cdot \varphi_2^{\,\nu+1}\,(1 - g_1 \cdot q_1 q_3 + q_1^{\,2}\, g_2 - q_1^{\,3}\, g_3 + q_1^{\,4}\, g_4 - q_1^{\,5}\, g_5 + q_1^{\,6}\, g_6 - \ldots)$$

so erhält man bis zu dem Gliede $g_6 . q^6$, vermittelst der Recursionsformel (2) allgemein:

$$15\ \mathfrak{a}_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} . \varphi_2^{\nu+1} \Big(1 - q_1 . \frac{\nu\,(2\beta_{\nu 1} + 1)}{2\nu + 1}\, q_3 + q_1^2 \Big(\frac{(2\nu-1)\,\beta_{\nu 2} + \beta_{\nu 1}}{2\nu+1}\, q_4 + \frac{(2\nu-1)\beta_{\nu 3} + (\nu-2)\beta_{\nu 1}}{2\nu+1} q_3 q_3 \Big)$$

$$- q_1^3 \Big(\frac{(2\nu-2)\beta_{\nu 4} + \beta_{\nu 2}}{2\nu+1} . q_5 + \frac{(2\nu-2)\beta_{\nu 5} + 2\beta_{\nu 3} + (\nu-3)\beta_{\nu 2}}{2\nu+1} q_4 q_3 + \frac{(2\nu-2)\,\beta_{\nu 6} + (\nu-4)\,\beta_{\nu 3}}{2\nu+1} q_3 q_3 q_3 \Big)$$

$$+ q_1^4 \Big(\frac{(2\nu-3)\,\beta_{\nu 7} + \beta_{\nu 4}}{2\nu+1}\, q_6 + \frac{(2\nu-3)\,\beta_{\nu 8} + \beta_{\nu 5} + (\nu-3)\beta_{\nu 4}}{2\nu+1}\, q_5 q_3 + \frac{(2\nu-3)\,\beta_{\nu 9} + \beta_{\nu 5}}{2\nu+1}\, q_4 q_4$$

$$+ \frac{(2\nu-3)\,\beta_{\nu 10} + 3\beta_{\nu 6} + (\nu-5)\,\beta_{\nu 5}}{2\nu+1}\, q_4 q_3 q_3 + \frac{(\nu-1)\,\beta_{\nu 6}}{2\nu+1}\, q_3 q_3 q_3 q_3 \Big)$$

$$- q_1^5 \Big(\frac{(2\nu-4)\,\beta_{\nu 12} + \beta_{\nu 10} + (\nu-1)\beta_{\nu 8}}{2\nu+1} q_8 + \frac{(2\nu-4)\beta_{\nu 13} + 2\beta_{\nu 8} + (\nu-5)\beta_{\nu 7}}{2\nu+1} q_6 q_3 + \frac{(2\nu-4)\,\beta_{\nu 14} + 2\beta_{\nu 9} + \beta_{\nu 8}}{2\nu+1} q_5 q_4$$

$$+ \frac{(2\nu-4)\,\beta_{\nu 15} + \beta_{\nu 10} + (\nu-1)\beta_{\nu 8}}{2\nu+1}\, q_5 q_3 q_3 + \frac{(2\nu-4)\beta_{\nu 16} + 2\beta_{\nu 10} + (\nu-2)\beta_{\nu 9}}{2\nu+1}\, q_4 q_4 q_3$$

$$+ \frac{(\nu-3)\,\beta_{\nu 11} + 4\beta_{\nu 12}}{2\nu+1}\, q_4 q_3 q_3 q_3 + \frac{(\nu-4)\,\beta_{\nu 11}}{2\nu+1}\, q_3^5 \Big) + \ldots .$$

Die vorhergehenden Gleichungen rechtfertigen nun den Ausspruch, dass die numerische Hauptmasse von $\mathfrak{a}_\nu$ in dem Ausdruck

$$1.3.5.7 \ldots (2\nu-1) . \varphi_2^{\nu}$$

stecke. Man kann deshalb allgemein setzen:

$$16 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathfrak{a}_\nu = \pm\, 1.3.5 \ldots (2\nu-1) . \varphi_2^{\nu} . (1 - \delta_\nu)$$

wo δ_ν ein kleiner ächter Bruch ist.

Die Recursionsformel 15 vereinfacht sich bei der Anwendung wesentlich dadurch, dass die Quotienten q_m für grössere m verschwinden. Ist z. B. φ vom 3. Grad, so kann man dem $\mathfrak{a}_6$ folgende Form geben:

$$(\varphi_4 = \varphi_5 = \ldots = o)\ \ \mathfrak{a}_6 = \varphi_2^4 (\alpha_6 \varphi_2^2 - \beta_6 \varphi_1 \varphi_3) + \varphi_1^2 \varphi_3^2 (\gamma_6 \varphi_2^2 - \delta_6 \varphi_1 \varphi_3)$$

Dann erhält man vermittelst der Formel (2):

$$\text{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathfrak{a}_7 = \underline{\varphi_2^5 (\alpha_7 . \varphi_2^2 - \beta_7 \varphi_1 \varphi_3)} + \underline{\varphi_1^2 \varphi_2 \varphi_3^2 (\gamma_7 \varphi_2^2 - \delta_7 . \varphi_1 \varphi_3)}$$

$$\alpha_7 = 13 . \alpha_6;\ \beta_7 = 12\beta_6 + 6\alpha_6;\ \gamma_7 = 11\gamma_6 + 4\beta_6;\ \delta_7 = 10\delta_6 + 2\gamma_6 .$$

das heisst

$$\alpha_7 = 1.3.5.7.9.11.13;\ \beta_7 = 2.3.5.7.9.11.13;\ \gamma_7 = 2.7.9.10^2.11;\ \delta_7 = 2.7.10^2.11 .$$

$$\alpha_8 = \varphi_2^6 (\alpha_8 \varphi_2^2 - \beta_8 \varphi_1 \varphi_3) + \varphi_1^2 \varphi_2^2 \varphi_3^2 (\gamma_8 \varphi_2^2 - \delta_8 \varphi_1 \varphi_3) + \varepsilon_8 \cdot \varphi_1^4 \varphi_3^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{b}$$

$$\alpha_8 = 15 \cdot \alpha_7;\ \beta_8 = 14\beta_7 + 7\alpha_7;\ \gamma_8 = 13\gamma_7 + 5\beta_7;\ \delta_8 = 12\delta_7 + 3\gamma_7;\ \varepsilon_8 = \delta_7.$$

das heisst

$$\alpha_8 = 1.3.5.7.9.11.13.15;\ \beta_8 = 5.7\alpha_7;\ \gamma_8 = 5.7^2.9.10.11.13;\ \delta_8 = 2.3.7.10^2.11.13;\ \varepsilon_8 = 2.7.10^2.11.$$

$$\alpha_9 = \varphi_2^7 (\alpha_9 \varphi_2^2 - \beta_9 \cdot \varphi_1 \varphi_4) + \varphi_1^2 \varphi_2^3 \varphi_3^2 (\gamma_9 \varphi_2^2 - \delta_9 \varphi_1 \varphi_3) + \varepsilon_9 \cdot \varphi_1^4 \varphi_2 \varphi_3^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{c}$$

$$\alpha_9 = 17\alpha_8;\ \beta_9 = 16 \cdot \beta_8 + 8\alpha_8;\ \beta_9 = 15\gamma_8 + 6\beta_8;\ \delta_9 = 14 \cdot \delta_8 + 4\gamma_8;\ \varepsilon = 13 \cdot \varepsilon_9 + 2\delta_8.$$

das heisst

$$\alpha_9 = 17.\alpha_8;\ \beta_9 = 8.5.7.9.11.13.15.17;\ \gamma_9 = 7.16.5.7.9.11.13.15;\ \delta_9 = 3.5.7.9.10.11.13.16;$$
$$\varepsilon_9 = 7.10^2.11.13.14.$$

$$\alpha_{10} = \varphi_2^2 (\alpha_{10} \varphi_2^2 - \beta_{10} \varphi_1 \varphi_3) + \varphi_1^2 \varphi_2^4 \varphi_3^2 (\gamma_{10} \varphi_2^2 - \delta_{10} \varphi_1 \varphi_3) + \varphi_1^4 \varphi_3^4 (\varepsilon_{10} \varphi_2^2 - \varepsilon_{10} \cdot \varphi_1 \varphi_3) \ldots \text{d}$$

$$\alpha_{10} = 19 \cdot \alpha_9;\ \beta_{10} = 18\beta_9 + 9\alpha_9;\ \gamma_{10} = 17\gamma_9 + 7\beta_9;\ \delta_{10} = 16\delta_9 + 5\gamma_9;\ \varepsilon_{10} = 15\varepsilon_9 + 3\delta_9;$$
$$3_{10} = 13 \cdot \varepsilon_8 + 2\delta_8 = \varepsilon_9$$

$$\alpha_{10} = 19.\alpha_9;\ \beta_{10} = 3.\alpha_{10};\ \gamma_{10} = 7.8.\alpha_9;\ \delta_{10} = 16.5.7.9.13.15.67;\ \varepsilon_{10} = 4.7.10.11.13.1.143;$$
$$3_{10} = 7.10^2.11.13.14;$$

$$\alpha_{11} = \varphi_2^9 (\alpha_{11} \varphi_2^2 - \beta_{11} \varphi_1 \varphi_3) + \varphi_1^2 \varphi_2^5 \varphi_3^2 (\gamma_{11} \varphi_2^2 - \delta_{11} \varphi_1 \varphi_3) + \varphi_1^4 \varphi_2^2 \varphi_3^4 (\varepsilon_{11} \varphi_2^2 - 3_{11} \varphi_1 \varphi_3) \ldots \text{e}$$

$$\alpha_{11} = 21.\alpha_{10};\ \beta_{11} = 20\beta_{10} + 10\alpha_{11};\ \gamma_{11} = 19\gamma_{10};\ \delta_{11} = 18\delta_{10} + 6\gamma_{10};\ \varepsilon_{11} = 17.\varepsilon_{10} + 4\delta_{10};$$
$$3_{11} = 16\,3_{10} + 2\,\varepsilon_{10}$$

$$\alpha_{12} = \varphi_2^{10} (\alpha_{12} \cdot \varphi_2^2 - \beta_{12} \varphi_1 \varphi_3) + \varphi_1^2 \varphi_2^6 \varphi_3^2 (\gamma_{12} \varphi_2^2 - \delta_{12} \varphi_1 \varphi_3) + \varphi_1^4 \varphi_2^2 \varphi_3^4 (\varepsilon_{12} \varphi_1^2 - 3_{12} \varphi_1 \varphi_3)$$
$$+ 3_{12} \varphi_1^6 \varphi_3^6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{f}$$

$$\alpha_{12} = 23.\alpha_{11};\ \beta_{12} = 22\beta_{11} + 11\alpha_{11};\ \gamma_{12} = 21\gamma_{11} + 9\beta_{11};\ \delta_{12} = 20\delta_{11} + 7\gamma_{11};\ \varepsilon_{12} = 19\varepsilon_{11} + 5\delta_{11};$$
$$3_{12} = 18\,3_{11} + 3\,\varepsilon_{11};\ \eta_{12} = 3_{11} = 16.3_{10} + 2\,\varepsilon_{10} \ldots$$

$$\alpha_{13} = \varphi_2^{11} (\alpha_{13} \varphi_2^2 - \beta_{13} \varphi_1 \varphi_3) + \varphi_1^2 \varphi_2^7 \varphi_3^2 (\gamma_{13} \varphi_2^2 - \delta_{13} \varphi_1 \varphi_3) + \varphi_1^4 \varphi_2^3 \varphi_3^4 (\varepsilon_{13} \varphi_2^5 - 3_{13} \varphi_1 \varphi_3)$$
$$+ \eta_{13} \varphi_1^6 \varphi_2 \varphi_3^6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{g}$$

$$\alpha_{13} = 25\,.\,\alpha_{12};\ \beta_{13} = 24\beta_{12} + 12\alpha_{12};\ \gamma_{13} = 23\gamma_{12} + 10\beta_{12};\ \delta_{13} = 22\delta_{12} + 8\gamma_{12};$$
$$\varepsilon_{13} = 21\,\varepsilon_{12} + 6\delta_{12};\ 3_{13} = 20\,3_{12} + 4\,\varepsilon_{12};\ \eta_{13} = 19\eta_{12} + 2\,3_{12}.$$

$$h\ldots a_{14} = \varphi_2^{12}(\alpha_{14}\varphi_2^2 - \beta_{14}\varphi_1\varphi_3) + \varphi_1^2\varphi_2^8\varphi_3^2(\gamma_{14}\varphi_2^2 - \delta_{14}\varphi_1\varphi_5) + \varphi_1^4\varphi_2^4\varphi_3^4(\varepsilon_{14}\varphi_2^2 - 3_{14}\varphi_1\varphi_3)$$
$$+ \varphi_1^6\varphi_3^6(\eta_{14}\varphi_2^2 - \vartheta_{14}\varphi_1\varphi_3)$$

$$\alpha_{14} = 27\alpha_{13};\ \beta_{14} = 26\beta_{13} + 13\alpha_{13};\ \gamma_{14} = 25\gamma_{13} + 11\beta_{13};\ \delta_{14} = 24\delta_{13} + 9\gamma_{13};$$
$$\varepsilon_{14} = 13\varepsilon_{13} + 7\delta_{13};\ 3_{14} = 22\,3_{13} + 5\varepsilon_{13};\ \eta_{14} = 21\eta_{13} + 3_{13};$$
$$\vartheta_{14} = \eta_{13} = 29\eta_{12} + 6.3_{12}$$

.....

Das Bildungsgesetz der Coefficienten ist aus dem Vorhergehenden leicht zu erkennen, jedoch umständlich allgemein auszudrücken, und möge deshalb hier unterbleiben. Für eine Funktion des 4ten Grades lässt sich kein einfach übersichtliches Bildungsgesetz der Coefficienten (a_ν) ausfindig machen, und noch weniger für höhere Funktionen. Aehnliches gilt von den Formeln unter № 14a, und der Gleichung 15; letztere ist aber nur ein Bruchstück einer allgemeinen Recursionsgleichung. Gehen wir nun über zur Untersuchung der Restausdrücke unter № 1, № 4, № 5 und № 6.

Aus den 3 Gleichungen:

$$\int_0^x e^{\varphi(x)}dx = \frac{e^{(\varphi x)}}{\varphi_1}\left(1 + \frac{a_1}{\varphi_1^4} + \frac{a_2}{\varphi_1^4} + \frac{a_3}{\varphi_1^6} + \ldots + \frac{a_{\nu-1}}{\varphi_1^{2\nu-2}}\right) + \int_0^x \frac{e^{\varphi(x)}a_\nu}{\varphi_1^{2\nu}}dx \quad \ldots\ldots 1$$

d. h. $$\int_0^x e^{\varphi(x)}dx = \frac{e^\varphi}{\varphi_1}(1+\delta) + R_\nu .$$

$$a_\nu = (2\nu-1).\varphi_2.a_{\nu-1} - \varphi_1.\frac{d}{dx}(a_{\nu-1}) \quad \ldots\ldots 2$$

und $$a_\nu = 1.3.5\ldots(2\nu-1.\varphi_2^\nu(1-\delta_\nu)\ldots(\delta_\nu < 1) \quad \ldots\ldots 3$$

ergiebt sich, dass die Reihe innerhalb der Klammer so lange abnimmt, als der jedesmal hinzutretende Faktor $(2\nu-1).\frac{\varphi_2}{\varphi_1^2} < 1$ bleibt.

Für $\frac{(2\nu-1).\varphi_2}{\varphi_1^2} = 1$ erhält man sogleich:

$$18\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \nu = \frac{\varphi_1^2}{2\varphi_2} + \frac{1}{2}$$

wo unter ν natürlich nur die in dem Ausdruck rechts steckende ganze Zahl zu verstehen ist. Bezeichnet man das Restglied unter № 1 mit R, so hat man nach einem bekannten Satze:

$$R = \frac{e^{\varphi(\xi)}\,\xi.(a_\nu)\xi}{(\varphi_1^{2\nu})\xi}$$

wobei ξ einen Mittelwerth zwischen 0 und x vorstellt. Jedenfalls ist also: $R < \frac{x.e^{\varphi(x)}}{\varphi_1^{2\nu}}a_\nu$ überall x statt ξ gesetzt.

Um so mehr ist daher, mit Rücksicht auf die Gleichung (16)

$$R < x.1.3.6\ldots(2\nu-1).\varphi_2{}^{\nu}\frac{e^{\varphi}}{\varphi_1{}^{2\nu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 19a$$

Nun hat man bekanntlich: $1.3.5\ldots(2\nu-1) = \sqrt{2}.\left(\frac{2\nu}{e}\right)^{\nu}.e^{\rho_\nu}$

wo $$\rho_\nu = \frac{1}{24.\nu} + \frac{7}{8}\frac{1}{360\nu^3} - \frac{31}{32}\frac{1}{1260\nu^5} + \ldots.$$

Setzt man der Einfachheit wegen $\nu = \frac{\varphi_1{}^2}{2\varphi_1}$, so kommt:

$$R < \left(\frac{x.\sqrt{2}}{e^{\frac{1}{2}+\rho_\nu}}\varphi_1\right).\left(\frac{e^{\varphi-\frac{\varphi_1{}^2}{2\varphi_2}}}{\varphi_1}\right) = \lambda\frac{e^{\varphi-\frac{\varphi_1{}^2}{2\varphi_2}}}{\varphi_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 19b$$

wo $\lambda < \frac{x.\sqrt{2}}{e^{\frac{1}{2}+\rho_\nu}}\varphi_1$ sein muss. Dadurch erhält man zunächst für die Gleichung (1):

$$\int_0^x e^{\varphi(x)}dx = \frac{e^{\varphi}}{\varphi_1}\left(1 + \frac{a_1}{\varphi_1{}^2} + \frac{a_2}{\varphi_1{}^4} + \frac{a_3}{\varphi_1{}^6} + \ldots + \frac{a_{\nu-1}}{\varphi_1{}^{2\nu-2}} + \lambda.e^{-\frac{\varphi_1{}^2}{2\varphi_2}}\right) \quad \ldots\ldots 19$$

und in gleicher Weise für die Gleichung 4:

$$\int_x^\infty e^{-\varphi(x)}dx = \frac{e^{-\varphi}}{\varphi_1}\left(1 - \frac{a_1}{\varphi_1{}^2} + \frac{a_3}{\varphi_1{}^4} + \ldots \pm \frac{a_{\nu-1}}{\varphi_1{}^{2\nu-2}} \mp \lambda.e^{-\frac{\varphi_1{}^2}{2\varphi_2}}\right) \ldots\ldots 20$$

Unter der Voraussetzung, dass in № 19 die Glieder innerhalb der Klammer nur abnehmen, ist ihre Summe offenbar kleiner als wenn man das zweite: $\frac{\varphi_2}{\varphi_1{}^2}$ mit ν, d. h. $\frac{\varphi_1{}^2}{2\varphi_2}$ multiplicirt, d. h. $< \frac{\varphi_2}{\varphi_1{}^1}\frac{\varphi_1{}^2}{2\varphi_2}$ d. i. $< \frac{1}{2}$. Mit Hinzufügen des letzten: $\lambda.e^{-\frac{\varphi_1{}^2}{2\varphi_2}}$ bleibt deshalb die Gesammtreihe von 1 ab immer noch < 1. Dasselbe gilt natürlich in noch stärkerem Maasse von der Summe der Glieder in № 20. Daher kann man setzen:

$$\int_0^x e^{\varphi(x)}dx = \frac{e^{\varphi}}{\varphi_1}(1+\delta) \ldots.(\delta < 1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 19a$$

$$\int_x^\infty e^{-\varphi(x)}dx = \frac{e^{-\varphi}}{\varphi_1}(1-\varepsilon) \ldots.(\varepsilon < 1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 20a$$

Mit den Voraussetzungen unter № 19a lässt sich nun das Restglied in № 19 noch genauer bestimmen. Setzt man:

$$a_\nu = 1.3.5\ldots(2\nu-1).\varphi_2{}^{\nu}.k_\nu \ldots. \text{ wobei } k_\nu < 1$$

und $$\alpha_\nu = 1.3.5\ldots(2\nu-1).$$

Dann hat man für den Rest:

$$R = \alpha_\nu . k_\nu . \int e^{\varphi} \frac{{\varphi_2}^\nu}{{\varphi_1}^{2\nu}}\, dx = \alpha_\nu . k_\nu \int e^{\varphi + l\left(\frac{{\varphi_2}^\nu}{{\varphi_1}^{2\nu}}\right)}\, dx$$

Bezeichnet man für einen Augenblick $\varphi + l\left(\frac{{\varphi_2}^\nu}{{\varphi_1}^{2\nu}}\right)$ mit ψ, so kommt:

$$\psi_1 = \varphi_1 + \frac{d}{dx}\, l\, \frac{{\varphi_2}^\nu}{{\varphi_1}^{2\nu}} = \varphi_1 + \nu . \frac{d}{dx}\, l\left(\frac{\varphi_2}{{\varphi_1}^2}\right);\quad \nu = \frac{{\varphi_1}^2}{2\varphi_2} + \frac{1}{2}$$

d. h. $$\psi_1 = \varphi_1\left(1 - \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)\,(2\varphi_2\varphi_2 - \varphi_1\varphi_3)}{2{\varphi_1}^3 . \varphi_2}\right) = \varphi_1\,(1 - \lambda_\nu)$$

Nun ist nach № 19a:

$$R = \alpha_\nu . k_\nu . \frac{e^{\varphi} . {\varphi_2}^\nu}{{\varphi_1}^{2\nu}} . \frac{(1 + \delta_1)}{\psi_1} = \alpha_\nu k_\nu e^{\varphi} . \left(\frac{\varphi_2}{{\varphi_1}^2}\right)^\nu \frac{(1 + \delta_1)}{\varphi_1 (1 - \lambda_\nu)}$$

Hierin geht δ_1 aus δ hervor, wenn darin überall $\varphi_1\, \varphi_2 \ldots . \varphi_m$ durch $\psi_1\, \psi_2 \ldots . \psi_m$ ersetzt wird.

Für $\frac{\psi_2}{{\psi_1}^2}$ findet sich z. B.

$$\frac{\psi_2}{{\psi_1}^2} = \frac{2\varphi_2}{{\varphi_1}^3 . {\varphi_3}^2}\left(2\varphi_3\,({\varphi_2}^2 - \varphi_1\varphi_3) + \varphi_1\varphi_2\varphi_4\right)$$

und dieser Ausdruck ist zugleich der wesentlichste Bestandtheil von δ_1. Nach einigen Reductionen, mit Zuziehung des oft gebrauchten Werthes für $1 . 3 . 5 \ldots (2\nu - 1)$, und für $\nu = \frac{{\varphi_1}^2}{2\varphi_2}$ erhält man:

21. . . . . $$R = \frac{k_\nu . \sqrt{2} . (1 + \delta_1)}{e^{\frac{1}{2}} + \rho_\nu (1 - \lambda_\nu)} . \frac{e^{\varphi - \frac{{\varphi_1}^2}{2\varphi_2}}}{\varphi_1} = \frac{\lambda}{\varphi_1} . e^{\varphi - \frac{{\varphi_1}^2}{2\varphi_2}}$$

Im Allgemeinen findet sich k_ν meistens $< \frac{1}{\varphi_1}$, so dass auch $\lambda < 1$ ausfällt. Auf Grund analoger Betrachtungen ergeben sich die Reste in № 5 und № 6, wenn man in dem Ausdruck:

21a. . . . . $$\frac{k_\nu . 2^{\frac{3}{2}}\,(1 + e_2)}{e^{\frac{1}{2}} + \rho\nu} . \frac{1}{\varphi_1} . e^{\varphi i} . e^{-\frac{{\varphi_1}^2}{2\varphi_2}}$$

das Reelle vom Imaginären trennt. Dabei ist $1 + e_2 = 1 + r < 1 . (\cos \mathfrak{d} + i \sin \mathfrak{d}) \ldots$

Sei nun die Funktion $\varphi\,(x)$, nämlich: $ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1} x + a_n$ durch ihr letztes Glied a_n gekürzt; dann ist ihr Integral, so wie alle Differentialquotienten mit einem constanten Faktor multiplicirt. Die übrigen Voraussetzungen bleiben unverändert

wie früher. Endlich sei die reelle Zahl (μ) so, dass $-1 < \mu < +\infty$ dabei μ, ganz gebrochen, oder irrational. Dann hat man durch theilweise Integration:

$$\int \varphi(x)^{\mu}\, dx = \int \frac{\varphi^{\mu}(\mu+1)\varphi_1}{(\mu+1)\varphi_1}.dx = \frac{1}{\mu+1}\int \frac{1}{\varphi_1}.d\varphi^{\mu+1} = \frac{1}{\mu+1}\frac{\varphi^{\mu+1}}{\varphi_1} + \frac{1}{\mu+1}\int \frac{\varphi^{\mu+1}\varphi_2\, dx}{\varphi_1^{2}}$$

Für ganzzahlige (μ) erkennt man unmittelbar, wenn man sich φ^{μ} entwickelt denkt, dass das Integral mit 0 anfängt. Stellt man sich für gebrochene $(\mu).\varphi^{\mu}$ in eine convergente unendliche Reihe nach Potenzen von x entwickelt vor, so findet dasselbe statt. — Also gilt für identische Transformationen das unter № (1) Gesagte auch hier. Bezeichnet man ferner die Produkte $(\mu+p)$; $(\mu+p)(\mu+p+1)$; $(\mu+p)(\mu+p+1)(\mu+p+2)\ldots(\mu+p+\nu-1)$ der Reihe nach mit $(\mu+p)_1$; $(\mu+p)_2\ldots(\mu+p)_{\nu}$, so erhält man durch fortgesetzte theilweise Integration:

$$\int_0^x \varphi^{\mu}.dx = \frac{\varphi^{\mu+1}}{(\mu+1)\varphi_1}\left(1 + \frac{\varphi^1.a_1}{(\mu+2)_1.\varphi_1^{2}} + \frac{\varphi^2.a_2}{(\mu+2)_2.\varphi_1^{4}} + \frac{\varphi^3.a_3}{(\mu+2)_3.\varphi_1^{6}} + \ldots \frac{\varphi^{\nu-1}.a_{\nu-1}}{(\mu+2)_{\nu-1}\varphi_1^{2\nu-2}}\right)$$

$$+ \frac{1}{(\mu+1)_{\nu}}.\int_0^x \frac{\varphi^{\mu+\nu}a_{\nu}.dx}{\varphi_1^{2\nu}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 22$$

Die Coefficienten $a_1\ a_2\ a_3\ldots a_{\nu}$ sind die Früheren.

Sei nun zunächst: $0 < \mu < 1$, und bezeichnet man in der Gleichung 22 das Schlussintegral: $\frac{1}{(\mu+1)_{\nu}}.\int_0^x \frac{\varphi^{\mu+\nu}.a_{\nu}}{\varphi_1^{2\nu}}\, dx$ mit R_{μ}, so erhält man für $\mu = o$:

$$x = \frac{\varphi}{1.\varphi_1}\left(1 + \frac{\varphi^1 a_1}{2_1.\varphi_1^{2}} + \frac{\varphi^2.a_2}{2_2.\varphi_1^{4}} + \frac{\varphi^3.a_3}{2_3.\varphi_1^{6}} + \ldots + \frac{\varphi^{\nu-1}.a_{\nu-1}}{2_{\nu-1}.\varphi_1^{2\nu-2}}\right) + Ro \ldots\ldots 23$$

$0 < \mu < 1 \ldots.$

$$\int_0^x \varphi^{\mu}.dx = \frac{\varphi^{\mu+1}}{(\mu+1)\varphi_1}\left(1 + \frac{\varphi.a_1}{(\mu+2)\varphi_1^{2}} + \frac{\varphi^2.a_1}{(\mu+2)\varphi_1^{4}} + \frac{\varphi^3.a_3}{(\mu+2)\varphi_1^{6}} + \ldots \frac{\varphi^{\nu-1}.a_{\nu-1}}{(\mu+2)_{\nu-1}\varphi_1^{2\nu-2}}\right) + R_{\mu}. 24$$

für $\mu = 1$:

$$\int_0^x \varphi^1.dx = \frac{\varphi^2}{2.\varphi_1}\left(1 + \frac{\varphi.a_1}{3_1.\varphi_1^{2}} + \frac{\varphi^2.a_2}{3_2.\varphi_1^{4}} + \frac{\varphi_1^3.a_3}{3_3.\varphi_1^{6}} + \ldots \frac{\varphi^{\nu-1}.a_{\nu-1}}{3_{\nu-1}.\varphi_1^{2\nu-2}}\right) + R_1 \ldots\ldots\ldots 25$$

Nun lassen sich die Reste R_0 und R_1 in № 23 und № 25, ohne Schwierigkeit direkt berechnen. Wenn daher, wie später an bestimmten Beispielen gezeigt werden soll, die endlichen Reihen in 23 und 25, dem wirklichen Betrage von x, und $\int_0^x \varphi(x)\, dx$ nahe kommen, so muss für ein beliebiges, zwischen 0 und 1 liegendes (μ) unter den bei № 1 ausgesprochenen Bedingungen der Werth von

$$\frac{\varphi^{\mu+1}}{(\mu+1)\varphi_1}\left(1+\frac{\varphi\cdot a_1}{(\mu+2)_1\cdot\varphi_1^{\,2}}+\frac{\varphi^2\cdot a_2}{(\mu+2)_2\cdot\varphi_1^{\,4}}+\ldots+\frac{\varphi^{\nu-1}\cdot a_{\nu-1}}{(\mu+2)_{\nu-1}\cdot\varphi_1^{\,2\nu-2}}\right)$$

wegen der Conformität der Ausdrücke in 23, 24, 25 nothwendig zwischen die Summen der Reihen von 23 und 25 fallen. Aus demselben Grunde liegt dann auch $R\mu$ zwischen R_0 und R_1. Lässt man (μ) stetig sich ändern von 0 bis 1 hin, so muss $R(\mu)$ ebenso eine stetige Funktion von (μ) sein. Sind dabei R_0 und R_1 sehr klein, so kann man, wenn die endlichen Reihen in 23, 24 und 25, mit Ausschluss von R_0, R_μ, R_1 der Reihe nach mit A, B, C bezeichnet werden, setzen:

$B-A : C-B = R\mu - R_0 : R_1 - R_\mu$, woraus sofort folgt:

$$26 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots R\mu = \frac{R_1(B-A)+R_0(C-B)}{C-A}$$

Wenn (μ) negativ ist, aber so, dass $-1 < \mu < 0$, so wird, wenn man das Intgegral $\int_0^x \frac{dx}{\varphi(x)}$ direkt bestimmt, in der vorhergehenden Gleichung für $R\mu$, $R_1 = 0$ und man erhält:

$$26a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots R\mu = R_0\,\frac{C-B}{C-A}$$

Ganz in gleicher Weise sind die Schlüsse, wenn (μ) zwischen 1 und 2 liegt oder überhaupt zwischen m und $m+1$, wo dann freilich die Integrale $\int_0^x \varphi(x)^m dx$ und $\int_0^x \varphi(x)^{m+1} dx$ direkt bestimmt werden müssten. Damit ist ein Weg angezeigt, das irrationale Integral $\int_0^x \varphi(x)^\mu dx$ mit allerdings mässiger Annäherung zu ermitteln. Man geht dabei in den endlichen Reihen für $\int_0^x \varphi(x)^m dx$ so weit, bis die Summe von $R_m + R_{m+1}$ vom Abnehmen ins Zunehmen übergeht. Man erzielt im Allgemeinen eine Annäherung bis ca. zur 3. und 5. Decimalen. — Obgleich nun diese Annäherung keine besonders befriedigende ist, so hat doch selbst in dieser Form das Resultat seinen hohen Werth, wegen seiner Allgemeinheit. Jedenfalls stellt sich das Integral: $\int_0^x \varphi^\mu dx$ unter der allgemeinen Form dar:

$$\int_0^x \varphi^\mu dx = \frac{\varphi^{\mu+1}}{\varphi_1(\mu+1)}(1+\delta\mu), \text{ wo } \delta\mu < 1.$$

Eine wichtige Anwendung möge noch folgen:

Versucht man das bisherige Verfahren zur Darstellung des Integrals: $\int_0^x e^{-\varphi(x)} dx$ zu verwenden, so findet sich:

$$27 \ldots\ldots\ldots\ldots \int_0^x e^{-\varphi(x)} dx = C - \frac{e^{-\varphi(x)}}{\varphi_1}(1-\varepsilon) \text{ wobei}$$

$$\varepsilon = \left(\frac{a_1}{\varphi_1^{\,2}} - \frac{a_1}{\varphi_2^{\,4}} + \frac{a_3}{\varphi_1^{\,6}} - \frac{a_4}{\varphi_1^{\,8}} + \ldots \pm \frac{a_{\nu-1}}{\varphi_1^{\,2\nu-2}} \mp \lambda\cdot e^{-\frac{\varphi_1^{\,2}}{2\varphi_2}}\right)$$

C ist eine noch zu bestimmende Constante, die sich, da:

$$\int_x^\infty e^{-\varphi(x)}dx = \frac{e^{\varphi(x)}}{\varphi_1}(1-\varepsilon)$$

gefunden wurde, als das Total-Integral $\int_0^\infty e^{-\varphi(x)}dx$ herausstellt. Da aber das Integral $\int_0^\infty e^{-\varphi(x)}dx$ sich nicht direkt finden lässt, so muss man andere Wege einschlagen. Sei nun:

$$e^{-\varphi(x)} = 1 - \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^3}{3!} + \ldots \pm \frac{\varphi^n}{n!} \mp \frac{\varphi^{n+1}}{(n+1)!} \pm \ldots\ldots$$

so ist die Reihe rechts für jedes endliche φ unbedingt convergent.

Somit erhält man:

$$\int_0^x e^{-\varphi(x)}dx = x - \frac{1}{1!}\int_0^x \varphi dx + \frac{1}{2!}\int_0^x \varphi^2 dx - \frac{1}{3!}\int_0^x \varphi^3 dx \ldots \pm \frac{1}{n!}\int_0^x \varphi^n dx \mp \ldots$$

d. h. nach der Gleichung 22, mit Rücksicht auf 23, 24, 25 ...

$$\int_0^x e^{-\varphi(x)}dx =$$

$$\frac{\varphi}{1\,\varphi_1}\left(1 + \frac{\varphi\cdot a_1}{2_1\cdot\varphi_1^2} + \frac{\varphi^2\cdot a_2}{2_2\cdot\varphi_1^4} + \frac{\varphi^3\cdot a_3}{2_3\cdot\varphi_1^6} + \ldots + \frac{\varphi^{\nu-1}\cdot a_{\nu-1}}{2_{\nu-1}\cdot\varphi_1^{2\nu-2}}\right) + R_0$$

$$-\frac{\varphi^2}{2!\varphi_1}\left(1 + \frac{\varphi\cdot a_1}{3_1\cdot\varphi_1^2} + \frac{\varphi^2\cdot a_2}{3_2\cdot\varphi_1^4} + \frac{\varphi^3\cdot a_3}{3_3\cdot\varphi_1^6} + \ldots\ldots \frac{\varphi^{\nu-1}\cdot a_{\nu-1}}{3_{\nu-1}\cdot\varphi_1^{2\nu-2}}\right) - \frac{R_1}{2!}$$

$$+\frac{\varphi^2}{3!\varphi_1}\left(1 + \frac{\varphi\cdot 1}{4_1\cdot\varphi_1^3} + \frac{\varphi^2\cdot a_2}{4_2\cdot\varphi_1^4} + \frac{\varphi^3\cdot a_3}{4_3\cdot\varphi_1^6} + \ldots + \frac{\varphi^{\nu-1}\cdot a_{\nu-1}}{4_{\nu-1}\cdot\varphi_1^{2\nu-2}}\right) + \frac{R_2}{3!} \quad \ldots\ldots 27a$$

$$-\frac{\varphi^4}{4!\varphi_1}\left(1 + \frac{\varphi\cdot a_1}{5_1\cdot\varphi_1^2} + \frac{\varphi^2\cdot a_2}{5_1\cdot\varphi_1^4} + \frac{\varphi^2\cdot a_3}{5_3\cdot\varphi_1^6} + \ldots\ldots \frac{\varphi^{\nu-1}\cdot a_{\nu-1}}{5_{\nu-1}\cdot\varphi_1^{2\nu-2}}\right) - \frac{R_3}{4!}$$

$$+\frac{\varphi^5}{5!\varphi_1}\left(1 + \frac{\varphi\cdot a_1}{6_1\cdot\varphi_1} + \frac{\varphi^2\cdot a_2}{6_2\cdot\varphi_1^4} + \frac{\varphi^3\cdot a_3}{6_2\cdot\varphi_1^6} + \ldots\ldots \frac{\varphi^{\nu-1}\cdot a_{\nu-1}}{6_{\nu-1}\cdot\varphi_1^{2\nu-2}}\right) + \frac{R_4}{5!}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Summirt man in verticaler Richtung, so findet sich für den Coefficienten von (1):

$$\frac{1}{\varphi_1}\left(\frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots\ldots\right) = -\left(e^{-\varphi} - \frac{1}{1!}\right)\cdot\frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{\varphi_1}(1-e^{-\varphi})$$

für den Coefficienten von $\frac{a_1}{\varphi_1^2}$:

$$\frac{1}{\varphi_1}\left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots\ldots\right) = \frac{1}{\varphi_1}\left(e^{-\varphi} - \left[1 - \frac{\varphi}{1!}\right]\right) = \frac{1}{\varphi_1}\left(e^{-\varphi} + \left[\frac{\varphi}{1} - 1\right]\right)$$

Der Coefficient von $\frac{a_2}{\varphi_1^4}$ wird:

$$\frac{1}{\varphi_1}\left(\frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^5}{5!} \ldots\right) = -\frac{1}{\varphi_1}\left\{e^{-\varphi} - \left(1 - \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{2!}\right) = \left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^1}{1!} + 1\right)\cdot\frac{1}{\varphi_1} - \frac{e^{-\varphi}}{\varphi_1}\right.$$

In gleicher Weise kommt für den Coefficienten von $\frac{a_3}{\varphi_1^6}$:

$$\frac{1}{\varphi_1}\left(\frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{\varphi^6}{6!} \ldots\right) = \frac{1}{\varphi_1}\left(e^{-\varphi} - \left[1 - \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^3}{3!}\right]\right) = \frac{1}{\varphi_1}\left(\frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi_1}{1} - 1\right) + \frac{e^{-\varphi}}{\varphi_1}$$

. . . . . .

Bezeichnet man allgemein: $\frac{\varphi^m}{m!} - \frac{\varphi^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\varphi^{m-2}}{(m-2)!} - \ldots \mp \frac{\varphi}{1} \mp 1$ mit Δ_m mit der Bemerkung, dass auch die Reihen in verticaler Richtung convergiren, so kommt:

$$\int_0^x e^{-\varphi(x)}\,dx = \frac{1}{\varphi_1}\left(1 + \frac{\Delta_1 \cdot a_1}{\varphi_1^2} + \frac{\Delta_2 \cdot a_2}{\varphi_1^4} + \frac{\Delta_3 \cdot a_3}{\varphi_1^6} + \ldots + \frac{a_{\nu-1} \cdot \Delta_{\nu-1}}{\varphi_1^{2\nu-2}}\right)$$

$$- \frac{e^{-\varphi(x)}}{\varphi_1}\left(1 - \frac{a_1}{\varphi_1^2} + \frac{a_2}{\varphi_1^4} + \frac{a_3}{\varphi_1^6} + \ldots \mp \frac{a_{\nu-1}}{\varphi_1^{2\nu-2}}\right)$$

$$+ \frac{R_0}{0!} - \frac{R_1}{1!} + \frac{R_2}{2!} - \frac{R_3}{3!} \mp \ldots \mp \frac{R_{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

Für die mittlere Reihe kann man mit Vernachlässigung von $\lambda \cdot e^{-\frac{\varphi_1^2}{2\varphi_2}}$ setzen

$$\frac{e^{-\varphi(x)}}{\varphi_1}(1-\varepsilon) = \int_x^\infty e^{-\varphi(x)}\,dx$$

Somit erhält man schliesslich:

$$\int_0^x e^{-\varphi(x)}\,dx = \frac{1}{\varphi_1}\left(1 + \frac{\Delta_1 \cdot a_1}{\varphi_1^2} + \frac{\Delta_2 \cdot a_2}{\varphi_1^4} + \frac{\Delta_3 \cdot a_3}{\varphi_1^6} + \ldots + \frac{a_{\nu-1} \cdot \Delta_{\nu-1}}{\varphi_1^{2\nu-2}}\right)$$

$$- \frac{e^{-\varphi}}{\varphi_1}(1-\varepsilon) + \sum_0^\mu \pm \frac{R_\mu}{\mu!} \ldots R_\mu = \frac{1}{(\mu+1)_\nu}\int_0^x \frac{\varphi(x)^{\mu+\nu} \cdot a_\nu \cdot dx}{\varphi_1^{2\nu}}.$$

Für das Restglied hat man hier $\mu = 0, 1, 2 \ldots \infty$

$$\sum \pm \frac{R_\mu}{\mu} = \int_0^x \frac{\varphi^\nu \cdot a_\nu}{\varphi_1^{2\nu}}\left(\frac{1}{1_\nu} - \frac{|\varphi}{1!2_\nu} + \frac{\varphi^2}{2!3_\nu} - \frac{\varphi^3}{3!\,4_\nu} + \ldots\right) dx$$

$$= \int_0^x \frac{\varphi^\nu \cdot a_\nu}{1_\nu \cdot \varphi_1^{2\nu}} \cdot \left(1 - \frac{\varphi \cdot 1_\nu}{1!\,2_\nu} + \frac{\varphi^2 \cdot 1_\nu}{2!\,3_\nu} - \frac{\varphi^3 \cdot 1_\nu}{3!\,4_\nu} + \ldots\right) dx.$$

wobei:

$$\frac{1_\nu}{2_\nu} = \frac{1.2.3 \ldots \nu}{2.3.4 \ldots \nu+1} = \frac{1}{\nu+1}; \quad \frac{1_\nu}{3_\nu} = \frac{1.2}{(\nu+1)(\nu+2)} = \frac{1}{(\nu+2)_2} \ldots\ldots$$

$$\frac{1_\nu}{m_\nu} = \frac{1.2 \ldots m}{(\nu+1)(\nu+2) \ldots (\nu+m)} = \frac{1}{(m+\nu)_m}$$

Nun ist aber offenbar:

$$1 - \frac{\varphi.1_\nu}{1!\,2_\nu} + \frac{\varphi^2.1_\nu}{2!\,3_\nu} - \frac{\varphi^3.1_\nu}{3!\,4_\nu} + \frac{\varphi^4.1_\nu}{4!\,5_\nu} - \ldots = e^{-\varphi}(1-\lambda_\nu);\ \lambda_\nu < 1$$

Demnach:

$$\sum_0^\infty \pm \frac{R_\mu}{\mu!} = \int_0^x \frac{\varphi^\nu . a_\nu . e^{-\varphi}(1-\lambda_\nu).dx}{{\varphi_1}^{2\nu}.1_\nu},$$

d. h. nach mehrfach erwähntem Satz und mit Rücksicht darauf, dass:

$$a_\nu < 1.3.5\ldots(2\nu-1).{\varphi_2}^\nu \text{ ist}$$

$$\sum_0^\infty \pm \frac{R_\mu}{\mu!} < x \cdot \frac{\varphi^\nu.1.3.5\ldots(2\nu-1).{\varphi_2}^\nu.e^{-\varphi}(1-\lambda_\nu)}{{\varphi_1}^{2\nu}.1.2.3\ldots\nu}$$

Da nun

$$1.3.5\ldots 2\nu-1 = \sqrt{2}\,.\left(\frac{2\nu}{e}\right)^\nu.e^{-\rho_1}\ldots\rho_1 = \frac{1}{24\nu} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{360\nu^3} - \frac{31}{32}\cdot\frac{1}{1260\nu^5} + \ldots.$$

$$1.2.3\ldots\nu \quad = \sqrt{2\pi\nu}\,.\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu.e^{\rho_2}\ldots\rho_2 = \frac{1}{12\nu} - \frac{1}{360\nu^3} + \frac{1}{1260\nu^5} - \ldots.$$

so erhält man:

$$\sum_0^\infty \pm \frac{R_\mu}{\mu!} < \frac{x.\varphi^\nu.\sqrt{2}\,.\left(\frac{2\nu}{e}\right)^\nu.e^{-\rho_1}.{\varphi_2}^\nu.e^{-\varphi}(1-\lambda_\nu)}{{\varphi_1}^{2\nu}.\sqrt{2\pi\nu}.\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu e^{\rho_2}}$$

das heisst

$$\sum_0^\infty \pm \frac{R_\mu}{\mu!} < x \cdot \left(\frac{2\varphi\varphi_2}{\varphi_1\varphi_1}\right)^\nu.\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\cdot e^{-\varphi}.$$

Somit ergiebt sich:

$$\int_0^x e^{-\varphi(x)}dx = \frac{1}{\varphi_1}\left(1 + \frac{\Delta_1.a_1}{{\varphi_1}^2} + \frac{\Delta_2.a_2}{{\varphi_1}^2} + \frac{\Delta_3.a_3}{{\varphi_1}^6} + \ldots + \frac{a_{\nu-1}.\Delta_{\nu-1}}{{\varphi_1}^{2\nu-2}}\right) \ldots\ldots 28$$

$$- \frac{e^{-\varphi}}{\varphi_1}(1-\varepsilon) + x \cdot \left(\frac{2\varphi\varphi_2}{\varphi_1\varphi_1}\right)^\nu.\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\,.\,e^{-\varphi}.\rho_0\ldots.\rho_0 < 1$$

Die Zahl (ν) ist so zu wählen, dass die Reste $R_0\ R_1\ R_2\ldots\infty\ldots < 1$ werden, was sich bei der Darstellung der Reihen in № 27a von selbst ergiebt. Die Grössen ρ_1 und ρ_2 kann man

immer, auch für sehr mässige Werthe von ν, so bestimmen, dass die Formeln für $1.3.5...(2\nu-1)$ und für $1.2.3...\nu$ bis auf Bruchtheile der Einheit richtig werden. (Man sehe darüber Minding's Integraltafeln S. 169.)

Es möge nun an einem Zahlenbeispiel die Brauchbarkeit der gewonnenen Formen illustrirt werden. Es sei $\varphi(x) = x^3 + 2x^2 + 11x + 1$; so hat man $\varphi_1 = 3x^2 + 4x + 11$; $\varphi_2 = 6x + 4$; $\varphi_3 = 6$; $\varphi_4 = \varphi_5 = \ldots = 0$; aus $\varphi_1 = 0$ erkennt man, dass $\varphi(x)$ weder ein reelles Maximum noch Minimum hat. Für $x = 2$ hat man $\varphi = 39$; $\varphi_1 = 31$; $\varphi_2 = 16$; $\varphi_3 = 6$; $\varphi_4 = \varphi_5 = \ldots . 0$; somit ergiebt sich:

$$\mathfrak{a}_1 = \varphi_2 = 16;\ \mathfrak{a}_2 = 2.3.97;\ \mathfrak{a}_3 = 2^6.3^2.5.11;\ \mathfrak{a}_4 = 2^3.3^3.5.18563;$$

$$\mathfrak{a}_5 = 2^9.3^2.5.7.1153;\ \mathfrak{a}_6 = 2^6.3^3.5.7.284513;\ \mathfrak{a}_7 = 2^{10}.3^3.5.7.11.151973;$$

$$\mathfrak{a}_8 = 2^7.3^4.5^3.7.11.1249997;\ \mathfrak{a}^9 = -2^{11}.3^5.5^2.7.11.13.41178029;$$

$$\mathfrak{a}_{10} = -2^8.3^4.5^2.7.13.16890900107.$$

Als Beleg zur Formel 16, wonach $\mathfrak{a}_\nu < 1.3.5...(2\nu-1).\varphi_2^{\nu}$ sein muss, möge dienen:

$$\log \mathfrak{a}_6 = 10{,}23579...\log 1.3.5.7.9.11.\varphi_2^{6} = 11{,}24156$$

also $1.3.5.7.9.11.\varphi_2^{6} > 10.\mathfrak{a}_6$; ferner wird:

$$\frac{\lg 1.3.5...15}{\mathfrak{a}_8}.\varphi_2^{8} = 1{,}8438146 = \lg 69{,}90... \text{ d. i. nahezu} = 70.$$

$\lg \frac{\mathfrak{a}_1}{\varphi_1^2} = 0{,}2213966-2$	$\frac{\mathfrak{a}_1}{\varphi_1^2} = 0{,}016649323621$
$\lg \frac{\mathfrak{a}_2}{\varphi_1^4} = 0{,}7994762-4$	$\frac{\mathfrak{a}_2}{\varphi_1^4} = 0{,}000630196822$
$\lg \frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi_1^6} = 0{,}5526150-5$	$\frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi_1^6} = 0{,}000035695626$
$\lg \frac{\mathfrak{a}_4}{\varphi_1^8} = 0{,}4169359-6$	$\frac{\mathfrak{a}_4}{\varphi_1^8} = 0{,}0000026117756$
$\lg \frac{\mathfrak{a}_5}{\varphi_1^{10}} = 0{,}3557928-7$	$\frac{\mathfrak{a}_5}{\varphi_1^{10}} = 0{,}000000226879$
$\lg \frac{\mathfrak{a}_6}{\varphi_1^{12}} = 0{,}3393735-8$	$\frac{\mathfrak{a}_6}{\varphi_1^{12}} = 0{,}000000021846$
$\lg \frac{\mathfrak{a}_7}{\varphi_1^{14}} = 0{,}3298248-9$	$\frac{\mathfrak{a}_7}{\varphi_1^{14}} = 0{,}0000000021371$
$\lg \frac{\mathfrak{a}_8}{\varphi_1^{16}} = 0{,}2342135-10$	$\frac{\mathfrak{a}_8}{\varphi_1^{16}} = 0{,}00000000017148$
$-\lg \frac{\mathfrak{a}_9}{\varphi_1^{18}} = 0{,}4066424-11$	$\frac{\mathfrak{a}_9}{\varphi_1^{18}} = -0{,}00000000002550$
$-\lg \frac{\mathfrak{a}_{10}}{\varphi_1^{20}} = 0{,}0711453-12$	$\frac{\mathfrak{a}_{10}}{\varphi_1^{20}} = -0{,}00000000000118$
.....	.....

Wenn man so weit geht, als die Glieder der endlichen Reihe überhaupt abnehmen, so findet sich für das Restglied $\lambda . e^{-\frac{\varphi_1^2}{2\varphi_2}} = R$, im vorliegenden Falle lg $R < 0{,}9591269-14$.

Bezeichnet man die Reihen:

$$\frac{a_1}{\varphi_1^2} + \frac{a_2}{\varphi_1^4} + \frac{a_3}{\varphi_1^6} + \ldots + \frac{a_{\nu-1}}{\varphi_1^{2\nu-2}}$$

$$\frac{a_1}{\varphi_1^2} - \frac{a_2}{\varphi_1^4} + \frac{a_3}{\varphi_1^6} - \ldots \pm \frac{a_{\nu-1}}{\varphi_1^{2\nu-2}}$$

bezüglich mit δ und mit ε, so hat man, nach № 1 und № 4, bis zur 12. Decimalen:

$$\int_0^2 e^{x^3+2x^2+11x+1} . dx = \frac{e^{39}}{31} \cdot (1 + 0{,}01738078852) = \frac{e^{39}}{31} \cdot (1 + \delta)$$

$$\int_2^\infty e^{-(x^2+2x^2+11x+1)} . dx = \frac{e^{-39}}{31} \cdot (1 - 0{,}016052417624) = \frac{e^{-39}}{31} \cdot (1 - \varepsilon)$$

Für die unter № 5a, № 5, № 6 aufgeführten Reihen:

$$1 - \frac{a_2}{\varphi_1^4} + \frac{a_4}{\varphi_1^8} - \frac{a_6}{\varphi_1^{12}} + \ldots \pm \frac{a_{2\nu}}{\varphi_1^{4\nu}} \ldots = P$$

$$\frac{a_1}{\varphi_1^2} - \frac{a_3}{\varphi_1^6} + \frac{a_5}{\varphi_1^{10}} - \ldots \pm \frac{a_{2\nu-1}}{\varphi_1^{4\nu-2}} \ldots = Q$$

ergiebt sich $P = 0{,}9993713932$; $Q = 0{,}0166138527$.

Berechnet man sich hier aus $tg\vartheta = \frac{Q}{P} = tg\ 57'8''{,}32$ und $r = \sqrt{P^2 + Q^2}$, so kommt $r = 0{,}999805 = 1 - 0{,}000195$ und man hat:

$$\int_0^2 \cos\varphi(x) \cdot dx = \frac{r . \sin(\varphi(x) - \vartheta)}{\varphi_1}$$

$$\int_0^2 \sin\varphi(x) \cdot dx = \frac{r . \cos(\varphi(x) - \vartheta)}{\varphi_1}$$

welche Formeln sich durch ihre Einfachheit auszeichnen, und zugleich wie die obigen bis zur 12. Decimalen richtig sind.

In Beziehung auf das Integral № 28, findet man für $\nu = 8$

$\Delta_1 = \varphi \cdot 0{,}974358974358$ $\quad$ $\Delta_5 = \varphi^6 \cdot 0{,}0073665267$

$\Delta_2 = \varphi^2 \cdot 0{,}4750164365$ $\quad$ $\Delta_6 = \varphi^6 \cdot 0{,}0011725036$

$\Delta_3 = \varphi^3 \cdot 0{,}15448675803$ $\quad$ $\Delta_7 = \varphi^7 \cdot 0{,}00016764300$

$\Delta_4 = \varphi^4 \cdot 0{,}0377054497$ $\quad$ $\Delta_8 = \varphi^8 \cdot 0{,}0000204868$

Das negative Restglied ist $< \frac{e^{-39}}{31}$; das positive $= 2 \cdot \left(\frac{2.39.16}{31.31}\right)^8 \cdot \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot e^{-39} \cdot \rho_0$; $\rho_0 < 1$, d. i. $< \frac{2.8,8089651}{\sqrt{25,1327}} \cdot e^{-39}$, woraus man sieht, dass beide vernachlässigt werden können. Ferner erhält man:

$$1 + \frac{\Delta_1 \cdot a_1}{\varphi_1^2} + \frac{\Delta_2 \cdot a_2}{\varphi_1^4} + \frac{\Delta_3 \cdot a_3}{\varphi_1^6} + \ldots\ldots \frac{\Delta_8 \cdot a_8}{\varphi_1^{16}} = 2{,}93398054,$$

sodass man erhält:

$$\int_0^2 e^{-\varphi(x)} \cdot dx = \frac{2{,}93398054}{31} = 0{,}09464453.$$

Für das Integral $\int_0^x \varphi(x)^\mu \cdot dx$, $0 < \mu < 1$ hat man für die Formeln unter № 23, № 24, № 25, wenn $\mu = \frac{2}{5}$ gesetzt wird:

A

$$\frac{\varphi \cdot a_1}{2_1 \cdot \varphi_1^2} = 0{,}32466181$$
$$\frac{\varphi^2 \cdot a_2}{2_2 \cdot \varphi_1^5} = 0{,}15975450$$
$$\frac{\varphi^3 \cdot a_3}{2_3 \cdot \varphi_1^6} = 0{,}08801520$$
$$\frac{\varphi^4 \cdot a_4}{2_4 \cdot \varphi_1^8} = 0{,}05034230$$
$$\frac{\varphi^5 \cdot a_5}{2_5 \cdot \varphi_1^{10}} = 0{,}02843042$$
$$\frac{\varphi^6 \cdot a_6}{2_6 \cdot \varphi_1^{12}} = 0{,}015255213$$
$$\frac{\varphi^7 \cdot a_7}{2_7 \cdot \varphi_1^{14}} = 0.00727376$$
$$\frac{\varphi^8 \cdot a_8}{2_8 \cdot \varphi_1^{16}} = 0{,}00387584$$
$$-\frac{\varphi^9 \cdot a_9}{2_9 \cdot \varphi_1^{18}} = -\,0{,}001304393$$

C

$$\frac{\varphi \cdot a_1}{3_1 \cdot \varphi_1^2} = 0{,}21644120$$
$$\frac{\varphi^2 \cdot a_2}{3_2 \cdot \varphi_1^4} = 0{,}07987750$$
$$\frac{\varphi^3 \cdot a_3}{3_3 \cdot \varphi_1^6} = 0{,}03611250$$
$$\frac{\varphi_4 \cdot a_4}{3_4 \cdot \varphi_1^8} = 0{,}01678076$$
$$\frac{\varphi^5 \cdot a_5}{3_5 \cdot \varphi_1^{10}} = 0{,}00812300$$
$$\frac{\varphi^6 \cdot a_6}{3_6 \cdot \varphi_1^{12}} = 0{,}00381050$$
$$\frac{\varphi^7 \cdot a_7}{3_7 \cdot \varphi_1^{14}} = 0{,}001616391$$
$$\frac{\varphi_8 \cdot a_8}{3_8 \cdot \varphi_1^{16}} = 0{,}00077517$$
$$-\frac{\varphi^9 \cdot a_9}{3_9 \cdot \varphi_1^{18}} = -\,0{,}00023698$$

B

$$\frac{\varphi \cdot a_1}{(\frac{2}{5}+2)_1 \cdot \varphi_1^2} = 0{,}27055155$$
$$\frac{\varphi^2 \cdot a_2}{(\frac{2}{5}+2)_2 \cdot \varphi_1^4} = 0{,}11746680$$
$$\frac{\varphi^3 \cdot a_3}{(\frac{2}{5}+2)_3 \cdot \varphi_1^6} = 0{,}05883910$$
$$\frac{\varphi^4 \cdot a_4}{(\frac{2}{5}+2)_4 \cdot \varphi_1^8} = 0{,}0315857$$
$$\frac{\varphi^5 \cdot a_5}{(\frac{2}{5}+2)_5 \cdot \varphi_1^{10}} = 0{,}01649578$$

$$\frac{\varphi^6 \cdot a_6}{(\frac{2}{5}+2)_6 \cdot \varphi_1{}^{12}} = 0{,}00837168$$

$$\frac{\varphi^7 \cdot a_7}{(\frac{2}{5}+2)_7 \cdot \varphi_1{}^{14}} = 0{,}00380235$$

$$\frac{\varphi^8 \cdot a_8}{(\frac{2}{5}+2)_8 \cdot \varphi_1{}^{16}} = 0{,}001265841$$

$$\frac{\varphi^9 \cdot a_9}{(\frac{2}{5}+2)_9 \cdot \varphi_1{}^{18}} = -0{,}000706050$$

Nun ist direkt:

$$\int_0^2 \varphi(x)^0 \cdot dx = 2;\ \int_0^2 \varphi(x) \cdot dx = \int_0^2 (x^3 + 2x^2 + 11x + 1)\,dx = 33{,}3333\ldots.$$

Bezeichnet man die Summe von m Glieder der endlichen Reihen unter № 23, № 24, № 25 mit A_m B_m C_m wobei also $B = \int_0^2 (x^3 + 2x^2 + 11x + 1)^{\frac{2}{5}} \cdot dx$ vorstellt, so hat man, wenn die Reste für A, B, C der Reihe nach mit R_0, R_μ und R_1 bezeichnet werden mit Zugrundlegung der obigen Zahlenwerthe, und mit Rücksicht auf die empirische Restformel:

$$R_\mu = \frac{(B_m - A_m)R_1 + (C_m - B_m)R_0}{C_m - A_m}$$

$$A_5 = 2{,}07732080; \quad C_5 = 33{,}2984920; \quad B_5 = 5{,}8143400$$

$$R_0 = -0{,}07732080; \quad R_1 = +0{,}034839; \quad R_\mu = -0{,}06069280$$

Demnach $B_5 = 5{,}8143400 - 0{,}0606928 = \mathbf{5{,}7536472}$

Ferner

$$A_6 = 2{,}096513; \quad C_6 = 33{,}39170; \quad B_6 = 5{,}84690$$

$$R_0 = -0{,}096513; \quad R_1 = -0{,}058370; \quad R_\mu = -0{,}092942$$

Demnach $B_6 = 5{,}846900 - 0{,}092942 = \mathbf{5{,}753958}\ldots.$

Mit Zuziehung von 7 Gliedern erhält man:

$$A_7 = \frac{\varphi \cdot 1{,}67373320}{\varphi_1} = 2{,}1056640;\ C_7 = \frac{\varphi^2 \cdot 1{,}36276185}{2\varphi_1} = 33{,}4316405\ldots$$

somit $R_0 = -0{,}1056640;\ R_1 = -0{,}098307\ldots.$

Ferner $B_7 = \frac{\varphi^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5} \cdot \varphi_1}\ 1{,}50168583 = 5{,}858691$, folglich $R_\mu = -0{,}1047888$

Daher das verbesserte

$$B_7 = 5{,}8586961 - 0{,}1047788 = \mathbf{5{,}7539173.}$$

Die drei Werthe von B mit Zuziehung von je 5, 6, 7 Gliedern der obigen Reihen sind also:

$$5{,}7536472;\ 5{,}7539580;\ 5{,}7539173$$

und ihre Differenzen bezüglich:

$$+\ 0{,}0003108;\ -\ 0{,}0000407$$

d. h. man hat mit der hier angewandten Methode den Betrag des irrationalen Integrals: $\int_0^2 (x^3 + 2x^2 + 11x + 1)^{\frac{2}{5}} \cdot dx$ bis zur vierten Decimalen richtig, d. i. bei dem Mangel einer andern brauchbaren Methode, eine schätzbare Annäherung. Der Grund, weshalb die Annäherung nicht weiter reicht, ist offenbar darin zu suchen, dass die für R_μ in Anwendung gebrachte Formel nur eine empirische sein kann. Es ist wol nicht überflüssig, hinzuzufügen, dass die Reihe № 22 mit wachsendem (μ) immer rascher abnimmt, und wenn $\mu > \varphi$ wird, sogar noch mehr als die Reihe (1). Bei grossem (μ) sind übrigens A und C sehr umständlich zu ermitteln.

Die im Vorhergehenden in Anwendung gebrachte Methode lässt sich noch verwerthen bei der Form:

$$\int_0^x e^{\varphi(x)} (\psi(x))^\mu \cdot dx,$$

wo $\varphi(x)$ wie früher, (μ) positiv reell, aber beliebig, und

$$\psi(x) = \alpha \cdot x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1} \cdot x + \alpha_m$$

Dann hat man $e^{\varphi(x)} \cdot (\psi(x))^\mu = e^{\varphi(x) + \mu l \psi(x)}$. Setzt man daher $\varphi(x) + \mu \cdot l\psi(x) = F(x) \ldots$ so wird $F_1 = \varphi_1 + \mu \cdot \frac{\psi_1}{\psi}$. Die Darstellung der höheren Differentialquotienten von $\frac{\psi_1}{\psi}$ wird sehr einfach, wenn man den Nenner in reelle oder complexe Faktoren des ersten Grades zerlegen kann. Denn alsdann ist:

$$\frac{\psi_1}{\psi} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{x + r_1} + \frac{1}{x + r_2} + \ldots + \frac{1}{x + r_m} \right);$$

und ferner:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} \left(\frac{\psi_1}{\psi} \right) = \frac{(-1)^\nu \cdot \nu!}{\alpha} \left(\frac{1}{(x + r_1)^{\nu+1}} + \frac{1}{(x + r_2)^{\nu+1}} + \ldots + \frac{1}{(x + r_m)^{\nu+1}} \right)$$

wobei jedoch die einzelnen Summanden rechts für kein x, von 0 bis x unendlich gross werden dürfen. An die Stelle der früheren $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_\nu$ treten dann $F_1, F_2, F_3 \ldots F_\nu$.

In gleicher Weise lässt sich das Integral $\int_x^\infty e^{-\varphi(x)} \cdot (\psi(x))^\mu \cdot dx$ ermitteln, wobei jedoch $\varphi(x) > \mu \cdot l\psi(x)$ sein muss.

Es ist wol kaum nötig, zu bemerken, dass die vorausgeschickte Methode noch anwendbar ist, auch wenn φ keine ganze rationale Funktion von x ist, sondern eine beliebige positive, — wenn sie überhaupt nur endlich und stetig bleibt zwischen den gegebenen Gränzen, — und wenn ihre höhern Differentialquotienten sich ohne besondere Schwierigkeiten darstellen lassen. Endlich kann $\varphi(x)$ bei derselben Procedur auch complex sein. Dann bleibt die allgemeine Form der Gleichungen № 1, № 4, № 5, № 6, № 22 unverändert bestehen. Sei statt φ gesetzt $\varphi + i\psi$, und sei allgemein:

$$\frac{d^m}{dx^m}(\varphi + \psi i) = \varphi_m + i \cdot \psi_m = r_m \cdot e^{tmi}$$

so kommt z. B. für:

$$\frac{a_1}{\varphi_1^2} = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1^2}\right) = \frac{\varphi_2 + i\psi_2}{(\psi_1 + i\psi_1)^2} = \frac{r_2 . (e^{(t_2 - 2t_1)i})}{r_1^2} = \frac{a_1 + b_1 i}{r_1^2}$$

Für $\frac{a_2}{\varphi_1^4}$ kommt: $$\frac{1.3.r_2^2 . e^{(2t_2 - 4t_1)i} - r_1 r_3 e^{(t_3 - 3t_1)i}}{r_1^4} = \frac{a_2 + b_2 i}{r_1^4}$$

$$\frac{a_3}{(\varphi_1 + i\psi_1)^6} \text{ giebt} = \frac{1.3.5.r_2^3 e^{(3t_2 - 6t_1)i} - 10 . r_1 r_2 r_3 e^{(t_2 + t_3 - 5t_1)i} + r_1^2 . r_4 e^{(t_3 - 4t_1)i}}{r_1^6}$$

$$= \frac{a_3 + b_3 i}{r_1^6} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Somit:

$$\int_0^x e^{(\varphi + i\psi)} \cdot dx = \frac{e^\varphi . e^{(\psi - t_1)i}}{r_1} \left(1 + \frac{a_1 + b_1 i}{r_1} + \frac{a_2 + b_2 i}{r_1^4} + \ldots\ldots \frac{a_{\nu-1} + b_{\nu-1} i}{r_1^{2\nu-2}}\right) + R_\nu \ldots 29$$

Ganz eben so wird alsdann:

$$\int_x^\infty e^{-(\varphi + i\psi)} . dx = \frac{e^{-\varphi} . e^{-(\psi + t_1 i)}}{r_1} \left(1 - \frac{a_1 + b_1 i}{r_1^2} + \frac{a_2 + b_2 i}{r_1^4} - \ldots\ldots \mp \frac{a_{\nu-1} + b_{\nu-1} . i}{r_1^{2\nu-2}}\right) \mp R_\nu$$

Endlich ist noch:

$$\int_0^x e^{\varphi + i\psi} . (P + iQ)^\mu . dx = \int_0^x e^{\varphi + i\psi + \mu . l(P + iQ)} . dx \ldots\ldots$$

und eben so:

$$\int_x^\infty e^{-(\varphi+i\psi)} \cdot (P+iQ)^\mu \cdot dx = \int_x^\infty e^{-(\varphi+i\psi)+\mu \cdot l(P+iQ)} \cdot dx \ldots\ldots$$

wo φ, ψ, P und Q beliebige endliche, positive Funktionen von x sind, und wo im letzten Falle nur φ grösser sein muss als der reelle Bestandtheil von $\mu \cdot l \cdot (P+iQ)$.

II.

Eine besonders wichtige Anwendung findet die vorausgeschickte Methode bei dem Versuch, die allgemeine lineäre Differentialgleichung der zweiten Ordrung auf dem Wege der Näherung zu integriren. Dabei tritt als wesentlicher Vortheil der Umstand entgegen, dass eine Reihe von involvirten Integrationen sogleich in endlicher Form dargestellt werden kann. — Seien nun die Coefficienten der Differentialgleichung in complexer Form vorausgesetzt, also die Gleichung in folgender Gestalt gegeben:

$$1 \ldots\ldots\ldots (\varphi_0+i\psi_0) \cdot \frac{d^2\eta}{dx^2} + 2 \cdot (\varphi_1+i\psi_1) \cdot \frac{d\eta}{dx} + (\varphi_2+i\psi_2)\eta = 0$$

wobei die φ und ψ beliebige Funktionen von x sein sollen.

Schreibt man der Kürze wegen: χ_0, χ_1, χ_2 für die Coefficienten bezüglich von $\frac{d\eta^2}{dx^2}$, $\frac{d\eta}{dx}$, η, und setzt man:

$$2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \eta = e^\theta \cdot \eta$$

wo θ eine beliebige complexe Funktion von x vorstellt, so geht die Gleichung 1 über in:

$$3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_0 \cdot \frac{d^2\eta}{dx^2} + 2X_1 \cdot \frac{d\eta}{dx} + X_2 \cdot \eta = 0$$

worin:

$$4 \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} X_0 = \chi_0; \; X_1 = \chi_0 \cdot \theta' + \chi_1 \text{ und} \\ X_2 = \chi_0\theta'' + 2\chi_1\theta' + \chi_2 + \chi_0\theta'\theta' \end{cases}$$

Bildet man vermittelst dieser Gleichungen den Ausdruck:

$$5a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{X_1}{X_0}\right)' + \left(\frac{X_1}{X_0}\right)^2 - \frac{X_2}{X_0},$$

so fallen alle θ nebst ihren Ableitungen heraus und man erhält:

$$\left(\frac{X_1}{X_0}\right)' + \left(\frac{X_1}{X_0}\right)^2 - \frac{X_2}{X_0} = \left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)' + \left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)^2 - \frac{\chi_2}{\chi_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

Demnach ist $\left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)' + \left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)^2 - \frac{\chi_2}{\chi_0}$ eine Covariante der Gleichung:

$$\chi_0 \cdot \frac{d^2\eta}{dx^2} + 2\chi_1 \cdot \frac{d\eta}{dx} + \chi_2 \cdot \eta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1a$$

Setzt man in dem Gleichungssystem 4, $X_1 = 0$, d. h. $\chi_0 \cdot \theta' + \chi_1 = 0$, so findet sich

$$\theta = -\int \frac{\chi_1}{\chi_0}\, dx$$

Dadurch geht die Gleichung 3 über in:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)' + \left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)^2 - \frac{\chi_2}{\chi^0}\right] \cdot y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

Substituirt man hierin weiter $y = e^{\int v \cdot dx}$, so kommt:

$$\frac{dv}{dx} + v^2 = \left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)' + \left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)^2 - \frac{\chi_2}{\chi_0} = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7$$

Denkt man sich die Gleichung (1) durch $\chi_0 = \varphi_0 + i\psi_0$ dividirt, und die Quotienten

$$\frac{\chi_1}{\chi_0} = \frac{\varphi_1 + i\psi_1}{\varphi_0 + i\psi_0}; \quad \frac{\chi_2}{\chi_0} = \frac{\varphi_2 + i\psi_2}{\varphi_0 + i\psi_0}$$

auf die einfache complexe Form (Normalform) gebracht, — oder was auf dasselbe herauskommt, setzt man in № 1 $\chi_0 = 1$, so hat man statt der Gleichung 7 die folgende:

$$\frac{dv}{dx} + v^2 = \chi'_1 + \chi_1{}^2 - \chi_2 = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8$$

Kann man in der Gleichung 8 die Covariante $\chi'_1 + \chi_1{}^2 - \chi_2$ auf die Form bringen: $\xi' + \xi^2$, so dass also:

$$\frac{dv}{dx} + v^2 = \xi' + \xi^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9$$

so ist ξ ein particuläres Integral der Gleichung 9.

Setzt man daher $v = \xi + u$, wo u eine noch zu bestimmende Funktion von χ vorstellt, so ergibt sich durch Substitution in die Gleichung 9, zur Bestimmung von u sofort:

$$10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u' + 2u.\xi + u^2 = 0$$

worin natürlich ξ eine complexe Funktion, etwa $\eta + i\zeta$ von x ist. Man erhält aus 10:

$$u = \frac{e^{-2\int(\eta + i\zeta)dx}}{C + \int e^{-2\int(\eta + \zeta i)dx}.dx}$$

und somit:

$$11 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v = \eta + i\zeta + \frac{e^{-2\int(\eta + i\zeta)dx}}{C + \int e^{-2\int(\eta + i\zeta)dx}.dx}$$

für das allgemeine Integral der Gleichung 9, d. h. der Gleichung:

$$9a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dv}{dx} + v^2 = (\eta' + i\zeta') + (\eta + i\zeta)^2$$

Daraus folgt nun: die allgemeine Riccati'sche Gleichung 9 (oder 9a) und mithin auch die allgemeine lineäre (1) oder (1a) kann allemal vollständig integrirt werden, so oft die Covariante: $\left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)' + \left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)^2 - \frac{\chi_2}{\chi_0}$ auf die Form gebracht werden kann: $\xi' + \xi^2$. Ist dies nicht möglich, so gibt es kein allgemeines Integral in endlicher Form. — Ist nun in der Gleichung:

$$12 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dv}{dx} + v^2 = f(x) = U + Wi \ldots . (f(x) > 0)$$

$f(x)$ nicht von der Form $\xi' + \xi^2$, so kann man für alle Werthsysteme von x, bei welchen:

$$13 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{f'(x)}{2f(x).\sqrt{f(x)}} < 1$$

wird, $f(x)$ immer so auf die Form bringen:

$$f(x) = \xi' + \xi^2 \pm X$$

dass X ein kleiner ächter Bruch wird. Denn es sei $f(x) = \xi_1^2$, d. h. $\xi_1 = \sqrt{f(x)}$; wonach also der reelle Bestandtheil von $f(x)$ notwendig positiv sein muss. Dann hat man offenbar:

$$f(x) = \xi'_1 + \xi_1^2 - \xi'_1.$$

Dieser Ausdruck aber kann identisch umgeformt werden in:

$$14 \ldots\ldots\ldots f(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{\xi_1^2 - \xi'_1} + (\sqrt{\xi_1^2 - \xi'_1})^2 + \xi'_1 - \frac{d}{dx}\sqrt{\xi_1^2 - \xi'_1}$$

Setzt man:

$$\sqrt{\xi_1^2 - \xi'_1} = \xi;\ \xi'_1 - \frac{d}{dx}\sqrt{\xi_1^2 - \xi'_1} = \pm X \ldots\ldots\ldots\ldots 14a$$

so ist in der That die obige Forderung erfüllt, wenn man nachweisen kann, dass alsdann $X < 1$ werden muss.

Nun hat man:

$$X = \xi'_1 - \frac{2\xi_1\xi'_1 - \xi''_1}{2\sqrt{\xi_1^2 - \xi'_1}} = \xi'_1 - \frac{\xi'_1 - \frac{\xi''_1}{2\xi_1}}{\sqrt{1 - \frac{\xi'_1}{\xi_1^2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots 15$$

Da aber $\xi_1 = \sqrt{f}$, so kommt:

$$\frac{\xi''_1}{2\xi_1} = \frac{1}{8}\frac{2ff'' - f'f'}{f^2};\ \text{und}\ \frac{\xi'_1}{\xi_1^2} = \frac{f'}{2f.\sqrt{f}} \ldots\ldots\ldots\ldots 16$$

Ist also

$$\frac{2ff'' - f'f'}{8f^2} < 1 \text{ und } \frac{f'}{2f.\sqrt{f}} < 1,$$

so erkennt man, weil ξ'_1 und $\frac{\xi'_1}{\sqrt{1 - \frac{\xi'_1}{\xi^2}}}$ nahezu von derselben Grössenordnung sind, dass in der That dann die obige Forderung erfüllt ist. Wir wollen X Restfunktion nennen. Wenn man $\left(1 - \frac{\xi'_1}{\xi_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ entwickelt, und die ξ_1, ξ'_1, ξ''_1 wieder durch f, f', f'' darstellt, so gewinnt man für diese selbe Restfunktion die folgende merkwürdige Form:

$$X = \frac{ff'' - f'f'}{4f^2} + \frac{f'}{2^6.f^{\frac{7}{2}}}(4ff'' - 5f'f') + \frac{(f')^2}{2^3.f^5}(6ff'' - 8f'f')$$

$$+ \frac{5(f')^3}{2^{12}.f^{\frac{13}{2}}}(8ff'' - 11f'f') + \frac{7(f')^4}{2^{14}.f^8}(10ff'' - 14f'f') + \frac{9(f')^5}{2^{18}.f^{\frac{19}{2}}}(12ff'' - 17f'f') + \ldots$$

$$\frac{(2m-3)(f')^{m-1}}{2^m.f^{\frac{3m+1}{2}}}(2mff'' - (3m-1)f'f') \ldots\ldots\ldots\ldots 17$$

Das Gesetz ihrer Fortschreitung ist wol ohne weiteres ersichtlich. Man bemerkt, dass der Exponent von 2 im Nenner dem Coefficienten von $f'f'$ gleich ist, wenn derselbe gerade, und um 1 höher, wenn ungerade. Während links nur irrationale Funktionen stehen, — auch für ganze oder gebrochene rationale Formen von f, — sind dieselben rechts auf einen Faktor bei den Gliedern gerader Ordnung beschränkt. Die f, f', f'' sind, wie bemerkt, complex.

Es bleibt nun noch übrig in der Gleichung 11 (II) die Integrations-Constante zu bestimmen. Es empfiehlt sich dabei das Integral im Nenner $\int e^{-2\int(\eta + \zeta i)dx}.dx = \int e^{-2\int \xi.dx}.dx$

in die Differenz $\int_0^\infty - \int_x^\infty$ zu zerlegen. Denkt man sich das erste, das von x unabhängig ist, mit der Constante C vereinigt, und sei $C + \int_0^\infty e^{-2\int \xi dx} . dx = k$, so kann man nach № 4 (I) setzen: $\int_x^\infty e^{-2\int \xi dx} . dx = \frac{e^{-2\int \xi dx}}{2\xi} (1 - \varepsilon)$, wo neben ξ auch ε complex ist, aber dabei mod $\varepsilon < 1$.

Bezeichnet man die Anfangswerthe von η und ξ (für $x = x_0$) mit η_0 und ξ_0 und sei auch $(2\int \xi dx)_{x=x_0} = 2w_0$, so hat man aus № 11 (II):

$$\eta_0 - \xi_0 = \frac{e^{-2w_0}}{k - \frac{e^{-2w_0}}{2\xi_0}(1-\varepsilon_0)} = \frac{1}{k . e^{2w_0} - \frac{1-\varepsilon_0}{2\xi_0}}$$

Hieraus ergibt sich:

$$18 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k = \left(\frac{1-\varepsilon_0}{2\xi_0} + \frac{1}{\eta_0 - \xi_0}\right) . e^{-2w_0}$$

Man erkennt hieraus, dass für einigermaassen beträchtliche Werthe von w_0, k nur dann einen erheblichen Betrag erhalten kann, wenn η_0 und ξ_0 einander sehr nahe liegen. Im Allgemeinen ist k eine sehr kleine Grösse.

Im Folgenden werde $\eta + \zeta i$ immer mit ξ bezeichnet, die Restfunktion $\xi'_1 - \frac{2\xi_1\xi'_1 - \xi''_1}{2\sqrt{\xi_1^2 - \xi'_1}}$ mit X, und für die Differenz $\int_0^\infty e^{-2\int \xi dx} . dx - \int_x^\infty e^{-2\int \xi dx} . dx$ soll stehn: $\gamma - \gamma_x$.

Das allgemeine Integral der Gleichung (11), nämlich:

$$\frac{d\eta}{dx} + \eta^2 = \xi' + \xi^2$$

hat dann die Form

$$\eta = \xi + \frac{e^{-2\int \xi dx}}{C + \gamma - \gamma_x}$$

Man setze nun das Integral der vollständigen Gleichung:

$$19 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d\eta}{dx} + \eta^2 = \xi' + \xi^2 + X \text{ [1]}$$

unter derselben Form voraus, nur dass an die Stelle von C eine noch zu bestimmende Funktion von x gesetzt sei, etwa u, d. h. also:

$$20 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \eta = \xi + \frac{e^{-2\int \xi dx}}{u + \gamma - \gamma_x}$$

---

[1]) Hierbei ist $\xi = \sqrt{\xi_1^2 - \xi'_1}$ ein genähertes particuläres Integral und X ein Rest erster Ordnung.

Man findet nun hieraus:

$$\eta' = \xi' - \frac{2\xi e^{-2\int \xi dx}.(u + \gamma - \gamma_x) + e^{-2\int \xi dx}.(u + \gamma)' + e^{-4\int \xi dx}}{(u + \gamma - \gamma_x)^2}$$

$$\eta^2 = \xi^2 + \frac{2\xi.e^{-2\int \xi dx}(u + \gamma - \gamma_x) + e^{-4\int \xi dx}}{(u + \gamma - \gamma_x)^2}$$

Somit geht die Gleichung 19 über in:

$$-\frac{e^{-2\int \xi dx}(u + \gamma)'}{(u + \gamma - \gamma_x)^2} = X$$

oder entwickelt:

$$\frac{e^{-2\int \xi dx}(u + \gamma)' - 2.(u + \gamma)\gamma_x.X + (u + \gamma)^2.X + \gamma_x{}^2.X}{(u + \gamma - \gamma_x)^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 21$$

Setzt man zur Bestimmung von u

$$e^{-2\int \xi dx}.(u + \gamma)' - 2.(u + \gamma).\gamma_x.X + (u + \gamma)^2.X = 0 \quad \ldots\ldots\ldots 22$$

so bleibt für den Rest zweiter Ordnung:

$$R = \frac{\gamma_x{}^2.X}{(u + \gamma - \gamma_x)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 23$$

Dividirt man die Gleichung (22) durch $(u + \gamma)^2$, so wird sie lineär von der ersten Ordnung und man erhält aus ihr in bekannter Weise:

$$u + \gamma = \frac{e^{2\int \gamma_x.X.e^{2\int \xi dx}.dx}}{C + \int e^{2\int \gamma_x.X.e^{2\int \xi dx}.dx}.X.dx}$$

oder wenn man für $\gamma_x = \int_x^\infty e^{-2\int \xi dx}.dx = \frac{e^{-2\int \xi dx}}{2\xi}(1 - \varepsilon)$ setzt (I № 4) und den Ausdruck $\frac{X}{2\xi}(1 - \varepsilon)$ mit x bezeichnet:

$$u + \gamma = \frac{e^{2\int x dx}}{C + \int e^{2\int (\xi + x)dx}.X.dx} = \frac{e^{2\int x dx}}{C + U} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 24$$

ε ist hierbei nach der oben citirten Gleichung I № 4 zu entwickeln, wobei 2ξ an die Stelle tritt von φ_1; $2\xi'$ für φ_2; $2\xi''$ für φ_3 u. s. w., so dass

$$25. \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots \varepsilon = \frac{2\xi'}{(2\xi)^2} - \frac{a_2}{(2\xi)^4} + \frac{a_3}{(2\xi)^6} - \ldots \pm \frac{a_\nu}{(2\xi)^{2\nu}}$$

wobei:

$$a_2 = 1.3.(2\xi')^2 - (2\xi)(2\xi''); \; a_3 = 1.3.5.(2\xi')^3 - 10(2\xi)(2\xi')(2\xi'') + (2\xi)^2.2\xi'''$$

u. s. w. nach I № 3. Bezeichnet man aber $\frac{f'(x)}{2(fx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{f_1}{2f^{\frac{1}{2}}}$ mit u und $\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{f_1}{2f^{\frac{1}{2}}}\right)$ mit u_m, und eben so $\frac{d^m}{dx^m} f(x)$ mit f_m, und weil:

$$\xi = \sqrt{f(x) - \frac{f(x)'}{2f(x)^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{f - u},$$

so kommt:

$$26. \ldots\ldots\ldots \xi' = \frac{w_1}{2.\xi}; \; \xi'' = \frac{w_2}{2^2.\xi^3}; \; \xi''' = \frac{w_3}{2^3.\xi^5} \ldots\ldots \xi^{(\nu)} = \frac{w_\nu}{2^\nu.\xi^{2\nu-1}}$$

wobei:

$$27. \ldots \begin{cases} w_1 = f_1 - u_1; \; w_2 = 2(f-u).w'_1 - w_1 w_1 = 2(f-u).(f_2 - u_2) - (f_1 - u_1)^2 \\ w_3 = 2(f-u).w'_2 - 3.w_2.w_1 = 4(f-u)^2(f_3 - u_3) - 6(f-u)(f_1 - u_1)(f_2 - u_2) + \\ \qquad + 3(f_1 - u_1)^3 \\ w_4 = 2(f-u).w'_3 - 5.w_3.w_1; \ldots w_{\nu+1} = 2(f-u)w'_\nu - (2\nu-1).w_\nu.w_1 \ldots \end{cases}$$

Für die u hat man nun in gleicher Weise:

$$28. \ldots\ldots \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2^2.f^{\frac{3}{2}}}(2ff_2 - f_1 f_1) = \frac{v_1}{2^2.f^{\frac{3}{2}}} \\ u_2 = \frac{1}{2^3.f^{\frac{5}{2}}}(2.f\,v'_1 - 3.f_1.v_1) = \frac{v_2}{2^3.f^{\frac{5}{2}}} \\ u_3 = \frac{1}{2^4.f^{\frac{7}{2}}}(2.f.v'_2 - 5.f_1.v_2) = \frac{v_3}{2^4.f^{\frac{7}{2}}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_\nu = \frac{1}{2^{\nu+1}.f^{\frac{2\nu+1}{2}}}(2.f.v'_{\nu-1} - (2\nu-1)f_1.v_{\nu-1}) = \frac{v_\nu}{2^{\nu+1}.f^{\frac{2\nu+1}{2}}} \end{cases}$$

wobei also:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 2.ff_2 - f_1 f_1;\ v_2 = 1.3.f_1^3 - 6.ff_1 f_2 + 4.f^2 f_3 \\ v_3 &= -1.3.5.f_1^4 + 36.ff_1^2 f_2 - 16.f^2 f_1 f_3 + 8.f^3 f_4 - 16.f^2 f_1 f_3 \\ v_4 &= 1.3.5.7.f_1^5 - 300.ff_1^3 f_2 + 120.f^2 f_1^2 f_3 + 180.f^2 f_2 f_1^2 - 40.f^3 f_1 f_4 - 80.f^3 f_2 f_3 + \\ &\quad + 16.f^4 f_5 \end{aligned}\right\} 29$$

.....

Sowol hieraus, als aus den allgemeinen Recursionsgleichungen unter № 27 und № 28 erkennt man, dass allgemein:

$v_\nu = w_{\nu+1}$, wenn man in v_ν die $f, f_1, f_2, f_3 \ldots f_m$ durch $f-u, f_1-u_1, f_2-u_2 \ldots f_m-u_m$ . . 30

ersetzt. Substituirt man aus № 26 die $\xi', \xi'', \xi''' \ldots \xi^\nu$ in die Ausdrücke für $a_1, a_2, a_3 \ldots a_\nu$, so geht die Reihe (25) für ε über in:

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{w}_1}{2^2.\xi^3} - \frac{\mathfrak{w}_2}{2^4.\xi^6} + \frac{\mathfrak{w}_3}{2^6.\xi^9} - \ldots . \pm \frac{\mathfrak{w}_\nu}{2^{2\nu}.\xi^{3\nu}} \ldots\ldots\ldots\ldots 31$$

worin:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{w}_1 &= w_1;\ \mathfrak{w}_2 = 1.3.w_1^2 - w_2;\ \mathfrak{w}_3 = 1.3.5.w_1^3 - 10.w_1 w_2 + w_3 \\ \mathfrak{w}_4 &= 1.3.5.7.w_1^4 - 105.w_1^2 w_2 + 15.w_1 w_3 + w_2^2 - w_4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 32$$

Vergleicht man diese Formen mit denen für (a_ν) I № 3, so ersieht man leicht, dass a_ν in $\mathfrak{w}_\nu$ übergeht, wenn man φ_1 durch 1, φ_2 durch w_1, φ_3 durch $w_2 \ldots \varphi_m$ durch w_{m-1} ersetzt. Ganz eben so erhält man für das Integral:

$$\int e^{2\int \xi dx}.dx = \frac{e^{2\int \xi dx}}{2\xi}(1+\delta)$$

für das zugehörige δ

$$\delta = \frac{\mathfrak{w}_1}{2^2.\xi^3} + \frac{\mathfrak{w}_2}{2^4.\xi^6} + \frac{\mathfrak{w}_3}{2^6.\xi^9} + \ldots . + \frac{\mathfrak{w}_\nu}{2^{2\nu}.\xi^{3\nu}} \ldots\ldots\ldots\ldots 31a$$

Ausserdem finden noch folgende Formen Anwendung:

$$X = \frac{1}{2}\left(\frac{f_1}{f_1^{\frac{1}{2}}} - \frac{f_1 - u_1}{\xi}\right);\ X' = \frac{1}{4}\left(\frac{2ff_2 - f_1^2}{f_1^3} - \frac{2(f-u)(f_2-u_2) - (f_1-u_1)^2}{\xi^3}\right)$$

$$\text{und } \frac{X'}{2\xi} = \frac{1}{8}.\left\{\frac{2ff_2 - f_1^2}{\xi.f_1^3} - \frac{2(f-u).(f_2-u_2) - (f_1-u_1)^2}{(f-u)^2}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots 33$$

weil $\xi^2 = (f-u)$.

Für das in № 24 mit U bezeichnete Integral hat man auch:

$$U = \int e^{2\int(\xi + \mathfrak{x})dx + lX} . dx$$

Setzt man daher $2\int(\xi + \mathfrak{x})dx + lX = \varphi$, so tritt nach I № 29 $2(\xi + \mathfrak{x}) + \frac{X'}{X}$ an die Stelle von φ_1 u. s. w.

Man kann daher nach I № 1 setzen:

$$\left(\mathfrak{x} = \frac{(1-\varepsilon).X}{2\xi}\right)$$

$$34. \ldots\ldots\ldots\ldots U = \int e^{2\int(\xi + \mathfrak{x})dx} . X . dx = \frac{e^{2\int(\xi + \mathfrak{x})dx} . X . (1 + \delta_1)}{2\xi . \left(1 + \frac{X'}{2\xi . X} + (1-\varepsilon)\frac{X}{4\xi^2}\right)}$$

Bezeichnet man den ganzen Complex:

$$\frac{X'}{2\xi . X} + (1-\varepsilon) \cdot \frac{X}{4\xi^2}$$

mit λ, so ergibt sich, weil $X < 1$ (d. h. selbstverständlich, da X_1 und ξ complex sind, dass der Modulus von X ein ächter, positiver oder negativer Bruch sein muss) auch $\lambda < 1$ und:

$$34a. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots U = \frac{e^{2\int(\xi + \mathfrak{x}).dx} . X . (1 + \delta_1)}{2\xi . (1 + \lambda)}$$

δ_1 folgt aus δ, wenn man daselbst in $\varphi_1\ \varphi_2 \ldots \xi$ durch $\xi + \mathfrak{x} + \frac{1}{2}\frac{X'}{X}$ ersetzt.

Aus № 24 folgt nun weiter:

$$u + \gamma - \gamma_x = \frac{2\xi . e^{2\int(\xi - \mathfrak{x})dx} - (1-\varepsilon)(C+U)}{2\xi . e^{2\int \xi dx}(C+U)}; \quad \gamma_x = \frac{e^{-2\int \xi dx}(1-\varepsilon)}{2\xi}$$

Da nun gefunden war:

$$R = \frac{X . \gamma_x^2}{(u + \gamma - \gamma_x)^2},$$

so kommt:

$$R = \frac{X . (1-\varepsilon)^2 . (C+U)^2}{\left(2\xi . e^{2\int(\xi + \mathfrak{x})dx} - (1-\varepsilon)(C+U)^2\right)^2} = X : \left(\frac{2\xi . e^{2\int(\xi + \mathfrak{x})dx}}{(1-\varepsilon) . (C+U)} - 1\right)^2$$

Bezeichnet man $e^{2\int(\xi + \mathfrak{x})dx}$ mit J, so dass $U = \frac{J . X}{2\xi} . \left(\frac{1 + \delta_1}{1 + \lambda}\right)$, so kommt:

$$R = X : \left(\frac{2\xi \,.\, J}{(1-\varepsilon)\,(C + \frac{JX}{2\xi} \cdot \frac{(1+\delta_1)}{(1+\lambda)}} - 1 \right)^2$$

$$\text{d. h. } R = X : \left(\frac{4\xi^2}{X \,.\left((1-\varepsilon)\left[\frac{2C\xi}{J.X} + \frac{1+\delta_1}{1+\lambda}\right]\right)} - 1 \right)^2 .$$

Bezeichnet man $\frac{(1-\varepsilon)\,(1+\delta_1)}{1+\lambda}$ mit e, $\frac{(1-\varepsilon).2C.\xi}{J.X}$ mit q, so folgt:

$$R = \frac{X^3 . (e+q)^2}{(4\xi^2 - X \,.(e+q))^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 35$$

Führt man die oben für $u + \gamma$, γ_x gefundenen Ausdrücke in die Gleichung № 20 ein, so erhält man nach Division durch $J = e^{2\int(\xi + \mathfrak{x})dx}$:

$$\eta = \xi + \frac{X \,.\, \frac{1+\delta_1}{1+\lambda} + 2\xi \,.\, \frac{C}{J}}{2\xi - (1-\varepsilon) \,.\left(\frac{X.(1+\delta_1}{(1+\lambda)\,.2\xi} + \frac{C}{J}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 36$$

wobei $\frac{1+\delta_1}{1+\lambda} = \rho$ gesetzt werden soll.

Um die Constante zu bestimmen, sei $\eta - \xi = \Delta$. Bezeichnet man die verschiedenen Ausdrücke: η, ξ, Δ, J, X, ε und ρ, wenn man in ihnen die Anfangswerthe von x und η setzt, bezüglich mit η_0, ξ_0, Δ_0, J_0, X_0, ε_0 und ρ_0, so findet sich aus № 36:

$$C = J_0 \cdot \frac{\Delta_0 \left(2\xi_0 - \frac{(1-\varepsilon_0)\,X_0\,\rho_0)}{2\xi_0}\right) - X_0\,\rho_0}{2\xi_0 - (1-\varepsilon_0)\,\Delta_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 37$$

Sowol in R (№ 35) als auch in η (№ 36) kommt C nur in der Verbindung $\frac{C}{J}$ vor. Da nun $\frac{J_0}{J} = e^{-2\int_{x_0}^{x}(\xi + \mathfrak{x})dx}$, so wird:

$$\frac{C}{J} = e^{-2\int_{x_0}^{x}(\xi + \mathfrak{x}).dx} \cdot \left(\frac{\Delta_0 \left(2\xi_0 - \frac{(1-\varepsilon_0)\,X_0\,\rho_0}{2\xi_0}\right) - X_0\,\rho_0}{2\xi_0 - (1-\varepsilon_0)\,\Delta_0} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 37a$$

Hieraus erkennt man, dass für einigermaassen beträchtliche Werthe von $2\int_{x_0}^{x}(\xi + \mathfrak{x})dx$ der vorstehende Ausdruck $\left(\frac{C}{J}\right)$, wenn nicht ξ_0 und Δ_0 exorbitante Beträge erhalten, nur einen sehr geringen numerischen Werth haben kann, und auch dann nicht erheblich, wenn im Nenner $\frac{C}{J.X}$ noch der Faktor X hinzutritt. Demnach sind sowol η als auch R von C fast unabhängig. Die Hauptmasse des numerischen Betrags von R liegt mithin offenbar in dem Ausdruck $\frac{X^3}{16\,.\,\xi^4}$, welche Form, da es sich bei dem Rest nur um eine Gränze handeln kann, fernerhin für denselben in Anwendung kommen soll; d. h. also:

35a..... $R = \frac{X^3}{16 \cdot \xi^4}$

Wenn man in № 36 $C = 0$ setzt, so kann man den Ausdruck:

36a..... $\eta = \xi + \frac{X.\rho}{2\xi - (1-\varepsilon).\frac{X\rho}{2\xi}}$

für ein sehr genähertes particuläres Integral der Gleichung:

$$\frac{d\eta}{dx} + \eta^2 = f(x)$$

ansehen, welches man nach II № 11 zur Darstellung des allgemeinen Integrals verwenden kann.

Wollte man in der eingeschlagenen Richtung weiter gehen, so hätte man in der Gleichung № 24, nämlich:

$$u + \gamma = \frac{e^{2\int \gamma dx}}{C + \int e^{2\int(\xi+\gamma)dx}.X.dx}$$

statt C eine noch zu bestimmende Funktion von x, etwa u_1 zu setzen und sodann $u + \gamma$, $(u + \gamma)'$ in die Gleichung:

$$\frac{e^{-2\int \xi dx}(u+\gamma)' - 2.(u+\gamma).\gamma_x.X + (u+\gamma)^2.X + \gamma_x{}^2.X}{(u+\gamma-\gamma_x)^2} = 0$$

zu substituiren und dann durch Annullirung der ersten 3 Glieder im Zähler u_1 zu bestimmen. Daraus würde man endlich den Rest dritter Ordnung:

$$\frac{\gamma_x{}^2.X}{(u+\gamma-\gamma_x)^2} \cdot \frac{U^2}{(u_1+U)^2} = R_2$$

finden. Die Aufgabe lässt sich vollständig durchführen: indess die gewonnenen Formen sind äusserst complicirt. Nur wenn man die neu eingehende Integrationsconstante annullirt, d. h. wenn man sich auf ein particuläres Integral beschränkt, werden die Gleichungen traktabel. Für den Rest dritter Ordnung findet man nahezu $\frac{X^7}{256 \cdot \xi^8}$. Indessen: die Mühe lohnt sich nicht, da die Annäherung zweiter Ordnung wol in den allermeisten Fällen völlig ausreichend sein dürfte. — Nur ist noch hervorzuheben, dass das Resultat für η bei fortschreitender Annäherung durch die Methode der Variation der Constante die Form eines unendlichen, absteigenden Kettenbruchs annimmt, von welchem jedoch nur die ersten Glieder zur Verwendung kommen.

Endlich ist noch anzuführen, dass wenn die Covariante der Gleichung

$$\chi_0 \cdot \frac{d^2\eta}{dx^2} + 2\chi_1 \cdot \frac{d\eta}{dx} + \chi_2 \cdot \eta = 0$$

nämlich:

$$C_x = \left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)' + \left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right) - \frac{\chi_2}{\chi_0}$$

die Eigenschaft hat, dass der numerische Betrag von $\frac{\chi_2}{\chi_0}$ für ein ausreichendes Werthsystem von x kleiner ausfällt als die Einheit $\left(\frac{\chi_2}{\chi_0} < 1\right)$, positiv oder negativ; dann kann man $\left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)$ als ein genähertes particuläres Integral ansehen und ganz nach der im Anfang von II befolgten Methode verfahren. (Für complexe Formen muss natürlich der Modulus von $\frac{\chi_2}{\chi_0}$ kleiner werden als 1.) Man hat dabei den grossen Vortheil, dass in vielen Fällen die irrationalen Formen vermieden werden.

Wenn die beiden Gleichungen:

$$\chi_0 \cdot \frac{d^2\eta}{dx^2} + 2\chi_1 \cdot \frac{d\eta}{dx} + \chi_2 \eta = 0$$

und

$$\frac{dv}{dx} + v^2 = \left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)' + \left(\frac{\chi_1}{\chi_0}\right)^2 - \frac{\chi_2}{\chi_0}$$

zugleich bestehen, so ist noch η durch v darzustellen. Dies kann geschehen: entweder dadurch, dass man den Ausdruck:

$$e^{-\int \frac{\chi_1}{\chi_0} dx} \cdot e^{\int v dx}$$

als ein particuläres Integral der ersten ansieht, und dann nach bekannter Vorschrift das zweite dazu sucht; — oder aber auch direkt, dass man in der ersten Gleichung $\eta = \frac{\psi}{\pi}$ setzt (ψ und π noch zu bestimmende Funktionen von x), und in der resultirenden Gleichung diejenigen Glieder, welche die erste und zweite Ableitung von ψ enthalten, gleich Null setzt. Daraus findet sich dann ψ, und aus dem Rest der ersten Gleichung auch π, beide als Funktionen von v. Man erhält schliesslich:

$$\eta = e^{-\int \frac{\chi_1}{\chi_0} dx} \left(k \cdot e^{\int v dx} + k_1 \cdot e^{\int v dx} \cdot \int e^{-2\int v dx} \cdot dx\right) \ldots\ldots\ldots\ldots 38$$

Nach I № 4 kann man aber setzen:

$$\int e^{-2\int v dx} \cdot dx = \int_0^\infty - \int_x^\infty = \int_0^\infty - \frac{e^{-2\int \xi \cdot dx}(1-\varepsilon)}{2\xi}$$

wobei:

$$\varepsilon = \frac{v'}{2v^2} - \frac{a_2}{2^2 . v^4} + \frac{a_3}{2^3 . v^6} \ldots\ldots \pm \frac{a_\nu}{2^\nu . v^{2\nu}}$$

Vereinigt man in № 38 das Produkt $k_1 \cdot \int_0^\infty$ mit der Constante k, so nimmt dieselbe Gleichung folgende Form an:

$$39 \ldots\ldots\ldots\ldots \eta = e^{-\int \frac{\chi_1}{\chi_0} dx} \left(C \cdot e^{\int v dx} + C_1 \cdot \frac{e^{-\int v dx}}{2v} (1 - \varepsilon) \right)$$

deren Analogie mit bekannten Formen in die Augen springt. v ist in dieser Gleichung nach II № 36a für $C = 0$:

$$36b \ldots\ldots\ldots v = \xi + \frac{X \cdot \frac{1 + \delta_1}{1 + \lambda}}{2\xi - (1 - \varepsilon) \cdot \frac{X \cdot (1 + \delta_1)}{2\xi \cdot (1 + \lambda)}}; \quad \xi = \sqrt{f - u}; \quad u = \frac{f_1}{2 f^{\frac{1}{2}}}$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f_1}{f^{\frac{1}{2}}} - \frac{f_1 - u_1}{\xi} \right)$$

X ist ein positiver oder negativer ächter Bruch und in der Regel sehr klein. Dies ergibt sich entweder aus der vorstehenden Form, wobei X die halbe Differenz ist zweier sehr naheliegenden Ausdrücke von derselben Grössenordnung, oder aber auch aus II № 19:

$$40 \ldots . X = \frac{1}{2^2} \left(\frac{f f_2 - f_1 f_1}{f^2} \right) + \frac{1}{2^6} \frac{f_1 (4 f f_2 - 5 f_1 f_1)}{f^{\frac{7}{2}}} + \frac{1}{2^8} \frac{f_1^2 (6 f f_2 - 8 f_1 f_1}{f^5} + \frac{5 f_1^3 (8 f f_2 - 11 f_1 f_1)}{2^{12} . f^{\frac{13}{2}}}$$

$$+ \frac{7 f_1^4 (10 f f_2 - 14 f_1 f_1)}{2^{14}} \frac{}{f^8} + \frac{9 f_1^5}{2^{18}} \frac{(12 f f_2 - 17 f_1 f_1)}{f^{\frac{19}{2}}} + \ldots + \frac{(2m-3) . f_1^{m-1} (2m f f_2 - (3m-1) f_1 f_1)}{2^{(3m-1)'} . f^{\frac{3m+1}{2}}}$$

(Im letzten Gliede bei $2^{(3m-1)'}$ ist der Exponent $3m-1$ die mit $3m-1$ zusammenfallende gerade, oder wenn $3m-1$ ungerade, die darauf folgende gerade Zahl.) Scheidet man nämlich aus den einzelnen Gliedern der Reihe nach aus: $\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^5} \ldots$, so sind die damit verbundenen Faktoren sämmtlich ächte Brüche; so dass, wenn man dieselben der Reihe nach bezeichnet mit $e_0, e_1, e_2 \ldots e_m, e_{m+1}$, man hat:

$$X = \frac{1}{2^2} \left(e_0 + \frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2^2} + \frac{e_3}{2^3} + \ldots\ldots \right)$$

$$\text{d. h. } X < \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots \right)$$

$$\text{d. h. } < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \text{ d. h. } \frac{1}{2}.$$

Demnach kann der zweite Ausdruck in № 36b betrachtet werden als ein Correktionsglied erster Ordnung zu dem genäherten particulären Integral ξ der Gleichung

$$\frac{dv}{dx} + v^2 = f(x).$$

Bezeichnet man den zweiten Complex in № 36b mit E_x, so ist zur Darstellung von η in № 39 noch das Integral $\int v dx = \int \xi dx + \int E_x . dx$ zu bestimmen. — Für das erste hat man mit Anwendung der Gleichung II № 22 für $\varphi = f - u$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\varphi_1 = f_1 - u_1$, $\varphi_m = f_m - u_m$:

$$\int \xi . dx = \frac{2}{3} \frac{(f-u)^{\frac{3}{2}}}{f_1 - u_1} \cdot \left(1 + \frac{2}{5} \frac{(f-u)\, a_1}{(f_1-u_1)^2} + \frac{2^2}{5.7} \frac{(f-u)^2 a_2}{(f_1-u_1)^4} + \ldots\ldots \frac{2^\nu . (f-u)^\nu a_\nu}{5.7 \ldots (2\nu+3)(f_1-u_1)^{2\nu}}\right) + R_\mu \ldots 41$$

wobei in Beziehung auf die $a_1, a_2 \ldots a_\nu$ das unter II № 32 Erwähnte zu beachten ist. Für das Correktionsglied $\int E_x . dx$ möchte sich, ausser der mechanischen Quadratur, wol kaum eine allgemeine Formel aufstellen lassen.

Es möge das Vorhergehende durch ein Beispiel numerisch erläutert werden. Sei gegeben die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + 2\,(x^2 + 6 + i.(x-5)) \cdot \frac{d\eta}{dx} + (-x^4 + 11x^2 + 10 + i.(2x^3 - 11x^2 + 7x - 59))\,\eta = 0$$

so ist:

$$\chi_0 = 1;\ \chi_1 = x^2 + 6 + i\,(x-5);\ \chi_2 = -x^4 + 11x^2 + 10 + i\,(2x^3 - 11x^2 + 7x - 59)$$

Nun hat man:

$$\chi'_1 + \chi_1^{\,2} = x^4 + 11x^2 + 12x + 11 + i.(2x^3 - 10x^2 + 12x - 59)$$
$$-\chi_2 = x^4 - 11x^2 - 10 + i.(-2x^3 + 11x^2 - 7x + 59)$$

Dadurch erhält man für die Covariante:

$$\chi'_1 + \chi_1^{\,2} - \chi_2 := 2x^4 + 12x + 1 + i\,(x^2 + 5x)$$

Die von der obigen Gleichung abhängige der ersten Ordnung ist also:

$$\frac{dv}{dx} + v^2 = 2x^4 + 12x\ 1 + i.(x^2 + 5x) = f(x).$$

Daher:

$$f_1 = 8x^3 + 12 + i.(2x + 5);\ f_2 = 24x^2 + 2i;\ f_3 = 48x$$
$$f_4 = 48;\ f_5 = f_6 = \ldots = 0.$$

Folglich:

$$\xi_1 = \sqrt{2x^4 + 12x + 1 + i.(x^2 + 5x)};\ \xi = \sqrt{\xi_1^2 - \xi'_1}$$

das heisst:

$$\xi = \sqrt{2x^4 + 12x + 1 + i.(x^2 + 5x) - \frac{8x^3 + 12 + i.(2x + 5)}{2.\xi_1}}.$$

Für $x = 3$ erhält man:

$$f = 199 + 24i;\ f_1 = 228 + 11i;\ f_2 = 216 + 2i;\ f_3 = 144;$$
$$f_4 = 48;\ f_5 = \ldots\ldots 0$$

Bezeichnet man, wie früher $\frac{f_1}{2f_2^1}$ mit u, $\frac{2ff_2 - f_1f_1}{2^2.f_2^3}$ mit u_1, $\frac{1.3.5.f_1^3 - 6ff_1f_2 + 4fff_3}{2^2.f_2^5}$ mit u_2, so dass:

$$\xi = (f - u)^{\frac{1}{2}};\ X = \frac{1}{2}\left(\frac{f_1}{f_2^1} - \frac{f_1 - u_1}{\xi}\right);\ \frac{X'}{2\xi} = \frac{1}{8}\left(\frac{2ff_2 - f_1f_1}{\xi.f_2^3} - \frac{2(f-u)(f_2-u_2) - (f_1-u_1)^2}{(f-u)^2}\right)$$

und bringt man sämmtliche complexe Grössen auf die canonische Form, so erhält man zunächst:

$$u = r\,(\cos 0°40'34'' - i \sin 0°40'34') = 8{,}06092 - i.0{,}0949912);\ \lg r = 0{,}9064153;$$

$$u_1 = \frac{34009 + i.231447}{4.(199 + i.24)^{\frac{3}{2}}} = r_1\,(\cos 1°57'27''{,}5 + i \sin 1°57'27''{,}5) = 3{,}04184 + i.0{,}103970$$
$$\lg r_1 = 0{,}4833601 = \lg 3{,}0434080$$

$$u_2 = r_2\,(\cos 9°23'11{,}5' + i \sin 9°23'11{,}5'') = 4{,}599905 + i.0{,}853134$$
$$\lg r_2 = 0{,}7186033.$$

Dadurch:

$$f - u = 190{,}9308 + i.24{,}09499912 = 192{,}4546\,(\cos 7°11'32'' + i \sin 7°11'32'')$$
$$f_1 - u_1 = \varrho_1\,(\cos 2°46'21'' + i \sin 2°46'21'') = 224{,}95816 + i.10{,}89603$$
$$\lg \varrho_1 = 2{,}352730$$

$$f_2 - u_2 = 211400095 + i.1{,}146866 = \varrho_2\,(\cos 0°18'39'' + i.\sin 0°18'39'')$$
$$\lg \varrho_2 = 2{,}3251099.$$

Mit diesen Voraussetzungen findet sich:

$$\xi = \rho\,(\cos 3°35'46'' + i \sin 3°35'46'') = 13{,}845482 + i.0{,}8701408$$

$$\rho = 13{,}8728;\ \lg \rho = 1{,}1421625$$

$$X = -\rho_1\,(\cos 24°50'10'' - i \sin 24°50'10'') = -(0{,}04587 - i\,0{,}021230)$$

$$\lg \rho_1 = 0{,}6623186 - 2$$

$$\frac{X'}{2\xi} = +0{,}006123 + i.0{,}003752 = \rho_2\,(\cos 31°29'55''{,}6 + i \sin 31°29'55''{,}6)$$

$$\lg \rho_2 = 0{,}8561928 - 3.$$

$$\frac{X'}{2\xi.X} = -\rho_3\,(\cos 56°20'5''{,}6 - i \sin 56°20'5''{,}6) = -(0{,}027395 - i.0{,}041128)$$

$$\lg \rho_3 = 0{,}6938742 - 2.$$

$$\frac{X}{4\xi^2} = -\rho_4\,(\cos 32°1'42'' - i \sin 32°1'42'') = -0{,}000050605 - i.0{,}000031662)$$

$$\lg \rho_4 = 0{,}7759336 - 5.$$

Das letzte Glied mit $(1 - \varepsilon)$ multiplicirt und zu dem vorhergehenden addirt, geben λ.... Man findet somit $\lambda < -(0{,}027445 - i.0{,}041160)$. Für das erste Glied der endlichen Reihen für δ_1 und ε, nämlich:

$\frac{f_1 - u_1}{2^2.\xi^3}$ findet sich: $= 0{,}021089\,(\cos 7°58'55'' - i \sin 7°58'55'')$.

Nun ist in Wirklichkeit δ_1 nur sehr wenig grösser, ε bezüglich kleiner als dies erste Glied. Demnach der Ausdruck: $\frac{(1-\varepsilon)(1+\delta_1)}{1+\lambda}$ nur sehr wenig von der Einheit verschieden. Endlich findet sich mit den obigen Zahlenwerthen für die numerische Hauptmasse des Restes $\frac{X^3}{16.\xi^4} = R$ jetzt:

$$R = -\frac{(0{,}04587 - i.0{,}021280)^3}{16\,(13{,}845482 + i.0{,}8701408)^4} = -(0{,}000000000011731 - i.0{,}00000000016333).$$

Zusätze und Berichtigungen.

Ad № 15 Seite 8. Aus der allgemeinen Recursionsgleichung $a_{\nu+1} = (2\nu+1).\varphi_2.a_\nu - \varphi_1.a_\nu'$, ergibt sich wenn man diejenigen Glieder sammelt, welche $q_1{}^m$ zum Faktor haben:

$$g_m{}^{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+1} \cdot \Big((2\nu - m + 1)\, g^\nu{}_m + (\nu - m + 1)\, g^\nu{}_{m-1}\, q_3 + (g^\nu{}_{m-1})' \Big).$$

Ad № 22 Seite 13. Die Glieder der Reihe 22 nehmen ab, so lange der jedesmal hinzutretende Faktor:

$\frac{\varphi.(2\nu+1).\varphi_2}{(\mu+\nu+2)\,\varphi_1{}^2} < 1$ bleibt. Dies giebt $\nu = \frac{(\mu+2)\,\varphi_1{}^2 - \varphi\varphi_2}{2\varphi\varphi_2 - \varphi_1{}^2}$.

Seite 3, Zeile 19 von oben statt $\alpha_{\mu+1,\ \mu+2} =$ lies $\alpha_{\mu+1,\ \mu+3} =$

» » » 20 » » Gruppe links: statt $\alpha_{\mu\mu+1}$ lies $\alpha_{\mu\mu-1}$

» 7 » 6 » » statt $\beta_{76} = \frac{3.5}{3.9.13}$ lies: $\beta_{76} = \frac{8.5}{3.9.13}$

» 8 » 6 » » » q_8 lies q_7

» 9 von Zeile 12 ab, 14 mal ζ statt 3

» 10 von Zeile 1 bis 5, fünf mal ζ statt 3

» 10 Zeile 14 von oben statt $\frac{a_1}{\varphi_1{}^4}$ lies $\frac{a_1}{\varphi_1{}^2}$

» 11 » 10 » » » $\frac{a_3}{\varphi_1{}^4}$ » $\frac{a_2}{\varphi_1{}^4}$

» 14 » 2 » unten » $-\frac{a_1}{\varphi_2{}^4}$ lies $-\frac{a_2}{\varphi_1{}^4}$

» 19 » 4 » » » $\Delta_5 = \varphi^6 \ldots.$ lies $\Delta_5 = \varphi^5 \ldots.$

» 24 » 15 » oben » $\eta = e^\theta \eta$ lies $\eta = e^\theta y$

» » » 17 statt $\frac{d^2\eta}{dx^2}; \frac{d\eta}{dx}; \eta$ lies $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}\, y$

» 29 » 6 von unten fehlt im Nenner der Faktor $e^{2\int \xi dx}$.

Ueber die aus einer Curve $y = f(x)$ abgeleiteten Curven $y_1 = x \frac{dy}{dx} = x f'(x)$ (Tangentencurve) und $y_2 = -x \frac{dx}{dy} = -\frac{x}{f'(x)}$ (Normalcurve), mit specieller Anwendung auf die Parabel.

Inaugural-Dissertation

eingereicht

zur Erlangung der Doctorwürde

bei

der philosophischen Fakultät zu Marburg

von

Ludwig Henkel

aus Cassel.

Marburg.

Druck von Joh. Aug. Koch.

1882.

§ 1.

Gegeben sei die Gleichung einer auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Curve

$$y = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Leitet man aus derselben die Gleichungen

$$y_1 = x \frac{dy}{dx} = x f'(x) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

und

$$y_2 = -x \frac{dx}{dy} = -\frac{x}{f'(x)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

ab, so stellen dieselben zwei neue Curven dar von folgender Eigenschaft:

1) Der Leitstrahl vom Ursprung nach einem Punkte (x, y_1) der Curve (2) ist parallel der Tangente in dem entsprechenden Punkte (x, y) der ursprünglichen Curve.

2) Der Leitstrahl vom Ursprung nach dem Punkte (x, y_2) der Curve (3) ist parallel der Normale im Punkte (x, y) der ursprünglichen Curve.

Die Curve (2) soll die Tangentencurve, (3) die Normalcurve der Hauptcurve (1) genannt werden.

Um zu einem Punkte der Hauptcurve den entsprechenden Punkt der Tangentencurve resp. Normalcurve zu construieren, braucht man also nur eine Parallele zu der Tangente, resp. der Normale in dem gegebenen Punkt durch den Ursprung zu legen. Der Durchschnitt dieser Parallele mit der Ordinate des gegebenen Punkts oder deren Verlängerung ist der gesuchte Punkt. (s. Fig. 1.)

Man sieht sofort, dass die Leitstrahlen nach entsprech den Punkten der Tangentencurve und Normalcurve auf e ander senkrecht stehen.

§ 2.

1) Die Abscissen der Schnittpunkte zwischen der Hau curve und der Tangentencurve bestimmen sich aus d Gleichung

$$f(x) - x\,f'(x) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

2) Allgemein wird die Differentialgleichung

$$f(x) - x\,f'(x) = 0$$

nur erfüllt für $y = Cx$, d. h. für alle durch den Urspru gehenden Geraden; es existiert also keine krumme Linie, mit ihrer Tangentencurve zusammenfiele.

3) Die Abscissen der Schnittpunkte der Hauptcur und Normalcurve sind gegeben durch die Gl.

$$x + f(x)\,f'(x) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

4) Die Gleichung (5) wird allgemein erfüllt für $x^2 +$ $= 2\,C$; d. h. der auf seinen Mittelpunkt als Urspru bezogene Kreis ist die einzige Curve, die mit ihrer Norm curve zusammenfällt.

5) Die Gleichung

$$x\,(1 + [f'(x)]^2) = 0 \ldots\ldots \quad (6)$$

liefert die Abscissen der Schnittpunkte zwischen der Ta gentencurve und Normalcurve.

6) Allgemein erfüllt wird (6) für keinen reellen We von x; es kann also nie die Tangentencurve mit der Norm curve zusammenfallen.

§ 3.

Für den Flächeninhalt der Tangentencurve hat m den Ausdruck

$$\int_a^b y_1\,dx = b\,f(b) - a\,f(a) - \int_a^b f(x)\,dx \quad \ldots \quad (7)$$

oder

$$\int_a^b y\,dx + \int_a^b y_1\,dx = b\,f(b) - a\,f(a) \quad \ldots \quad (8)$$

§ 4.

Verschiebt man die Hauptcurve parallel mit sich selbst ängs der Y-Axe um das Stück β, so ist ihre Gleichung jetzt

$$y = f(x) + \beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Hieraus folgt als Gleichung

der Tangentencurve $y_1 = x f'(x)$

der Normalcurve $y_2 = -\frac{x}{f'(x)}$

D. h.: Die Lage und Gestalt der abgeleiteten Curven vird durch eine Verschiebung der Hauptcurve längs der Y-Axe nicht geändert; oder mit andern Worten: Die Curven 2) und (3) sind nicht blos die Tangentencurve und Normal- urve der Curve $y = f(x)$, sondern einer jeden Curve der lurch (9), wenn β veränderlich gedacht wird, repräsentierten Schaar.

2) Verschiebt man die Hauptcurve parallel mit sich elbst längs der X-Axe um das Stück α, so ist die Gleichung

der Hauptcurve $y = f(x - \alpha) \quad \ldots \quad (10)$

der Tangentencurve $y_1 = x f'(x - \alpha) \quad \ldots \quad (11)$

der Normalcurve $y_2 = -\frac{x}{f'(x - \alpha)} \quad \ldots \quad (12)$

Durch eine Verschiebung der Hauptcurve längs der Z-Axe wird also im Allgemeinen die Lage und Gestalt der bgeleiteten Curven geändert.

3) Durch eine Drehung der Hauptcurve wird ebenfalls ie Natur der abgeleiteten Curven geändert, wie sich leicht achweisen lässt.

§ 5.

Die Orthogonaltrajectorien der durch die Gleichung

$$y = f(x) + B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

o B eine willkürliche Constante bedeutet, ausgedrückten urvenschaar, sind bestimmt durch die Differentialgleichung

$$dy = -\frac{dx}{f'(x)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

orin $f'(x)$ als eine bestimmte Function von x anzusehen ist.

Die Intregation von (14) ergiebt

$$y = -\int \frac{dx}{f'(x)} = \varphi(x) + C \quad \ldots \quad (15)$$

Multipliciert man in (14) auf beiden Seiten mit x, s kommt

$$x f'(x) = -x \frac{dx}{dy} \quad \ldots \quad (16)$$

und

$$-\frac{x}{f'(x)} = x \frac{dy}{dx} \quad \ldots \quad (17)$$

Die Gleichungen (16) und (17) besagen:

Die Tangentencurve der Curvenschaar (13) ist zugleic die Normalcurve der Trajectorienschaar (15), die Normal curve von (13) ist die Tangentencurve von (15).

Wie wir die Curven (2) und (3) die Tangentencurv und Normalcurve der Curve $y = f(x)$ genannt haben, ob wohl dieselben eigentlich der ganzen Schaar $y = f(x) + 1$ zugehören, so wollen wir auch die Schaar (15) nur durc diejenige Curve vertreten lassen, für welche die willkürlich Constante $C = 0$ ist.

Wir berücksichtigen also von allen Curven der System (13) und (15) nur $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$. Dieselbe haben nach dem Vorhergehenden die Eigenschaft, dass di Tangentencurve der einen die Normalcurve de andern ist. Wir wollen $y = \varphi(x)$ die der Curve $y = f(x$ conjugierte Curve nennen.

Eine Verschiebung der Hauptcurve längs der X-Ax führt eine Verschiebung der conjugierten Curve um dasselb Stück herbei; durch eine Drehung der Hauptcurve aber wir die Natur der conjugierten Curve im Allgemeinen geändert

)ie Tangentencurve und Normalcurve der Parabel.

§ 6.

Gleichung und Gestalt der Tangentencurve

Die Gl der auf ihre Axe als X-Axe und einen beliebigen 'unkt in derselben als Ursprung eines rechtwinkligen Coordi-atensystems bezogenen Parabel ist:

$$y = \pm \sqrt{2p\,(x - \alpha)} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

'o α die Entfernung des Scheitels vom Ursprung bedeutet)er Parameter $2p$ soll für alle unsere Untersuchungen als ositiv vorausgesetzt werden.

Man erhält als Gleichung der Tangentencurve

$$y = \frac{p\,x}{\pm \sqrt{2p\,(x - \alpha)}} \quad \ldots\ldots \quad (2a)$$

ler

$$y^2\,(x - \alpha) - \frac{p}{2}\,x^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2b)$$

Aus der Gleichung geht sofort hervor, dass die Curve 'mmetrisch zur X-Axe liegt. Für die weitere Discussion nterscheiden wir zwei Fälle:

A. α von Null verschieden.

Man findet dann:

1) y ist reell für alle Werthe von x zwischen $+\alpha$ nd $+\infty$.

2) Für $x = 0$ ist $y = 0$.

3) y ist $= \infty$ für $x = \infty$ und $x = \alpha$.

Die Grade $x = \alpha$, d h. die Scheiteltangente der Parabel , wie später genauer nachgewiesen werden wird, eine symptote der Tangentencurve

4) Für $x < +\alpha$ ist y imaginär, ausgenommen den all $x = 0$, wenn α positiv ist.

5) Aus (26) erhält man durch partielle Differentiation, enn

$$f = y^2\,(x - \alpha) - \frac{p}{2}\,x^2 = 0$$

setzt wird

$$\frac{df}{dx} = y^2 - p\,x; \quad \frac{df}{dy} = 2y\,(x - \alpha).$$

Für

$$x = 0,\ y = 0 \text{ ist } \frac{df}{dx} = 0,\ \frac{df}{dy} = 0;$$

der totale Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ erscheint also in diesem Falle unter unbestimmter Form. Durch nochmalige Differentiation im Zähler und Nenner findet man

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \left\{\frac{-\frac{d^2f}{dx\,dy} \pm \sqrt{\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2 \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{dy^2}}}{\frac{d^2f}{dy^2}}\right\}_{x=0}$$

$$= \left\{\frac{-2y \pm \sqrt{4y^2 + 2p\,(x-\alpha)}}{2\,(x-\alpha)}\right\}_{x=0}$$

$$= \mp\sqrt{\frac{p}{-2\alpha}}$$

$\frac{dy}{dx}$ hat also, wenn $x = 0$ ist, zwei imaginäre oder reelle Werthe, je nachdem $\alpha >$ oder < 0 ist.

Der Ursprung ist daher ein isolierter Punkt, wenn α positiv, ein Doppelpunkt, wenn α negativ ist.

6) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 - px}{2y\,(x-\alpha)} = \frac{p}{2}\,\frac{x - 2\alpha}{\pm\sqrt{2p\,(x-\alpha)}}$$

verschwindet für $x = 2\alpha$

Ist α positiv, so hat die Curve die Culminationspunkte

$$x = 2a;\ y = \pm\sqrt{2p\alpha}.$$

Ist α negativ, so hat y für $x = 2\alpha$ keinen reellen Werth, die Curve hat also keine Culminationspunkte

7) Der 2 Differentialquotient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{4}\,\frac{x - 4\alpha}{\pm\sqrt{2p\,(x-\alpha)^5}}$$

verschwindet für $x = 4\alpha$.

Die Curve hat reelle Wendepunkte, so lange α positiv ist. Die Coordinaten derselben sind:

$$x = 4\alpha;\ y = \pm\sqrt{\frac{8}{3}\,p\alpha}$$

8) Ist α positiv, so besteht die Curve, abgesehen von dem isolierten Punkte, aus zwei getrennten Aesten, welche durch die Gleichung

$$y = \frac{px}{+\sqrt{2p\,(x-\alpha)}}\,.\,(a) \text{ und } y = \frac{px}{-\sqrt{2p\,(x-\alpha)}}\,.\,(b)$$

dargestellt sind Den isolierten Punkt drücken beide Gleichungen gemeinsam aus

Die Curve ist von $x = \alpha$ bis $x = 4\alpha$ convex, von da an concav gegen die X-Axe gekrümmt.

9) Ist α negativ, so entsprechen den Gleichungen (a) und (b) zwei Aeste, welche sich im Ursprung schneiden, und eben dadurch denselben zum Doppelpunkte machen. Die Curve ist concav, wenn x positiv, convex, wenn x negativ ist.

Die Gestalt der Curve, wenn α positiv, s. Fig. 2, wenn α negativ, Fig. 3.

B. $\alpha = 0$.

Die Gleichung (2b) geht jetzt über in

$$y^2x - \frac{p}{2}\,x^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

Dieselbe lässt sich zerlegen in die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y^2 &= \frac{p}{2}\,x \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4)$$

Daraus folgt:

Die Tangentencurve degeneriert in diesem Falle in das System einer Parabel, welche Axe und Scheitel mit der Hauptcurve gemeinsam hat, und deren Parameter sich zu dem der letzteren wie 1 : 4 verhält, und ihrer Scheiteltangente. (s Fig. 4.)

Es ist noch

$$y = \sqrt{\frac{p}{2}\,x} = \frac{1}{2}\,\sqrt{2px}$$

Die Tangentencurve halbiert in diesem Falle die Ordinaten der Hauptcurve.

§ 7.

Gleichung und Gestalt der Normalcurve.

Aus der Gleichung der Parabel

$$y = \pm \sqrt{2p\,(x - \alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

folgt als Gl. der Normalcurve:

$$y = \mp \frac{x}{p} \sqrt{2p\,(x - \alpha)} \quad \ldots\ldots \quad (2a)$$

oder

$$\frac{p}{2}\, y^2 + \alpha x^2 - x^3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2b)$$

Aus derselben folgt:

1) Die Normalcurve liegt symmetrisch zur X-Axe.

2) Für alle Werthe von x zwischen $+\alpha$ und $+\infty$ ist y stets reell und wächst mit x ins Unendliche.

3) y ist $= 0$ für $x = 0$ und $x = \alpha$.

4) Für alle Werthe von $x < +\alpha$, den Werth $x = 0$ eventuell ausgenommen, ist y imaginär.

5) Setzt man die linke Seite der Gleichung (2b) $= f$, so ist

$$\frac{df}{dx} = 2\alpha x - 3x^2; \quad \frac{df}{dy} = py$$

$$\frac{d^2 f}{dx\,dy} = 0; \quad \frac{df^2}{dx^2} = 2\alpha - 6x; \quad \frac{df^2}{dy^2} = p.$$

Für $x = 0$, $y = 0$ ist $\frac{df}{dx} = 0$, $\frac{df}{dy} = 0$, und

$$\left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2 f}{dx^2} \cdot \frac{d^2 f}{dy^2} = -2\alpha p.$$

Das Vorzeichen des letztern Ausdrucks ist dem von α entgegengesetzt. Es folgt daraus:

Der Ursprung ist ein isolierter Punkt, wenn α positiv, ein Rückkehrpunkt, wenn $\alpha = 0$, ein Doppelpunkt, wenn α negativ ist.

6) $$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2\alpha x}{py} = \frac{3x - 2\alpha}{\sqrt{2p\,(x - \alpha)}}$$

ist $= \infty$, wenn $x = \alpha \lessgtr 0$ ist.

So lange also α von Null verschieden ist, schneidet die Curve die X-Axe rechtwinklig in dem Punkte $x = \alpha$, $y = 0$.

7. $\frac{dy}{dx}$ verschwindet für

$$x = \frac{2}{3}\alpha,\ y = \mp \frac{2}{3}\alpha\sqrt{\frac{-2\alpha}{3p}}$$

Diese Werthe von x und y stellen im Allgemeinen die Coordinaten der Culminationspunkte dar

Dieselben haben jedoch nur dann eine geometrische Bedeutung, wenn α negativ ist. Denn falls α positiv ist, so wird in dem obigen Ausdruck y imaginär; ist $\alpha = 0$, so ist $x = 0$, $y = 0$; der Ursprung kann aber nicht im eigentlichen Sinne als Culminationspunkt angesehen werden, da die Curve sich in diesem Falle nach der negativen Seite der X hin nicht über ihn hinaus erstreckt

8) Auf analoge Weise findet man mit Hilfe des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x - 4\alpha}{\pm\sqrt{2p\,(x-\alpha)^3}}$$

dass die Curve Wendepunkte besitzt, wenn α positiv ist. Die Coordinaten derselben sind

$$x = \frac{4}{3}\alpha;\quad y = \mp\frac{4}{3}\alpha\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\alpha}{p}}$$

9) Ist α positiv, so ist die Curve concav gegen die X-Axe gekrümmt, so lange x kleiner als $\frac{4}{3}\alpha$ ist In den Wendepunkten nimmt sie convexe Krümmung an, die sie dann beibehält.

Sie hat die in Fig. 5 angegebene Gestalt

10) Ist $\alpha = 0$, so ist die Curve eine Neil'sche Parabel. S. Fig. 6.

11) Ist α negativ, so ist die Curve concav, wenn x negativ, convex, wenn x positiv ist. Die Gestalt der Curve Fig. 7.

§ 8.

Die Polargleichungen der Tangentencurve und Normalcurve.

1 Durch die Substitutionen $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, erhält man als Polargleichung der Tangentencurve

$$r^3\sin^2\varphi\cos\varphi - r^2\left(\alpha\sin^2\varphi + \frac{p}{2}\cos^2\varphi\right) = 0\,. \quad (1)$$

Dieselbe lässt sich zerlegen in die Gleichungen:

$$r^2 = 0;\; r = \frac{\frac{p}{2}\operatorname{ctg}^2\varphi + \alpha}{\cos\varphi}$$

Der Pol wird also durch die Gleichung (1) stets doppelt dargestellt.

2. Als Polargleichung der Normalcurve erhält man auf dieselbe Weise

$$r^3\cos^3\varphi - r^2\left(\alpha\cos^2\varphi + \frac{p}{2}\sin^2\varphi\right) = 0\,. \quad (2)$$

Diese Gleichung lässt sich zerlegen in

$$r^2 = 0;\; r = \frac{\frac{p}{2}\operatorname{tg}^2\varphi + \alpha}{\cos\varphi}$$

drückt also ebenfalls den Pol doppelt aus.

§ 9

Die conjugierte Curve der Parabel

Die conjugierte Curve (s. § 5) der Parabel

$$y^2 = 2p\,(x - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ist bestimmt durch die Gleichung

$$y = \int \frac{\mp\sqrt{2p\,(x-\alpha)}}{p}\,dx \quad \ldots \quad (2)$$

Da wir nach § 5 die Integrationsconstante vernachlässigen, so erhalten wir als Gleichung der conjugierten Curve

$$y = \mp\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{p}\,(x-\alpha)^3} \quad \ldots\ldots \quad (3a)$$

oder

$$y^2 = \frac{8}{9p}(x - \alpha)^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3b)$$

Die conjugierte Curve der auf ihre Axe als X-Axe bezogenen Parabel ist also eine Neil'sche Parabel, welche symmetrisch zur X-Axe liegt, und deren Spitze in den Scheitel der Parabel fällt Es sind speciell diejenigen Zweige der beiden parabolischen Linien conjugiert, welche auf entgegengesetzten Seiten der X-Axe liegen.

Die beiden Curven schneiden sich in den Punkten:

$$x = \frac{3}{2}p + \alpha;\ y = \pm p\sqrt{3} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Lässt man in (1) und (3) p veränderlich werden, so erhält man ein ganzes System von gemeinen und Neil'schen Parabeln. Die Schnittpunkte von je zwei conjugierten liegen auf den beiden Geraden

$$y = \pm \frac{2}{3}(x - \alpha)\sqrt{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wie man durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen (4) findet

§ 10.

Lage der Tangentencurve gegen die Parabel.

1) Eliminiert man aus den Gleichungen

$$y^2 = 2p(x - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und

$$y^2 = \frac{px^2}{2(x - \alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

y, so erhält man die Gleichung

$$4(x - \alpha)^2 - x^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

deren Wurzeln die Abscissen der Schnittpunkte zwischen der Parabel und Tangentencurve liefern.

Die Schnittpunkte sind demnach

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\alpha,\ y = \pm\sqrt{2p\alpha} \\ x &= \frac{2}{3}\alpha,\ y = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}p\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

Von diesen vier Schnittpunkten sind aber, so lange α von Null verschieden ist, stets zwei imaginär, und zwar die beiden letzteren, wenn α positiv, die beiden ersteren, wenn α negativ ist. Ist $\alpha = 0$, so fallen alle Scheitelpunkte im Ursprung zusammen.

2) Durch Vergleichung mit § 6 und § 7 findet man:

a. Ist α positiv, so schneidet die Parabel die Tangentencurve in den Culminationspunkten der letzteren.

b. Ist α negativ, so schneidet die Parabel die Tangentencurve auf der durch die Culminationspunkte der Normalcurve gezogenen Parallelen zur Y-Axe.

3) Die Abscissen der Schnittpunkte sind von p unabhängig. Es folgt daraus:

Ist ein System von Parabeln gegeben, welche Axe und Scheitel gemeinsam haben, so liegen die Schnittpunkte jeder Parabel mit ihrer Tangentencurve auf einer Parallelen zur Y-Axe.

Anmerkung: Es ist natürlich vorausgesetzt, dass die gemeinsame Axe X-Axe ist und der Parameter nicht negativ wird.

4) Die Culminations- und Wendepunkte in dem zugehörigen System von Tangentencurven liegen ebenfalls auf den Parallelen zur Y-Axe $x = 2\alpha$ und $x = 4\alpha$.

5) Eliminiert man in (4) aus je zwei zusammengehörigen Werthen von x und y die Grösse α, so erhält man die Gleichung

$$y^2 = px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und

$$y^2 = -px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

D. h. ist ein System von Parabeln gegeben, welche eine gemeinsame Axe und gleichen Parameter haben, so sind die geometrischen Oerter der Punkte, in welchen jede Parabel von ihrer Tangentencurve geschnitten wird, die beiden Parabeln (5) und (6).

6) Die Culminationspunkte in dem zugehörigen System von Tangentencurven liegen auf der Parabel (5), die

Wendepunkte auf der Parabel

$$y^2 = \frac{2}{3} px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

§ 11.

Lage der Normalcurve gegen die Parabel.

1) Durch Elimination von y aus

$$y^2 = 2p\,(x - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und

$$y^2 = \frac{2}{p} x^2\,(x - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

erhält man

$$(x - \alpha)\,(x^2 - p^2) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung findet man als Coordinaten der Schnittpunkte der Parabel und ihrer Normalcurve:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & x = \alpha; & y = 0 \\ \text{II} & x = +p; & y = \pm\sqrt{2p\,(p - \alpha)} \\ \text{III} & x = -p; & y = \pm\sqrt{2p\,(-p - \alpha)} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Von diesen fünf Schnittpunkten sind die in III imaginär, wenn $\alpha > -\alpha$, ausserdem auch die in II, wenn $\alpha > +p$ ist. Ist $\alpha = \pm p$, so fallen bezüglich die Punkte II oder III mit I zusammen.

2) Eliminiert man in (4) aus je zwei zusammengehörigen Werthen von x und y die Grösse p, so erhält man die Gleichungen

$$y^2 = 2x\,(x - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$y^2 = 2x\,(\alpha - x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Hieraus folgt:

Ist ein System von Parabeln gegeben, welche Scheitel und Axe gemeinsam haben, so sind die geometrischen Oerter der Punkte, in welchen jede Parabel von ihrer Normalcurve geschnitten wird, der Scheitel und die durch (5) und (6) dargestellten Kegelschnitte.

(5) ist eine Hyperbel, (6) eine Ellipse.

Die Strecke zwischen dem Ursprung und dem Scheitel ist die reelle Axe der erstern und zugleich die kleine Axe der Ellipse.

Die Nebenaxe der Hyperbel (5), zugleich die grosse Axe von (6), hat die Grösse $x\sqrt{2}$.

Ist $\alpha = 0$, so degeneriert (6) in den Ursprung, (5) in die beiden Geraden $y = \pm x\sqrt{2}$.

3) Die Culminations- und Wendepunkte des zugehörigen Systems von Normalcurven liegen auf Parallelen zur Y-Axe.

4) Ist ein System von Parabeln gegeben, welche die X-Axe zur gemeinsamen Axe und einen gleichen Parameter haben, so sind die geometrischen Oerter der Schnittpunkte einer jeden Parabel mit ihrer Normalcurve die X-Axe und die beiden Parallelen zur Y-Axe

$$x = \pm p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

5) Der geometrische Ort der Culminationspunkte in dem zugehörigen System von Normalcurven ist bestimmt durch die Gleichung

$$y^2 = -\frac{x^3}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

der der Wendepunkte durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{x^3}{2p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Beide geometrische Oerter sind Neil'sche Parabeln deren Rückkehrpunkt im Ursprung liegt.

§ 12.

Lage der Tangentencurve und Normalcurve gegen einander.

1) Die Gleichung

$$\frac{p\,x^2}{2\,(x-\alpha)} = \frac{2}{p}\,x^2\,(x-\alpha) \quad \ldots \quad (1a)$$

oder

$$x^2\,[p^2 - 4\,(x-\alpha)^2] = 0 \quad \ldots \quad (1b)$$

iat die Wurzeln

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = 0 \qquad x_3 = \alpha + \frac{p}{2}$$

$$x_4 = \alpha - \frac{p}{2}$$

Hieraus folgen als Coordinaten der Punkte, welche die 'angentencurve mit der Normalcurve gemeinsam hat:

$$x = 0;\ y = 0;\ \text{und}\ x = \alpha + \frac{p}{2};\ y = \pm\left(\alpha + \frac{p}{2}\right). \quad (2)$$

Die Wurzel x_4 liefert keine reellen Schnittpunkte.

Die beiden Schnittpunkte

$$x = \alpha + \frac{p}{2};\ y = \pm\left(\alpha + \frac{p}{2}\right)$$

egen auf der Parallelen zur Y-Axe, welche durch den rennpunkt der Parabel geht.

2) Die geometrischen Oerter der Schnittpunkte, wenn oder α variabel wird, sind die beiden durch den Ursprung ezogenen Geraden, welche einen Winkel von 45^0 mit der -Axe einschliessen.

§ 13.

Secante der Tangentencurve.

Die Tangentencurve ist eine Linie dritten Grades und ird daher von einer Geraden im Allgemeinen in drei nkten geschnitten. Die Abscissen der Schnittpunkte sind stimmt durch die Wurzeln der Gleichungen

$$^2x^3 + (2mn - \frac{p}{2} - m^2\alpha)\,x^2 + (n^2 - 2mn\alpha)\,x - n^2\alpha = 0 \quad (1)$$

elche durch Elimination von y aus den Gleichungen

$$y = \frac{p\,x}{\sqrt{2p\ (x - \alpha)}}$$

d

$$y = m\,x + n$$

rvorgeht.

Es sollen einige Specialfälle betrachtet werden.

1) Ist $n = 0$, so sind die Wurzeln von (1)

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = 0 \qquad x_3 = \frac{p}{2m^2} + \alpha.$$

Eine Gerade, die durch den Ursprung geht, schneidet demnach die Curve ausserdem nur in einem Punkte.

2) Ist $m = 0$, d. h. lauft die Gerade parallel zur X-Axe, so liegt ein Schnittpunkt im Unendlichen Die Coordinaten der beiden andern sind:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{n}{p}\left(n \pm \sqrt{n^2 - 2p\alpha}\right); \quad y = n.$$

Diese Schnittpunkte fallen in einen Berührungspunkt zusammen, wenn $n^2 = 2p\alpha$ ist, sie werden imaginär, wenn $n^2 < 2p\alpha$ ist.

3. Ist $m = \infty$, d. h. ist die Gerade parallel zur Y-Axe, so schneidet sie, falls sie rechts von der Asymptote liegt, die Curve in zwei Punkten. Der dritte Schnittpunkt liegt im Unendlichen.

§ 14.

Tangente der Tangentencurve.

Die Gleichung der Tangente am Punkte (x, y) der Tangentencurve ist:

$$\eta - y = \frac{p}{2}\,\frac{\alpha - 2\alpha}{\sqrt{2p\,(x-\alpha)^3}}\,(\xi - x) \ldots . \quad (1a)$$

oder

$$\eta = \frac{p}{2}\,\frac{(x - 2\alpha)\,\xi + x^2}{\sqrt{2p\,(x-\alpha)^3}} \ldots . \quad (1b)$$

1. Für $x = \alpha$, $y = \infty$ folgt aus (1) $\xi =$ D. h. die Scheiteltangente der Hauptcurve ist eine Asymptote der Tangentencurve. (cf. § 6, A. 3.)

2. Für $x = 0$, $y = 0$ geht (1) über in

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{p}{-2\alpha}}\,\xi = \frac{p}{\pm\sqrt{-2p\alpha}}\,\xi$$

Die Tangente im Ursprung, wenn eine solche existiert, t parallel der Tangente im entsprechenden Punkte der auptcurve. Es liesse sich dies auch direct daraus folgern, ass für $x = 0$, $y = 0$ die Tangente mit dem Radius vector usammenfällt.

3. Der Winkel, unter welchen sich die Tangenten im rsprung schneiden, ist bestimmt durch die Gleichung

$$w = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{p}{-2\alpha}}$$

ist $= 90^0$, wenn $\alpha = -\frac{p}{2}$ ist, d. h., wenn der Brennnkt der Hauptcurve im Ursprung liegt.

Ist $\alpha = 0$, so ist $w = 180^0$; d. h. die beiden Tannten decken sich. (cf. § 6, B.)

4) Die Tangente schneidet die Curve in einem Punkte, elcher der Tangentialpunkt heisst

Setzt man in (1) statt η:

$$\frac{p\,\xi}{\sqrt{2p\,(\xi - \alpha)}}$$

erhält man die Gleichung

$$(x - 2\alpha)^2\,\xi^3 + [2\,(x - 2\alpha)\,x^2 + \alpha\,(x - 2\alpha)^2 - 4\,(x - \alpha)^3]\,\xi^2 + [x^4 - 2x^2\alpha\,(x - 2\alpha)]\,\xi - \alpha x^4 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

nach ξ vom 3. Grade ist.

Die Wurzeln sind

$$\left.\begin{matrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{matrix}\right\} = x; \qquad \xi_3 = \frac{\alpha x^2}{(x - 2\alpha)^2} \quad \ldots \quad (3)$$

ist die Abscisse des Tangentialpunkts.

Die zugehörige Ordinate ist

$$\eta = \frac{\frac{p}{2}\,x^2}{(x - 2\alpha)\,\sqrt{2p\,(x - \alpha)}}$$

5) Ist α positiv, so liegt der Tangentialpunkt auf dem gegengesetzten Aste, wie der Berührungspunkt, wenn $< 2\alpha$, auf demselben Aste, wenn $x > 2\alpha$ ist.

Ist $x = 2\alpha$, d. h. ist der Berührungspunkt einer de Culminationspunkte, so liegt der Tangentialpunkt im Un endlichen.

6) Ist α negativ, so liegt der Tangentialpunkt stet auf dem entgegengesetzten Ast wie der Berührungspunkt Für die Tangenten in dem Doppelpunkt fällt der Tangential punkt mit dem Berührungspunkt zusammen.

7) Ist $\alpha = 0$, so liegt der Tangentialpunkt stets au der, jetzt einen Theil der Curve bildenden, Y-Axe.

8) Die absolute Länge der Subtangente ist

$$\frac{2x\ (x - \alpha)}{x - 2\alpha}$$

Aus der Unabhängigkeit dieses Ausdrucks von p folgt

Ist ein System von Curven gegeben, das dargestellt is durch die Gleichung

$$y = \frac{px}{\pm\sqrt{2p\ (x - \alpha)}}$$

worin p eine Variable bedeutet, so gehen die Tangente sämmtlicher Punkte, welche gleiche Abcisse haben, durc einen festen Punkt auf der X-Axe.

9) Die Gleichung (1) ist nach x vom 4. Grade. F folgt daraus, dass sich von einem Punkte (ξ, η) im Allg meinen vier Tangenten an die Curve ziehen lassen, oder da dieselbe von der vierten Klasse ist.

§ 15.

Durchmesser der Tangentencurve.

Die Tangentencurve werde von einer Schaar parallel Geraden

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + N \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

geschnitten. Auf einer jeden solchen Geraden sei d Centrum der mittleren Entfernung bestimmt, d. der Punkt, welcher so liegt, dass die algebraische Sum seiner Abstände von den Schnittpunkten der Transversa und der Curve $= 0$ ist.

Der geometrische Ort aller dieser Centren der mittleren Entfernung ist der der Richtung der Transversalenschaar conjugierte Durchmesser erster Ordnung der Tangentencurve.

Der geometrische Ort der Punkte, für welche die algebraische Summe der Produkte aus je zwei Abständen von den Schnittpunkten verschwindet, ist der Durchmesser weiter Ordnung oder der Diametralkegelschnitt der Curve.

Um die Gleichungen der Durchmesser für die Tangentencurve zu finden, setzt man in die Gleichung der letzteren

$$x = \xi + \varrho \cos \varphi; \; y = \eta + \varrho \sin \varphi.$$

Man erhält dann

$$^3 \sin^2\varphi \cos\varphi + \varrho^2 [(\xi - \alpha) \sin^2\varphi - \frac{p}{2} \cos^2\varphi + 2\eta_1 \sin\varphi \cos\varphi] +$$

$$- \varrho [\eta_1^2 \cos\varphi + 2\eta_1 (\xi - \alpha) \sin\varphi - p\,\xi \cos\varphi] + \eta_1^2 (\xi - \alpha) -$$

$$- \frac{p}{2} \xi^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Löst man diese Gleichung nach ϱ auf so liefern ihre Wurzeln die Werthe für die Abstände eines Punktes (ξ, η_1) von den Schnittpunkten einer durch ihn gezogenen Geraden, deren Neigungswinkel φ ist, und der Curve.

Soll daher der Punkt (ξ, η_1) einem der Durchmesser angehören, so muss bezüglich das zweite oder dritte Glied der Gleichung (2) verschwinden.

Betrachtet man demnach ξ und η_1 als laufende Coordinaten, so hat man als Gleichung

des Durchmessers 1. Ordnung:

$$(\xi - \alpha) \sin^2\varphi - \frac{p}{2} \cos^2\varphi + 2\eta_1 \sin\varphi \cos\varphi = 0$$

der

$$\eta_1 = \frac{\frac{p}{2} \operatorname{ctg}\varphi + \alpha \operatorname{tg}\varphi - \xi \operatorname{tg}\varphi}{2} \quad \ldots \quad (3)$$

des Durchmessers 2. Ordnung:

$$\eta^2 \cos\varphi + 2\eta\,(\xi - \alpha)\sin\varphi - p\,\xi\cos\varphi = 0$$

oder

$$\eta^2 + 2\eta\,(\xi - \alpha)\operatorname{tg}\varphi - p\,\xi = 0 \quad . \; . \quad (4)$$

I. Der Durchmesser 1. Ordnung.

1) Diejenige Gerade der Schaar (1), welche durch den Ursprung geht, schneidet die Curve ausserdem in einem Punkte M. Sind dessen Coordinaten ξ_0, η_0, so ist

$$\xi_0 = \frac{p}{2}\operatorname{ctg}^2\varphi + \alpha; \quad \eta_0 = \frac{p}{2}\operatorname{ctg}\varphi + \alpha\operatorname{tg}\varphi.$$

Man kann demnach die Gleichung des Durchmessers einfacher schreiben:

$$\eta = \frac{\eta_0 - \xi\operatorname{tg}\varphi}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3a)$$

2) Die Stücke, welche der Durchmesser auf den Coordinatenaxen abschneidet, sind

$$\xi = \xi_0; \quad \eta = \frac{\eta_0}{2}$$

Der Durchmesser geht also durch den Fusspunkt der Ordinate von M und schneidet die Y-Axe in der halben Höhe dieser Ordinate.

3) Ist $\varphi = 0$, so liegt der Durchmesser im Unendlichen, ist $\varphi = 90^0$, so fällt er mit der Asymptote zusammen.

4) Die Tangentencurve hat zwei Durchmesser 1. Ordnung, welche ihre Sehnen unter rechten Winkeln schneiden. Die Gleichung dieser Durchmesser ist

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\xi + \alpha + \frac{p}{4}\right)}$$

II. Der Diametralkegelschnitt.

1) Der Diametralkegelschnitt ist im Allgemeinen eine Hyperbel.

2) Die Coordinaten des Mittelpunkts sind

$$X = -\frac{p}{2}\operatorname{ctg}^2\varphi + \alpha; \quad Y = \frac{p}{2}\operatorname{ctg}\varphi \; . \; . \quad (5)$$

3) Eliminiert man aus den Gleichungen ctg φ, so erhält man die Gleichung

$$Y^2 = -\frac{p}{2}(X - \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

D. h. construiert man zu allen möglichen Sehnenrichtungen die Diametralkegelschnitte, so liegen die Mittelpunkte derselben auf der durch (6) dargestellten Parabel.

4) Ist $\varphi = 0$, so liegt der Mittelpunkt in unendlicher Entfernung und der Diametralkegelschnitt geht in die Parabel $\eta^2 = p\,\xi$ über. Für $\varphi = 90^0$ degeneriert er in das System der X-Axe und der Asymptote.

5) Differentiiert man die Gleichung

$$F = \eta^2 \cos\varphi + 2\eta\,(\xi - \alpha)\sin\varphi - p\,\xi\cos\varphi = 0$$

partiel nach φ, so erhält man

$$\frac{dF}{d\varphi} = 2\eta\,(\xi - \alpha)\cos\varphi - (\eta^2 - p\,\xi)\sin\varphi$$

Setzt man diesen Ausdruck $= 0$, so folgt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\eta\,(\xi - \alpha)}{\eta^2 - p\,\xi}$$

und wenn man diesen Werth in (4) einsetzt

$$(\eta^2 - p\,\xi)^2 + 4\eta^2\,(\xi - \alpha)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Denkt man sich also zu allen Sehnenrichtungen die Diametralkegelschnitte construiert, so werden diese von der durch (7) dargestellten Curve eingehüllt.

§ 16.

Secante der Normalcurve.

Die Normalcurve ist vom 3. Grade und wird daher von einer Geraden im Allgemeinen in drei Punkten geschnitten.

Ist die Gleichung der Geraden $y = mx + n$, so ergeben sich die Abscissen der Schnittpunkte aus der Gleichung

$$x^3 - \left(\frac{p}{2}m^2 + \alpha\right)x^2 - mnpx - \frac{p}{2}n^2 = 0 \quad . \quad (1)$$

1) Ist $n = 0$, d. h. geht die Gerade durch den Ur sprung, so sind die Wurzeln von (1)

$$x_1 = x_2 = 0; \quad x_3 = \frac{p}{2} m^2 + \alpha.$$

2) Ist die Gerade parallel zur X-Axe, also $m = 0$ so geht (1) über in

$$x^3 - \alpha x^2 - \frac{p}{2} n^2 = 0$$

Die Discriminante dieser Gleichung ist

$$\frac{n^2 p}{16.27^2} (p n^2 + 8\alpha^3);$$

Daraus folgt:

Die Gerade hat drei reelle Schnittpunkte mit der Curve wenn α negativ und n^2 numerisch $\leq \frac{8\alpha^3}{p}$ ist. Im letztere Falle rücken zwei Schnittpunkte zu einem Berührungspunkt zusammen.

Ist n^2 grösser, oder ist $\alpha > 0$, so existiert nur ei reeller Schnittpunkt.

3) Eine Parallele zur Y-Axe schneidet die Curve i Endlichen höchstens in zwei Punkten.

§ 17.

Tangente der Normalcurve.

Die Gleichung der Tangente am Punkte (x, y) d Normalcurve ist

$$\eta - y = \frac{3x - 2\alpha}{\sqrt{2p\ (x - \alpha)}} (\xi - x) \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

oder

$$\eta = \frac{(3x - 2\alpha)\ \xi - x^2}{\sqrt{2p\ (x - \alpha)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

1) Ist $x = 0$, $y = 0$, so ist

$$\eta = \pm \frac{\sqrt{-2p\alpha}}{p} \xi.$$

Die Tangenten im Ursprung sind parallel den Normalen
n den entsprechenden Punkten der Hauptcurve. (cf. § 14, 2.)

2) Der Winkel, welchen die Tangenten in dem Doppel-
unkt bilden, ist

$$w = 2 \text{ arc tg } \sqrt{\frac{-2\alpha}{p}}$$

ist auch hier $= 90^0$, wenn $\alpha = -\frac{p}{2}$ ist. (cf. § 14, 3.)

3. Setzt man in (1) für η den Werth

$$\xi \sqrt{\frac{2}{p}(\xi - \alpha)},$$

erhält man die Gleichung

$$4(x-\alpha)\xi^3 + (8\alpha x - 9x^2)\xi^2 + 2x^2(3x - 2\alpha)\xi - x^4 = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Löst man (2) nach ξ auf, so ergeben sich die Wurzeln

$$\left.\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\end{matrix}\right\} = x; \quad \xi_3 = \frac{x^2}{4(x-\alpha)}$$

ist die Abscisse des Tangentialpunkts. Die zugehörige
rdinate ist

$$\eta = -\frac{x^2(x-2\alpha)}{4\sqrt{2p}(x-\alpha)^3}$$

4) Die absolute Länge der Subtangente ist

$$\frac{2x(x-\alpha)}{3x-2\alpha}$$

Dieser Ausdruck ist von p unabhängig. Ist daher p
ariabel, so haben alle Punkte der Curvenschaar

$$y^2 = \frac{2}{p}x^2(x-\alpha),$$

elche gleiche Abscisse haben, auch gleiche Subtangente;
ler: Die Tangenten an Punkte von gleicher Abscisse gehen
rch einen festen Punkt auf der X-Axe.

5) Die Gleichung (1b) ist nach x vom vierten Grad; es folgt daraus, dass die Curve von der vierten Klasse ist.

§ 18

Durchmesser der Normalcurve.

Setzt man in die Gleichung der Normalcurve

$$x = \xi + \varrho \cos \varphi;\ y = \eta + \varrho \sin \varphi,$$

so geht dieselbe über in

$$\varrho^3 \cos {}^3\varphi + \varrho^2 \left[(3\xi - \alpha) \cos {}^2\varphi - \frac{p}{2} \sin {}^2\varphi \right] +$$
$$+ \varrho \left[(3\xi^2 - 2\alpha\xi) \cos \varphi - p\eta \sin \varphi \right] +$$
$$+ \xi^2 (\xi - \alpha) - \frac{p}{2} \eta^2 = 0 \ldots\ldots (1)$$

Durch dieselben Schlüsse wie in § 15 erhält man hieraus für die Normalcurve als Gleichung

des Durchmessers 1. Ordnung:

$$(3\xi - \alpha) \cos {}^2\varphi - \frac{p}{2} \sin {}^2\varphi = 0$$

oder

$$\xi = \frac{\frac{p}{2} \operatorname{ctg} {}^2\varphi + \alpha}{3} \ldots\ldots (2)$$

des Diametralkegelschnitts:

$$\xi (3\xi - 2\alpha) \cos \varphi - p\eta \sin \varphi = 0 \ldots (3)$$

Der Durchmesser 1. Ordnung ist stets eine Parallele zur Y-Axe.

Für $\varphi = 90^0$ fällt dieselbe ins Unendliche.

Der Diametralkegelschnitt ist eine Parabel, deren Axe parallel zur Y-Axe ist. Der Parameter ist $\frac{p}{3} \operatorname{tg} \varphi$; die Coordinaten des Scheitels sind

$$\xi = \frac{\alpha}{3};\ \eta = -\frac{\alpha^2}{3p} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Construiert man zu allen Sehnenrichtungen die Diametralkegelschnitte, so liegen die Scheitel derselben auf der Geraden $\xi = \frac{\alpha}{3}$.

Für $\varphi = 0$ degeneriert der Diametralkegelschnitt in die beiden parallelen Geraden $\xi = 0$ und $\xi = \frac{2}{3}\alpha$; für $\varphi = 90^0$ in die X-Axe.

§ 19.

Quadratur der Tangentencurve und Normalcurve.

Der § 3 liefert uns für den Flächeninhalt der Tangentencurve die Formel

$$F = \int_a^b y\,dx = b\sqrt{2p(b-\alpha)} - a\sqrt{2p(a-\alpha)} - \int_a^b \sqrt{2p(x-\alpha)}\,dx$$

$$= b\sqrt{2p(b-\alpha)} - a\sqrt{2p(a-\alpha)} - \frac{2}{3}\sqrt{2p}\left\{(b-\alpha)^{\frac{3}{2}} - (a-\alpha)^{\frac{3}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{b}{3}\sqrt{2p(b-\alpha)} - \frac{a}{3}\sqrt{2p(a-\alpha)} + \frac{2}{3}\alpha\sqrt{2p}\left\{\sqrt{b-\alpha} - \sqrt{a-\alpha}\right\}$$

Setzt man unter der Voraussetzung, dass α negativ ist, $a = \alpha$, $b = 0$, so ist

$$F = \frac{2}{3}\alpha\sqrt{-2p\alpha}$$

d. h. die Fläche zwischen der Tangentencurve und der Asymptote ist gleich dem Segment, welches die Y-Axe von der Parabel abschneidet.

Für den Flächeninhalt der Normalcurve erhält man

$$F' = \int_a^b \frac{x}{p} \sqrt{2p\ (x-\alpha)}\ dx =$$

$$= \frac{2}{15p} \sqrt{2p\,(b-\alpha)^3}\ (3b+2\alpha) - \frac{2}{15p} \sqrt{2p\,(a-\alpha)^3}\ (3a+2\alpha)$$

§ 20.

Aenderung der abgeleiteten Curven, wenn die Hauptcurve um ihren Scheitel gedreht wird.

Dreht man die Parabel $y^2 = 2p\ (x-\alpha)$, um ihren Scheitel, sodass also ihre Axe mit der X-Axe jetzt den Winkel φ bildet, so ist ihre Gleichung

$$\left[y\cos\varphi - (x-\alpha)\sin\varphi\right]^2 = 2p\left[(x-\alpha)\cos\varphi + y\sin\varphi\right]$$

oder

$$y = \frac{\left[(x-\alpha)\cos\varphi + p\right]\sin\varphi \pm \sqrt{2p\ (x-\alpha)\cos\varphi + p^2\sin^2\varphi}}{\cos^2\varphi} \quad (1)$$

Hieraus folgt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sin\varphi + \frac{p}{\pm\sqrt{2p\ (x-\alpha) + p^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi} \quad . \quad . \quad (2)$$

und somit als Gleichung

der Tangentencurve:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{p\,x}{\pm\sqrt{2p\ (x-\alpha)\cos\varphi + p^2\sin^2\varphi}} \quad . \quad . \quad (3)$$

der Normalcurve:

$$y = \frac{\mp\, x\cos\varphi\sqrt{2p\ (x-\alpha)\cos\varphi + p^2\sin^2\varphi}}{p \pm \sin\varphi\sqrt{2p\ (x-\alpha)\,\mathrm{sos}\,\varphi + p^2\sin^2\varphi}} \quad . \quad . \quad (4)$$

Es mögen noch einige Specialfälle betrachtet werden.

I. Ist

$$\alpha = \frac{p}{2} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi,$$

so degeneriert die Tangentencurve in die Y-Axe und eine Parabel, welche diese berührt

II. Ist $\varphi = 90^0$, so liefert (2) die Werthe

$$y'_1 = \infty; \quad y'_2 = \frac{0}{0}$$

welch letzterer, indem man im Zähler und Nenner nach φ differentiiert in $\frac{x - \alpha}{p}$ übergeht.

Die Tangentencurve ist somit jetzt dargestellt durch die Gleichungen

$$y = \infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

$$y = \frac{x\,(x - \alpha)}{p} \quad \ldots\ldots \text{(b)}$$

die Normalcurve durch die Gleichungen

$$y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(m)}$$

$$y = \frac{-\,px}{x - \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(n)}$$

Die Tangentencurve besteht aus der unendlich fernen Parallelen zur X-Axe und einer Parabel, deren Axe parallel zur Y-Axe ist. Der Parameter der letzteren ist halb so gross als der der Hauptcurve, also von α unabhängig. Die Coordinaten des Scheitels sind

$$x = \frac{\alpha}{2}; \quad y = -\frac{\alpha^2}{4p}$$

Durch Elimination von α folgt hieraus

$$y = -\frac{x^2}{p}$$

Wird also die Hauptcurve längs der X-Axe parallel mit sich selbst verschoben, so bewegt sich der Scheitel der Parabel (b) auf einer Parabel, deren Parameter dem ihrigen

entgegengesetzt gleich ist, und welche die Y-Axe zur Axe hat.

Die Normalcurve besteht aus der X-Axe und einer gleichseitigen Hyperbel, welche die Geraden $x = \alpha$; $y = -p$, zu Asymptoten hat. Für $\alpha = 0$ degeneriert die Hyperbel in die beiden Geraden $x = 0$, $y = -p$.

Conjugierte Curve der Parabel ist in unserem Falle jede der beiden logarithmischen Linien

$$y = -p\, l\, (x - \alpha)$$

und

$$y = -p\, l\, (\alpha - x)$$

Berichtigung:

Seite 14, Zeile 4 von oben ist „Schnittpunkte“ nicht „Scheitelpunkte“ zu lesen.

Ueberreicht vom Verfasser.

Eigenthum des Referenten.

Ueber die Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem.

Von

K. Hensel

(Sonderabdruck aus Heft 1 Bd. 117 des Journals für die reine und angewandte Mathematik.)

Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Herausgegeben von **L. Fuchs.**
Druck und Verlag von Georg Reimer in Berlin.

(Sonderabdruck aus Heft 1 Bd. 117.)

Ueber die Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

Als eine Anwendung und Erweiterung der in meiner Abhandlung „Ueber einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen“ (dieses Journal Bd. 115 S. 254) gefundenen Resultate soll in dieser Arbeit eine vollständige Darstellung aller Integranden erster Gattung eines Gattungsbereiches oder Körpers durch ein Fundamentalsystem gegeben, und hierauf die charakteristische Eigenschaft eines solchen Fundamentalsystemes hergeleitet werden; ich benutze hier die Bezeichnungen jener Arbeit, ohne sie noch einmal zu erklären.

§ 1.

Die Integranden und die algebraischen Formen erster Gattung.

Zunächst sollen die Bedingungen kurz angegeben werden, denen eine algebraische Function Y eines beliebigen Bereiches $\mathfrak{G}(x)$ genügen muss, damit das algebraische Integral $\int Y dx$ allenthalben endlich, also ein Integral der ersten Gattung ist. Bekanntlich ist dies dann und nur dann der Fall, wenn für jeden Werth

$$x = \frac{a_1}{a_2}$$

der unabhängigen Variablen, also auch für $x = \infty$, d. h. für $a_2 = 0$ das Differential Ydx sich auf Null reducirt.

Setzt man wie in der vorigen Arbeit $x = \frac{x_1}{x_2}$ also

$$dx = \frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{x_2^2}$$

und setzt die homogene algebraische Form der -2ten Dimension:

$$\frac{Y}{x_2^2} = \overline{\eta}$$

so geht das zu untersuchende Differential über in:

$$(1.) \qquad Ydx = \bar{\eta}(x_2 dx_1 - x_1 dx_2).$$

Es sei nun $\xi = a_2 x_1 - a_1 x_2$ derjenige homogene Linearfactor, dessen Nullstelle $x = \frac{a_1}{a_2}$ ist und ferner sei $\xi' = b_2 x_1 - b_1 x_2$ irgend ein anderer Linearfactor, dessen Nullstelle $\frac{b_1}{b_2}$ nicht mit $\frac{a_1}{a_2}$ zusammenfällt. Aus der bekannten Identität:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = \xi' d\xi - \xi d\xi'$$

ergiebt sich dann, dass sich die beiden Functionaldeterminanten $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$ und $(\xi' d\xi - \xi d\xi')$ nur um eine nicht verschwindende Constante unterscheiden. Hiernach kann also die Bedingung dafür, dass das zu untersuchende Integral von der ersten Gattung ist, so ausgesprochen werden, dass für jeden Linearfactor ξ

$$\lim_{\xi=0}(\bar{\eta}(\xi' d\xi - \xi d\xi')) = \lim\left(\xi'^2 . \bar{\eta} . d\left(\frac{\xi}{\xi'}\right)\right) = 0$$

ist. Da nun an der Stelle $\xi = 0$

$$d\left(\frac{\xi}{\xi'}\right) = \lim_{\xi=0}\left(\frac{\xi}{\xi'} - \left(\frac{\xi}{\xi'}\right)_{\xi=0}\right) = \lim\frac{\xi}{\xi'}$$

ist, so geht jene Bedingung über in $\lim(\xi\xi'\bar{\eta}) = 0$, oder weil ξ' für $\xi = 0$ nicht verschwindet in die einfachere:

$$\lim(\xi\bar{\eta}) = 0.$$

Das Integral $\int Ydx$ ist also dann und nur dann von der ersten Gattung, wenn $Y = x_2^2\bar{\eta}$ und $\bar{\eta}$ eine solche homogene Form der -2ten Dimension ist, dass für jeden Linearfactor ξ das Product $(\xi\bar{\eta})$ an der Nullstelle von ξ verschwindet.

Ist nun $\bar{\eta}$ irgend eine algebraische Form des Bereiches $\mathfrak{G}(x_1 x_2)$ von beliebiger Dimension, so verschwindet das Product $(\xi\bar{\eta})$ nebst seinen n Conjugirten dann und nur dann an der Stelle $\xi = 0$, wenn in der Gleichung $n$ten Grades, für $(\xi\bar{\eta})$ alle Coefficienten mindestens durch die erste Potenz von ξ theilbar sind, wenn also der grösste gemeinsame Theiler der n conjugirten Formen $(\xi\bar{\eta}_1, \ldots, \xi\bar{\eta}_n)$ eine positive Potenz von ξ als Factor enthält. Also muss der grösste gemeinsame Theiler von $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$ selbst eine Potenz von ξ enthalten, deren Exponent grösser ist als -1. Eine homogene Form $\bar{\eta}$, für welche das Product $(\xi\bar{\eta})$ stets für $\xi = 0$ verschwindet,

wie auch der Linearfactor ξ gewählt sein möge, soll im Folgenden eine *algebraische Form der ersten Gattung* genannt werden. Genügt nun $\bar{\eta}$ der Gleichung $n$ten Grades:

$$\bar{\eta}^n + A_1(x_1 x_2)\bar{\eta}^{n-1} + \cdots + A_n(x_1 x_2) = 0,$$

so ist der grösste gemeinsame Theiler von $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$ durch die Gleichung

$$d(x_1, x_2) = \left(A_1, A_2^{\frac{1}{2}}, A_3^{\frac{1}{3}}, \ldots, A_n^{\frac{1}{n}}\right)$$

bestimmt; also ist $\bar{\eta}$ dann und nur dann eine Form der ersten Gattung, wenn diese rational bestimmbare Wurzelform $d(x_1, x_2)$ jeden Linearfactor ξ erhoben zu einer Potenz enthält, deren Exponent grösser ist als -1. Das bis jetzt gefundene Resultat kann hiernach in dem folgenden Satze ausgesprochen werden:

> Das algebraische Integral $\int Y dx$ ist dann und nur dann ein Integral erster Gattung, wenn die homogene Form der -2ten Dimension $\bar{\eta} = \frac{Y}{x_2^2}$ eine Form der ersten Gattung ist.

Hierdurch ist also die Aufsuchung der Integrale erster Gattung vollständig auf die Darstellung aller homogenen Formen der ersten Gattung zurückgeführt, denn man braucht ja aus ihnen nur alle Formen der -2ten Dimension auszusuchen, um alle jene Integranden zu erhalten.

Die Formen erster Gattung stehen den ganzen algebraischen Formen am nächsten, denn während jene vollständig dadurch charakterisirt sind, dass ihr Theiler eine *ganze* Wurzelfunction ist, kann er für diese zwar gebrochen sein, jedoch müssen seine negativen Exponenten sämmtlich echte Brüche sein; jene Theiler müssen also an jeder Stelle $\xi = 0$ von niedrigerer Ordnung unendlich klein werden, also $\frac{1}{\xi}$ oder als irgend eine *rationale* Form von (x_1, x_2), welche an derselben Stelle unendlich wird. Die Formen erster Gattung bilden hiernach einen Bereich, welcher den der ganzen algebraischen Formen als Theilbereich umfasst.

Für die Formen erster Gattung gelten nun die folgenden leicht zu beweisenden Sätze:

1) Die Summe zweier (oder mehrerer) Formen erster Gattung von derselben Dimension ist wieder eine Form erster Gattung. Denn sind für jeden Linearfactor ξ die Producte $(\xi\bar{\eta})$ und $(\xi\bar{\eta}')$ nebst ihren conjugirten

für $\xi = 0$ ebenfalls gleich Null, so gilt dasselbe auch von ihrer Summe, d. h. von $\xi(\bar{\eta}+\bar{\eta}')$.

2) Das Product einer beliebigen Form erster Gattung $\bar{\eta}$ und einer anderen *ganzen* algebraischen Form η ist wiederum eine Form erster Gattung. Denn ist für jeden Linearfactor ξ $(\xi\bar{\eta}) = 0$ an der Nullstelle von ξ, so gilt dasselbe auch von dem Producte $\xi(\eta\bar{\eta})$, wenn η algebraisch ganz also allenthalben endlich ist.

Hieraus ergiebt sich als Corollar, dass auch das Product $u\bar{\eta}$ der ersten Gattung angehört, wenn u eine beliebige ganze *rationale* Form von (x_1, x_2) ist.

3) Eine rationale Form u von x_1, x_2 ist dann und nur dann von der ersten Gattung, wenn sie ganz ist, denn besässe sie einen Nenner ξ, so könnte ξu an der Stelle $\xi = 0$ nicht verschwinden.

Endlich ergiebt sich aus den beiden ersten Sätzen noch der folgende:

4) Sind $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)})$ irgendwelche Formen erster Gattung, so ist jede homogene Form:

$$\bar{\eta} = u_1\bar{\eta}^{(1)}+\cdots+u_n\bar{\eta}^{(n)}$$

ebenfalls eine solche Form, wenn $u_1, \ldots, u_n$ beliebige ganze rationale Formen von x_1, x_2 sind.

§ 2.

Die Beziehung zwischen den Fundamentalsystemen für die ganzen algebraischen Formen und für die Formen erster Gattung.

In der bereits erwähnten früheren Arbeit habe ich nachgewiesen dass alle ganzen homogenen Formen η und nur sie durch ein sogenanntes Fundamentalsystem $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ in der Form:

$$\eta = u_1\eta^{(1)}+\cdots+u_n\eta^{(n)}$$

dargestellt werden können, deren Coefficienten ganze homogene Formen von (x_1, x_2) sind.

Ich will jetzt zeigen, dass man ganz ebenso die Formen erster Gattung $\bar{\eta}$ und nur sie eindeutig durch ein „Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung“ $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)})$ in der Form:

$$\bar{\eta} = u_1\bar{\eta}^{(1)}+\cdots+u_n\bar{\eta}^{(n)}$$

mit ganzen Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ darstellen kann.

Hierzu führen die folgenden Bemerkungen über algebraische Systeme und ihre reciproken Systeme. Es seien

$$\eta^{(1)}, \quad \eta^{(2)}, \quad \ldots, \quad \eta^{(n)}$$

n beliebige aber unabhängige homogene Formen, es soll also die Determinante des algebraischen Systemes

$$(\eta_k^{(i)}) = \begin{pmatrix} \eta_1^{(1)} & \ldots & \eta_1^{(n)} \\ \vdots & & \\ \eta_n^{(1)} & \ldots & \eta_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

von Null verschieden sein; dann giebt es ein und nur ein zu diesem reciprokes System:

$$(\overline{\eta}_k^{(i)}) = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_1^{(1)} & \ldots & \overline{\eta}_1^{(n)} \\ \vdots & & \\ \overline{\eta}_n^{(1)} & \ldots & \overline{\eta}_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

welches mit ihm componirt das Einheitssystem ergiebt. Die Elemente desselben ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\overline{\eta}_k^{(i)} = \frac{H_k^{(i)}}{H}, \tag{1.}$$

wo $H = |\eta_k^{(i)}|$ und $H_k^{(i)}$ die zu dem Elemente $\eta_k^{(i)}$ gehörige Unterdeterminante $(n-1)$-ter Ordnung von H bedeutet. Also sind die Elemente $\overline{\eta}$ rationale Functionen von (x_1, x_2) und den n conjugirten Grössen $y_1, \ldots, y_n$, jedoch folgt aus der obigen Darstellung (1.) der Elemente $\overline{\eta}_k^{(i)}$ leicht, dass allgemein die Elemente der $k$ten Zeile des reciproken Systemes nur von y_k und (x_1, x_2) explicite abhängen. Vertauscht man nämlich in (1.) irgend zwei conjugirte Grössen y_r und y_s mit einander, so bleibt, falls beide von y_k verschieden sind, $\overline{\eta}_k^{(i)}$ ungeändert, weil auf der rechten Seite, sowohl der Zähler als der Nenner sein Zeichen ändert; vertauscht man dagegen y_k selbst mit einem conjugirten Elemente y_l, so gehen $H_k^{(i)}$ und H bezw. in $-H_l^{(i)}$ und $-H$ über, d. h. $\overline{\eta}_k^{(i)}$ wird hierdurch in $\overline{\eta}_l^{(i)}$ verwandelt. Die Elemente $\overline{\eta}_k^{(i)}$ der $k$ten Zeile von $(\overline{\eta}_k^{(i)})$ sind also symmetrische Functionen von $y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n$ können also als rationale Functionen von y_k, x_1, x_2 dargestellt werden, und die n Elemente $\overline{\eta}_1^{(i)}, \ldots, \overline{\eta}_n^{(i)}$ einer Verticalreihe sind ebenso wie $\eta_1^{(i)}, \ldots, \eta_n^{(i)}$ conjugirte algebraische Functionen.

Sind ferner $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ die Dimensionen der homogenen Formen $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}$, so sind auch $\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)}$ homogen und ihre Dimensionen

sind bezw. $-\mu_1, -\mu_2, \ldots, -\mu_n$, denn in der Darstellung (1.) eines jeden Elementes $\bar{\eta}_k^{(i)}$ des reciproken Systemes hat der Nenner die Dimension $(\mu_1+\cdots+\mu_n)$, der Zähler die Dimension $(\mu_1+\cdots+\mu_n)-\mu_i$, weil in ihm die $i$te Colonne von H fortgelassen ist, also besitzt $\bar{\eta}_k^{(i)}$ in der That die Dimension $-\mu_i$.

Sind die Elementartheiler der beiden Systeme $(\eta_k^{(i)})$ und $(\bar{\eta}_k^{(i)})$ beziehlich

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_n \quad \text{und} \quad \bar{e}_1, \quad \bar{e}_2 \quad \ldots, \quad \bar{e}_n$$

so sind nach einer bekannten Eigenschaft der reciproken Systeme die einen abgesehen von ihrer Reihenfolge die reciproken Werthe der anderen, es ist nämlich allgemein:

$$\bar{e}_i = \frac{1}{e_{n-i+1}},$$

denn bei dieser Anordnung ist ja jede der Grössen $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ ein Vielfaches der vorhergehenden.

Es sei nun speciell $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für die ganzen algebraischen Formen des Bereiches, so soll bewiesen werden, dass das reciproke System $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung ist.

Ist zunächst $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ ein Fundamentalsystem, so sind die Elementartheiler $e_1, \ldots, e_n$ des Systemes $(\eta_k^{(i)})$ ganze reducirte Wurzelformen. Hieraus folgt zunächst, dass die Elemente $\bar{\eta}_k^{(i)}$ selbst sämmtlich Formen erster Gattung sind. In der That ist ihr grösster gemeinsamer Theiler gleich dem ersten Elementartheiler $\bar{e}_1 = \frac{1}{e_n}$ des Systemes $(\bar{\eta}_k^{(i)})$; alle diese Elemente können also in der Form

$$\bar{\eta}_k^{(i)} = \frac{\gamma_k^{(i)}}{e_n} \tag{2.}$$

geschrieben werden, wo die Zähler $\gamma_k^{(i)}$ sämmtlich algebraisch ganz sind, während der gemeinsame Nenner nach der Voraussetzung nur Linearfactoren mit positiven echt gebrochenen Exponenten enthält. Also sind $\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)}$ in der That sämmtlich Formen erster Gattung. Dasselbe gilt auch von jeder Form:

$$\bar{\eta} = u_1\bar{\eta}^{(1)}+\cdots+u_n\bar{\eta}^{(n)}, \tag{3.}$$

wenn $u_1, \ldots, u_n$ beliebige ganze rationale Formen von x_1, x_2 sind, denn auch diese stellen ja wegen (2.) ebenfalls nur algebraische Formen dar, deren Nenner höchstens gleich e_n ist. Ist aber umgekehrt $\bar{\eta}$ in jener Glei-

chung (3.) eine Form erster Gattung, so müssen $u_1, \ldots, u_n$ nothwendig ganz sein. Multiplicirt man nämlich die n aus (3.) sich ergebenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= u_1\bar{\eta}_1^{(1)}+\cdots+u_n\bar{\eta}_1^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \bar{\eta}_n &= u_1\bar{\eta}_n^{(1)}+\cdots+u_n\bar{\eta}_n^{(n)} \end{aligned}$$

der Reihe nach mit $\eta_1^{(h)}, \ldots, \eta_n^{(h)}$ und addirt sie, so erhält man für jeden der Coefficienten u_h die Darstellung:

$$u_h = \bar{\eta}_1\eta_1^{(h)}+\bar{\eta}_2\eta_2^{(h)}+\cdots+\bar{\eta}_n\eta_n^{(h)},$$

und da hier die n Formen $\eta_1^{(h)}, \ldots, \eta_n^{(h)}$ algebraisch ganz, aber $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n$ Formen erster Gattung sind, so müssen $u_1, \ldots, u_n$ selbst Formen erster Gattung sein, und da sie rational sind, so müssen sie nach dem Satze (3.) am Ende des vorigen Abschnittes nothwendig *ganze* rationale Formen von (x_1, x_2) sein.

Also ist das System $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)})$ in der That stets ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung, wenn sein reciprokes $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ ein solches für die ganzen algebraischen Formen ist. Da nun in der vorigen Arbeit nachgewiesen war, dass ein solches Fundamentalsystem $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ für die ganzen algebraischen Formen stets gefunden werden kann, so ist damit auch die Existenz mindestens eines Fundamentalsystemes für die Formen erster Gattung dargethan. Hat man nun ausser $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)})$ noch irgend ein anderes Fundamentalsystem $(\bar{\bar{\eta}}^{(1)}, \ldots, \bar{\bar{\eta}}^{(n)})$ für jene Formen erster Gattung, so ist jedes Element des einen durch das andere mit *ganzen* Coefficienten darstellbar; da somit die beiden Systeme $(\bar{\eta}_k^{(i)})$ und $(\bar{\bar{\eta}}_k^{(i)})$ einander äquivalent sind, so besitzen sie gleiche Elementartheiler. Demnach besitzt auch das reciproke System zu $(\bar{\bar{\eta}}^{(1)}, \ldots, \bar{\bar{\eta}}^{(n)})$ dieselben Elementartheiler wie $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ und da diese sämmtlich ganze reducirte Wurzelformen sind, so ist auch das zu $(\bar{\bar{\eta}}^{(1)}, \ldots, \bar{\bar{\eta}}^{(n)})$ reciproke System ein Fundamentalsystem für die ganzen homogenen Formen des Bereiches, man erhält somit den folgenden wichtigen Satz:

> Ein System ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung eines Bereiches, wenn sein reciprokes ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen desselben Bereiches ist.

Ich möchte an dieser Stelle auf die schöne Arbeit von *Dedekind* und *Weber,* Theorie der algebraischen Function einer Veränderlichen (dieses Journal Bd. 92) hinweisen, in welcher die Beziehungen reciproker Systeme allerdings in anderer Bezeichnungsweise und ohne die Benutzung der algebraischen Elementartheiler, behandelt werden. Jedoch wird a. a. O. die im folgenden Abschnitte dieser Arbeit gefundene charakteristische Eigenschaft der Fundamentalsysteme der Formen erster Gattung nicht hergeleitet; dies war schon deshalb nicht möglich, weil die Herren Verfasser überhaupt die Elementartheiler algebraischer Systeme nicht in Betracht gezogen haben, und weil sie von vornherein nur die algebraischen *Functionen* und nicht die homogenen algebraischen *Formen* betrachten, deren Hinzuziehung für die ausnahmslose Gültigkeit jenes Satzes unerlässlich ist. Ebenso ergiebt sich nicht die Beziehung, welche zwischen den Elementartheilern eines beliebigen Systems und den Theilern der beiden Fundamentalsysteme $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ und $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ besteht, und deren Herleitung den wichtigsten Theil der vorliegenden beiden Arbeiten bildet.

§ 3.

Die charakteristischen Eigenschaften eines Fundamentalsystems für die Formen erster Gattung.

Die im letzten Abschnitte gefundene Beziehung zwischen einem Fundamentalsysteme $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ für die ganzen Formen und einem solchen $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ für die Formen erster Gattung will ich jetzt benutzen, um die charakteristische Eigenschaft dieses Systems $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ anzugeben, und um ein Verfahren zu entwickeln, durch welches man von einem beliebigen algebraischen Systeme $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ ausgehend direct zu einem Fundamentalsysteme für die Formen erster Gattung und damit auch zu einem vollständigen Systeme von Integralen erster Gattung gelangen kann.

Ein Fundamentalsystem $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ für die ganzen Formen war als solches dadurch vollständig charakterisirt, dass seine Elementartheiler sämmtlich *ganze* reducirte Wurzelformen sind, d. h. solche, deren Linearfactoren nur positive echte Brüche als Exponenten haben. Da nun das Fundamentalsystem $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ reciprok zu $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ ist, so müssen seine Elementartheiler die reciproken Werthe von ganzen reducirten Wurzelformen sein, d. h. solche deren Linearfactoren lauter negative echte Brüche als Exponenten haben.

Ebenso nun wie eine Wurzelform eine *ganze* reducirte Form genannt wurde, wenn alle ihre Exponenten *positive echte* Brüche sind, so soll eine Wurzelform, deren Exponenten sämmtlich *negative echte* Brüche sind, welche also die Form hat:

$$d(x_1, x_2) = \xi_1^{-\delta_1} \ldots \xi_h^{-\delta_h} \qquad (0 < \delta_i < 1)$$

eine *gebrochene reducirte Wurzelform* genannt werden. Dann ist der reciproke Werth jeder ganzen reducirten Wurzelform eine gebrochene reducirte Wurzelform und umgekehrt.

Hieraus folgt zunächst, dass die Elementartheiler eines Fundamentalsystemes $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ für die Formen erster Gattung sämmtlich gebrochene reducirte Wurzelformen sind. Ist umgekehrt $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ ein System, dessen Elementartheiler gebrochene reducirte Wurzelformen sind, so ist es ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung, denn unter dieser Voraussetzung sind die Elementartheiler seines reciproken Systemes ganze reducirte Wurzelformen, dieses ist also ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen, mithin $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ ein solches für die Formen erster Gattung. Es ergiebt sich also der wichtige Satz:

> Ein System $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für die algebraischen Formen erster Gattung, wenn seine Elementartheiler reducirte gebrochene Wurzelformen sind.

Jedes algebraische System $(Y_k^{(i)})$ ist äquivalent einem Diagonalsysteme $D_1(x_1, x_2), D_2(x_1, x_2), \ldots, D_n(x_1, x_2))$, dessen Elemente lauter Wurzelformen sind. Sind:

$$(1.) \qquad \begin{cases} \xi^{\delta_1}, & \xi^{\delta_2}, & \ldots, & \xi^{\delta_n}, \\ \xi'^{\delta'_1}, & \xi'^{\delta'_2}, & \ldots, & \xi'^{\delta'_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{cases}$$

die bezw. in $D_1, \ldots, D_n$ enthaltenen gebrochenen Potenzen der einzelnen Linearfactoren $\xi, \xi', \ldots$ so wird jenes Diagonalsystem $(D_1, \ldots, D_n)$ im Sinne der Aequivalenz nicht geändert, wenn man jene Potenzen in den einzelnen Zeilen von (1.) beliebig unter einander permutirt, und alsdann die unter einander stehenden Potenzen mit einander multiplicirt. Speciell erhält man das System $(E_1, \ldots, E_n)$ der Elementartheiler von $(Y_k^{(i)})$, wenn man die Anordnung in (1.) so gemacht voraussetzt, dass die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \ldots; \delta'_1, \delta'_2, \ldots; \ldots)$ ihrer Grösse nach auf einander folgen. Ist nun speciell das System $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für die ganzen

algebraischen Formen, so müssen *alle* Exponenten δ_i, δ_i', ... positive echte Brüche sein, ist es dagegen ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung, so müssen jene Exponenten negative echte Brüche sein; im ersten Falle sind also die Wurzelformen $(D_i(x_1, x_2))$ bei *jeder* Anordnung reducirte ganze, im zweiten Falle reducirte gebrochene Wurzelformen, und auch diese allgemeinere Bedingung ist charakteristisch dafür, dass ein gegebenes System eine jener beiden Eigenschaften besitze.

Ist aber ein beliebiges algebraisches System $(Y_k^{(i)})$ einem Diagonalsystem $(D_i(x_1, x_2))$ äquivalent, so ist wie in der vorigen Abhandlung bewiesen wurde, jedes andere System $(y_k^{(i)})$ einem Diagonalsysteme $d_i(x_1, x_2)$ äquivalent, welches so angeordnet vorausgesetzt werden kann, dass je zwei entsprechende Wurzelformen $D_i(x_1, x_2)$ und $d_i(x_1, x_2)$ in einem rationalen Verhältniss stehen, dass also die n Quotienten $\frac{D_i(x_1, x_2)}{d_i(x_1, x_2)}$ *rationale* homogene Formen von (x_1, x_2) sind. Man findet daher alle Diagonalsysteme $(d_i(x_1, x_2))$, wenn man die Exponenten $(\delta_i, \delta_i', \ldots)$ der in den Wurzelfunctionen $D_i(x_1, x_2)$ enthaltenen Potenzen ξ^{δ_i}, $\xi'^{\delta_i'}$, ... um beliebige *ganze* Zahlen vermehrt oder vermindert. Unter den so sich ergebenden Systemen $(d_i(x_1, x_2))$ giebt es nun eines und nur eines, dessen Exponenten δ, δ' sämmtlich *positive* echte Brüche und ebenso auch nur ein einziges, wo alle jene Exponenten *negative* echte Brüche sind, und zwar erhält man diese, wenn man die ursprünglichen Exponenten δ_i, δ_i', ..., das eine Mal durch ihre kleinsten positiven, das andere Mal durch ihre kleinsten negativen Reste ersetzt, und die so sich ergebenden Diagonalsysteme $(d_i(x_1, x_2))$ und $(\bar{d}_i(x_1, x_2))$ sind es daher, denen die beiden Arten von Fundamentalsystemen beziehlich äquivalent sein müssen. Offenbar erhält man aber jene Systeme (d_i) und $(\bar{d}_i)$ auch dadurch aus dem gegebenen Systeme (D_i), wenn man jedes seiner einzelnen Elemente $D_i(x_1, x_2)$ das eine Mal durch den grössten in ihm enthaltenen *rationalen* Theiler $[D_i(x_1, x_2)]$ das andere Mal durch sein kleinstes *rationales* Vielfaches $\{D_i(x_1, x_2)\}$ dividirt, und hierdurch hat man ein directes und sehr elegantes Verfahren, um aus den Elementartheilern eines ganz beliebig gegebenen algebraischen Systemes $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ z. B. von $(1, y, y^2, \ldots, y^{n-1})$ die Elementartheiler des Fundamentalsystemes für die ganzen Grössen, sowie für die algebraischen Grössen erster Gattung abzuleiten. Ersetzt man jetzt nämlich das System $(D_i(x_1, x_2))$ durch das ihm äquivalente rational bestimmbare System $(E_i(x_1, x_2))$ der Elementartheiler von $(Y_k^{(i)})$ so kann jenes Resultat in dem folgenden einfachen Satze ausgesprochen werden

Es sei $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ irgend ein unabhängiges System von n algebraischen Functionen oder Formen des Körpers $\mathfrak{G}(x)$ und

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_n$$

die Elementartheiler des Systemes $(Y_k^{(i)})$; sind dann

$$[E_1], \quad [E_2], \quad \ldots, \quad [E_n]$$

die grössten rationalen Theiler und

$$\{E_1\}, \quad \{E_2\}, \quad \ldots, \quad \{E_n\}$$

die kleinsten rationalen Vielfachen derselben, so ist das Fundamentalsystem $(\eta_k^{(i)})$ für die ganzen algebraischen Formen dem System

$$\left(\frac{E_1}{[E_1]}, \ldots, \frac{E_n}{[E_n]}\right) = (R(E_i))$$

von reducirten ganzen Wurzelformen, dagegen das Fundamentalsystem $(\bar{\eta}_k^{(i)})$ für die Formen erster Gattung dem Systeme:

$$\left(\frac{E_1}{\{E_1\}}, \ldots, \frac{E_n}{\{E_n\}}\right) = (\bar{R}(E_i))$$

von reducirten gebrochenen Wurzelformen äquivalent und aus ihnen werden die Elementartheiler jenes Systems einfach dadurch erhalten, dass man die in ihnen enthaltenen Potenzen derselben Linearfactoren nach der Grösse ihrer Exponenten ordnet.

Mit Hülfe des so gefundenen Fundamentalsystemes kann man nunmehr alle unabhängigen Integranden erster Gattung vollständig aufstellen und ihre Anzahl bestimmen. Nach den im ersten Paragraphen dieser Arbeit gefundenen Resultaten sind alle diese und nur sie in dem folgenden Ausdruck enthalten:

$$Y = x_2^2 \bar{\eta} = x_2^2 (u_1 \bar{\eta}^{(1)} + \cdots + u_n \bar{\eta}^{(n)}),$$

wo $\bar{\eta}$ eine Form der (-2)-ten Dimension ist, wo also $u_1, u_2, \ldots, u_n$ beliebige ganze homogene Formen der Dimensionen $\mu_1 - 2$, $\mu_2 - 2$, $\ldots$, $\mu_n - 2$ sind, da diese ja die Dimensionen von $\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)}$ zu -2 ergänzen; jedoch sind alle diejenigen Coefficienten u_i gleich Null anzunehmen, für welche $\mu_i - 2$ negativ also u_i nicht ganz sein würde. Da nun jede ganze Form u_i der Dimension $\mu_i - 2$ genau $\mu_i - 1$ Glieder enthält, so erkennt man leicht, (vgl. auch meine Arbeit „Theorie der algebraischen Functionen und der algebraischen Integrale“, dieses Journal Bd. 109), dass die Anzahl p der unab-

hängigen Integrale erster Gattung, oder das Geschlecht des Bereiches $\mathfrak{G}(x)$ durch die Gleichung

$$p = N-n+1$$

gegeben ist, wenn $N=(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)$ die Gesammtdimension des Fundamentalsystemes $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ für die ganzen Formen bedeutet.

Als eine ganz einfache Anwendung möge in dieser Arbeit noch das Geschlecht der allgemeinen reinen Gleichung des $n$ten Grades bestimmt und ihre Integrale erster Gattung angegeben werden. Sei also, wie in der vorigen Arbeit:

$$y^n = a(x) = \Pi \xi_i^{n_i},$$

wo die ξ_i die homogenen Linearfactoren von $a(x)$ bedeuten, wo also die Summe der positiven und negativen Exponenten n_i gleich Null ist. Wie a. a. O. ausgeführt wurde ist in diesem Falle das System:

$$1, \quad y, \quad y^2, \quad \ldots, \quad y^{n-1}$$

bereits ein kanonisches für jeden Linearfactor ξ, weil allgemein $y^i = a^{\frac{i}{n}}$ ist. Also ist das hieraus abgeleitete System $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$

$$1, \quad \frac{y}{\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}}, \quad \ldots, \quad \frac{y^{n-1}}{\left\{a^{\frac{n-1}{n}}\right\}}$$

ein Fundamentalsystem für die homogenen Formen erster Gattung. Also sind alle Integranden erster Gattung und nur sie als homogene lineare Functionen mit constanten Coefficienten der folgenden homogenen Formen der nullten Dimension darstellbar:

$$\frac{x_1^{h_i} x_2^{\varrho_i - h_i} y^i}{\left\{a^{\frac{1}{i}}\right\}}, \qquad (h_i = 0, 1, \ldots, \varrho_i - 2)$$

wo allgemein ϱ_i die Dimension der rationalen homogenen Form $\left\{a^{\frac{1}{i}}\right\}$ bedeutet, und wo h_i nur die Werthe bis zu ϱ_i-2 annehmen darf, weil jeder Integrand ein Vielfaches von x_2^2 ist; hier sind jedoch alle die Functionen fortzulassen, für welche ϱ_i einen der Werthe 0 oder 1 hat, weil für sie h_i negativ sein würde. Ersetzt man hier x_2 durch 1 und x_1 durch x, wobei jene Formen ungeändert bleiben, so ergiebt sich die folgende einfache Darstellung aller Integrale erster Gattung:

$$J = \sum_{i,h_i} c_{ih_i} \int \frac{x^{h_i} y^i}{\left\{a^{\frac{i}{n}}\right\}} dx, \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ h_i = 0, 1, \ldots, \varrho_i - 2 \end{pmatrix}$$

wo die Coefficienten c_{ih_i} beliebige Constanten bedeuten.

Das Geschlecht der durch die reine Gleichung constituirten Klasse ist gleich der Gesammtdimension N des Fundamentalsystemes, vermindert um $n-1$. Nach den Ergebnissen der vorigen Arbeit war aber:

$$N = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha}(n-(n,\ n_\alpha)),$$

wo (n, n_α) den grössten gemeinsamen Theiler von n und n_α bedeutet, und sich die Summation auf alle Exponenten n_α bezieht. Also ist für die reine Gleichung

$$p = \tfrac{1}{2}\sum(n-(n,\ n_\alpha))-n+1.$$

In dem einfachsten Falle, in welchem $a = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und $f(x)$ und $g(x)$ beide von gleichem Grade sind, kann jene reine Gleichung folgendermassen geschrieben werden:

$$y^n = \frac{\xi_1 \dots \xi_r}{\xi'_1 \dots \xi'_r},$$

wo $\xi_1, \dots, \xi_r; \xi'_1, \dots, \xi'_r$ sämmtlich von einander verschiedene Linearfactoren sind. Hier ist für jeden Linearfactor $(n, n_\alpha) = 1$, es ergiebt sich also für p der Werth:

$$p = \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{2r}(n-1)-n+1 = (r-1)(n-1).$$

Berlin, den 16. Juli 1895.

Druck und Verlag von Georg Reimer in Berlin.

Jahresbericht

des

Königlichen kath. Gymnasiums

zu Sigmaringen

für das

Schuljahr 1898—1899.

Inhalt:

1. Die Maxima und Minima einer verwandelbaren Funktion von Oberlehrer Eduard Herff.
2. Schulnachrichten vom Direktor Dr. J. B. Eberhard.

Sigmaringen, 1899.
M. Liehner'sche Hofbuchdruckerei.

1899. Progr. Nr. 492.

Die Maxima und Minima einer verwandelbaren Funktion.

Die erste Aufgabe soll darin bestehen, als Beispiel eine nicht homogene Funktion 2ten Grades von n unabhängigen Variabeln zu suchen, die sich durch die Einführung eines neuen Systems von unabhängigen Variabeln mittelst einer linearen Substitution in eine Funktion von 3, aber nicht in eine solche von 2 Variabeln verwandeln lässt. Zu diesem Zwecke möge von den homogenen Funktionen 2ten Grades, von den sogenannten quadratischen Formen von n Variabeln ausgegangen und die Bedingungen aufgestellt werden, unter denen sich diese in quadratische Formen von weniger als n Variabeln verwandeln lassen. Diese Bedingungen drückt folgender Satz aus:

„Damit eine gegebene quadratische Form $f(x_1 \ldots x_n)$ durch eine Substitution des ersten Grades von nicht verschwindender Determinante in eine quadratische Form verwandelt werden kann, die $(n-1)$ Variabeln enthält und in keine Form einer geringern Anzahl von Variabeln verwandelt werden kann, ist es nötig und hinreichend, dass für das der gegebenen Form zugehörende Schema die Determinante des n^{ten} Grades und alle partiellen Determinanten des $(n-1)^{ten}$, $(n-2)^{ten}$ Grades bis zu dem $(n-1+1)^{ten}$ Grade einschliesslich verschwinden, jedoch nicht alle partiellen Determinanten des $(n-1)^{ten}$ Grades verschwinden."

Um nun eine quadratische Form von n Variabeln, welche die zur Verwandlung in eine Form von weniger als n Variabeln erforderlichen Bedingungen erfüllt, wirklich in eine solche zu transformieren, kann man folgende Gleichung benutzen, welche entsteht, indem man in eine quadratische Form $f(x_1 \ldots x_n)$ statt der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ bezw. die Aggregate $x_1 + \xi_1 \ldots x_n + \xi_n$ setzt:

$$(1)\quad f(x_1 + \xi_1 \ldots x_n + \xi_n) = f(x_1 \ldots x_n) + 2 f_1(\xi_1 \ldots \zeta_n) x_1 + \ldots + 2 f_n(\xi_1 \ldots \zeta_n) x_n + f_1(\xi_1 \ldots \xi_n) \xi_1 + \ldots + f_n(\xi_1 \ldots \zeta_n) \xi_n.$$

Wenn nun eine quadratische Form von n Variabeln die Eigenschaft hat, dass sie sich in eine solche von 3 Variabeln, aber nicht in eine von 2 Variabeln verwandeln lässt, so muss sie, wenn ihre Gestalt ist:

$$(2)\quad \begin{aligned} f(x_1 \ldots x_n) = {} & a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2 a_{1n} x_1 x_n \\ & + a_{2n} x_2^2 + \ldots + 2 a_{2n} x_2 x_n \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + a_{nn} x_n^2. \end{aligned}$$

folgende Bedingungen erfüllen.

Erstens: Die Determinante des n^{ten} Grades des symmetrischen Schemas der n^2 Elemente

$$(3)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$ muss gleich Null sein

Zweitens: Es müssen verschwinden alle partiellen Determinanten des $(n-1)^{ten}$, $(n-2)^{ten}$, bis einschliesslich des $[n-(n-3)+1]^{ten}$, das ist des 4ten Grades.

Drittens: Eine partielle Determinante des $[n-(n-3)]^{ten}$, das ist des 3ten Grades darf nicht Null sein.

Die Erfüllung dieser Bedingungen möge in Bezug auf die Funktion (2) vorausgesetzt sein, und die partielle Determinante des 3ten Grades, welche nicht Null ist, die des symmetrischen Schemas der übrig bleibenden 9 Elemente

$$(4)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{matrix}$$

sein; sie heisse:

$$(5)\quad D = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Die Funktion (2) lässt sich dann folgendermassen in eine von 3 Variabeln transformieren. Wenn man in dieselbe statt der Variabeln $x_1 \dots x_n$ bezw. die Aggregate $x_1 + \xi_1 \dots x_n + \xi_n$ setzt, so verwandelt sie sich nach der Gleichung (1) in

$$\begin{aligned}(6)\quad f(x_1 + \xi_1 \dots x_n + \xi_n) = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \\ & + 2(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n)x_1 + \dots + 2(a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + a_{nn}\xi_n)x_n \\ & + (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n)\xi_1 + \dots + (a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + a_{nn}\xi_n)\xi_n.\end{aligned}$$

Es müssen nun folgende Gleichungen gelöst werden:

$$(7)\quad \begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n &= 0 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n &= 0 \\ \dots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + a_{nn}\xi_n &= 0. \end{aligned}$$

Dies kann für nicht verschwindende Werte der Variabeln $\xi_1 \dots \xi_n$ stattfinden, da die Determinante des n^{ten} Grades des Schemas (3) nach der Voraussetzung gleich Null ist.

Da ferner für dieses Schema auch alle partiellen Determinanten des $(n-1)^{ten}$ u. s. f. bis einschliesslich des 4ten Grades verschwinden, jedoch die partielle Determinante des $(n-3)^{ten}$ Grades D in (5) nicht Null ist, so hat man es nur mit den 3 Gleichungen zu thun:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 + a_{13}\,\xi_3 = -\,a_{14}\,\xi_4 - \ldots - a_{1n}\,\xi_n\\
(8)\quad &a_{21}\,\xi_1 + a_{22}\,\xi_2 + a_{23}\,\xi_3 = -\,a_{24}\,\xi_4 - \ldots - a_{2n}\,\xi_n\\
&a_{31}\,\xi_1 + a_{32}\,\xi_2 + a_{33}\,\xi_3 = -\,a_{34}\,\xi_4 - \ldots - a_{3n}\,\xi_n
\end{aligned}
$$

Da D nicht Null ist, so ist es erlaubt zu setzen:

$$
\begin{aligned}
&\xi_4 = -\,x_4\\
(9)\quad &\xi_5 = -\,x_5\\
&\ldots\ldots\\
&\xi_n = -\,x_n
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 + a_{13}\,\xi_3 = a_{14}\,x_4 + \ldots + a_{1n}\,x_n\\
(10)\quad &a_{21}\,\xi_1 + a_{22}\,\xi_2 + a_{23}\,\xi_3 = a_{24}\,x_4 + \ldots + a_{2n}\,x_n\\
&a_{31}\,\xi_1 + a_{32}\,\xi_2 + a_{33}\,\xi_3 = a_{34}\,x_4 + \ldots + a_{3n}\,x_n.
\end{aligned}
$$

Die Werte vor ξ_1, ξ_2 und ξ_3 sind nun, weil D nicht verschwindet, und wenn das mit $\alpha\rho\sigma$ correspondierende adjungierte Element, hier eine partielle Determinante des 2 ten Grades, mit $A\rho\sigma$ bezeichnet wird:

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{A_{11}(a_{14}x_4 + \ldots + a_{1n}x_n) + A_{21}(a_{24}x_4 + \ldots + a_{2n}x_n) + A_{31}(a_{34}x_4 + \ldots + a_{3n}x_n)}{D}\\
(11)\quad \xi_2 &= \frac{A_{12}(a_{14}x_4 + \ldots + a_{1n}x_n) + A_{22}(a_{24}x_4 + \ldots + a_{2n}x_n) + A_{32}(a_{34}x_4 + \ldots + a_{3n}x_n)}{D}\\
\xi_3 &= \frac{A_{13}(a_{14}x_4 + \ldots + a_{1n}x_n) + A_{23}(a_{24}x_4 + \ldots + a_{2n}x_n) + A_{33}(a_{34}x_4 + \ldots + a_{3n}x_n)}{D}
\end{aligned}
$$

Setzt man der Kürze halber:

$$
(12)\quad \begin{cases}
A_{11}\,a_{14} + A_{21}\,a_{24} + A_{31}\,a_{34} = c_{14}; \ldots A_{11}\,a_{1n} + A_{21}\,a_{2n} + A_{31}\,a_{3n} = c_{1n};\\
A_{12}\,a_{14} + A_{22}\,a_{24} + A_{32}\,a_{34} = c_{24}; \ldots A_{12}\,a_{1n} + A_{22}\,a_{2n} + A_{32}\,a_{3n} = c_{2n};\\
A_{13}\,a_{14} + A_{23}\,a_{24} + A_{33}\,a_{34} = c_{34}; \ldots A_{13}\,a_{1n} + A_{23}\,a_{2n} + A_{33}\,a_{3n} = c_{3n}
\end{cases}
$$

so folgt:

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= (c_{14}\,x_4 + \ldots + c_{1n}\,x_n)\,\frac{1}{D}\\
(13)\quad \xi_2 &= (c_{24}\,x_4 + \ldots + c_{2n}\,x_n)\,\frac{1}{D}\\
\xi_3 &= (c_{34}\,x_4 + \ldots + c_{3n}\,x_n)\,\frac{1}{D}
\end{aligned}
$$

Wegen der Gleichungen (7) und (9) wird nun aus der Funktion $f(x_1 \ldots x_n)$

$$
\begin{aligned}
(14)\quad f(x_1 \ldots x_n) &= f(x_1 + \xi_1,\ x_2 + \xi_2,\ x_3 + \xi_3) = a_{11}\left[x_1 + (c_{14}x_4 + \ldots + c_{1n}x_n)\,\frac{1}{D}\right]^2\\
&+ 2\,a_{12}\left[x_1 + (c_{14}x_4 + \ldots + c_{1n}x_n)\,\frac{1}{D}\right]\left[x_2 + (c_{24}x_4 + \ldots + c_{2n}x_n)\frac{1}{D}\right]\\
&+ 2\,a_{13}\left[x_1 + (c_{14}x_4 + \ldots + c_{1n}x_n)\,\frac{1}{D}\right]\left[x_3 + (c_{34}x_4 + \ldots + c_{3n}x_n)\frac{1}{D}\right]
\end{aligned}
$$

$$+ a_{22}\left[x_2 + (c_{24}x_4 + .. + c_{2n}x_n)\frac{1}{D}\right]^2 + 2a_{23}\left[x_2 + (c_{24}x_4 + c_{2n}x_n)\frac{1}{D}\right]$$
$$\left[x_3 + (c_{34}x_4 + .. + c_{3n}x_n)\frac{1}{D}\right]$$
$$+ a_{33}\left[x_3 + (c_{34}x_4 + .. + c_{3n}x_n)\frac{1}{D}\right]^2.$$

Wenn man ferner setzt:

$$\begin{aligned}(D\,x_1 + c_{14}x_4 + \ldots + c_{1n}x_n) &= x_1'\\ (15)\quad (D\,x_2 + c_{24}x_4 + \ldots + c_{2n}x_n) &= x_2'\\ (D\,x_3 + c_{34}x_4 + \ldots + c_{3n}x_n) &= x_3'\end{aligned}$$

so folgt:

$$(16)\quad f(x_1, x_2, .. x_n) = g(x_1', x_2', x_3') = a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + 2a_{13}x_1'x_3' + a_{22}x_2'^2 + 2a_{23}x_2'x_1' + a_{33}x_3'^2)\ \frac{1}{D^2}$$

Die ursprüngliche Funktion $f(x_1 \ldots x_n)$ ist also in eine von 3 Variabeln verwandelt worden, welche, da die Determinante D des Schemas (4) nach der Voraussetzung nicht Null ist, nicht in eine Funktion von 2 Variabeln verwandelt werden kann.

Bevor nun zu der nicht homogenen Funktion 2ten Grades von n Variabeln übergegangen werde, muss Folgendes vorausgeschickt werden, was später auf dieselben anwendbar sein wird.

Wenn man die beiden Gleichungen hat:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a\,\xi_1 + b\,\xi_2 = 0 \\ c\,\xi_1 + d\,\xi_2 = 0 \end{array}\right\}$$

so können dieselben für nicht verschwindende Werte von ξ_1 und ξ_2 nur dann beseitigt werden, wenn die Determinante des Schemas

$$(2)\quad \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

verschwindet, wenn also die Gleichung stattfindet

$$(3)\quad a\,d - bc = 0.$$

Ist dann neben diesen erfüllten Bedingungen z. B. a nicht Null, so hat man es nur noch mit der Gleichung

$$a\,\xi_1 + b\,\xi_2 = 0$$

zu thun, worin ξ_2 beliebig sein kann und für ξ_1 der Wert folgt:

$$\xi_1 = -\frac{b}{a}\,\xi_2.$$

Sollen nun die Werte für ξ_1 und ξ_2 eine nicht zu (1) gehörende Gleichung

(4) $c' \xi_1 + d' \xi_2 = 0$

befriedigen, so müsste stattfinden:

$$-\frac{b}{a} c' \xi_2 + d' \xi_2 = 0.$$

oder

(5) $(a d' - b c') \xi_2 = 0.$

Da nun ξ_2 nicht Null ist, so folgt:

(6) $a d' - b c' = 0.$

Das ist aber die Determinante des Schemas

(7) $\begin{matrix} a & b \\ c' & d' \end{matrix}$

welches aus (2) hervorgeht, indem die Coefficienten c′ und d′ von (4) die Stelle der Coefficienten c und d in der 2ten Horizontalreihe vertreten; aus (3) folgt ferner die Propartion

$a : b = c : d$ und aus (6)

$a : b = c' : d'$ also verhält sich:

$a : b = c : d = c' : d'.$

Es lässt sich demnach der Satz aufstellen:

Sollen die aus dem System (1) unter der Bedingung, dass die Determinante des Schemas (2) gleich Null ist, aber einer der Coefficienten a, b, c, d nicht verschwindet, für ξ_1 und ξ_2 hergeleiteten Werte eine nicht zu diesem System gehörenden Gleichung (4) derselben Variabeln befriedigen, so muss die Determinante eines Schemas (7), das aus dem Schema (2) folgt, indem die Coefficienten der betreffenden Gleichung die Stelle irgend einer Horizontalreihe vertreten, verschwinden, oder es müssen die Coefficienten der neuen Gleichung in demselben Verhältnisse stehen, wie die Coefficienten einer der Gleichungen (1).

Dieser Fall soll nun betrachtet werden für das System der Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 = 0 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 = 0 \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

Diese Gleichungen können für nicht verschwindende Werte von ξ_1, ξ_2, ξ_3 nur stattfinden, wenn die Determinante D des Schemas

$$(9)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

verschwindet, wenn also die Gleichung besteht

$$(10)\quad D = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{11}) = 0,$$

die vorausgesetzt sein möge; es soll ferner eine partielle Determinante des 2ten Grades nicht Null sein, etwa stattfinden:

(11) $A_{33} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \gtrless 0.$

Dann bleiben die Gleichungen:

$$(12)\quad \begin{cases} a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 = -\,a_{13}\,\xi_3 \\ a_{21}\,\xi_1 + a_{22}\,\xi_2 = -\,a_{23}\,\xi_3 \end{cases}$$

zu lösen, was für jedes beliebige, aber nicht verschwindende ξ_3 wegen (11) möglich ist; es folgen für ξ_1 und ξ_2 die Werte:

$$(13)\quad \begin{cases} \xi_1 = -\,\dfrac{\xi_3\,(a_{22}\,a_{13} - a_{12}\,a_{23})}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \\ \xi_2 = -\,\dfrac{\xi_3\,(a_{11}\,a_{23} - a_{13}\,a_{21})}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \end{cases}$$

Sollen nun die für ξ_1, ξ_2, ξ_3 gefundenen Werte eine nicht zu dem System (8) gehörende Gleichung derselben Variabeln:

(14) $b_1\,\xi_1 + b_2\,\xi_2 + b_3\,\xi_3 = 0$

befriedigen, so wird sich ergeben:

$$-\,\frac{\xi_3\,(a_{22}\,a_{33} - a_{12}\,a_{23})}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}\,b_1 - \frac{\xi_3\,(a_{11}\,a_{21} - a_{13}\,a_{21})}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}\,b_2 + b_3\,\xi_3 = 0, \text{ oder}$$

da $\xi_3 \gtrless 0$ ist:

(15) $b_1\,(a_{22}\,a_{13} - a_{12}\,a_{23}) + b_2\,(a_{11}\,a_{23} - a_{13}\,a_{21}) - b_3\,(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}) = 0.$

Dies ist aber die Determinante des Schemas

$$(16)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_1 & b_2 & b_3, \end{matrix}$$

das aus (9) folgt, indem die Elemente a_{31}, a_{32}, a_{33} der untersten Horizontalreihe vertreten werden resp. durch b_1, b_2, b_3, also durch die Coefficienten der Gleichung (14); ferner folgt wegen (11) für b_3 der Wert

$$(17)\quad b_3 = \frac{b_1\,(a_{22}\,a_{13} - a_{12}\,a_{23}) + b_2\,(a_{11}\,a_{23} - a_{13}\,a_{21}).}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$$

Diese Gleichung findet statt für beliebige Werte von b_1 und b_2, die aber nicht verschwinden dürfen; dann würden b_1 oder b_2 oder beide zugleich Null sein, so würde ja (14) nicht bestehen; umgekehrt wird für die aus (17) hergeleiteten Werte b_1, b_2, b_3 die Determinante von (16) verschwinden, da aus (17) rückwärts (15) folgt, und das ist ja die Determinante von (16).

Während sich gezeigt hat, dass die Determinante des 3ten Grades von (16) verschwindet, findet sich auch, dass eine partielle Determinante des 2ten Grades von (16) nicht verschwindet wegen der beliebigen Grössen b_1 und b_2. Das Schema (16) erfüllt also diejenigen Bedingungen, welche für das Schema (9) vorausgesetzt sind; und umgekehrt befriedigen in Folge dessen die aus (8) gefundenen Werte von ξ_1, ξ_2, ξ_3 auch die Gleichung (14).

Zweitens sollen mit D auch alle partiellen Determinante des 2ten Grades verschwinden, jedoch etwa der Coefficient a_{11} nicht gleich Null sein; dann bleibt nur noch die Gleichung

$$a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 + a_{13}\,\xi_3 = 0,$$

aus welcher für ξ_1 der Wert folgt

$$(19)\quad \xi_1 = -\frac{a_{12}\,\xi_2 + a_{13}\,\xi_3}{a_{11}}$$

wo ξ_2 und ξ_1 beliebig wählbar sind.

Wenn in diesem Falle die für ξ_1, ξ_2, ξ_3 bestimmten Werte die Gleichung (14) befriedigen sollen, so wird folgen:

$$-\left(f\frac{a_{12}\,\xi_2 + a_{13}\,\xi_3}{a_{11}}\right) b_1 + b_2\,\xi_2 + b_3\,\xi_3 = 0 \text{ oder}$$

$$(20)\quad (a_{11}\,b_2 - a_{12}\,b_1)\,\xi_2 + (a_{11}\,b_3 - a_{13}\,b_1)\,\xi_3 = 0.$$

Da nun ξ_2 und ξ_3 nicht Null sind, so ist (20) nur möglich, wenn die Gleichungen bestehen:

$$(21)\quad \begin{cases} a_{11}\,b_2 - a_{12}\,b_1 = 0 \\ a_{11}\,b_3 - a_{13}\,b_1 = 0 \end{cases}$$

Das sind aber partielle Determinanten des 2 ten Grades des Schemas (16); für die übrigen findet sich ebenfalls, dass sie Null werden; aus (21) folgt ferner, da $a_{11} \gtrless 0$ ist:

$$(22)\quad \begin{cases} b_2 = \dfrac{a_{12}}{a_{11}}\,b_1 \\ b_3 = \dfrac{a_{13}}{a_{11}}\,b_1 \end{cases}$$

wo b_1 beliebig, aber nicht Null sein darf; und findet umgekehrt (22) statt, das heisst, sind für beliebiges nicht verschwindendes b_1 die Werte für b_2 und b_3 nach (22) bestimmt, so folgt daraus (21). Da nun die partiellen Determinanten des 2 ten Grades des Schemas (16) verschwinden, so verschwinden selbstverständlich auch die Determinanten 3 ten Grades desselben, und demnach erfüllt dieses Schema auch in diesem Falle alle Bedingungen, die das Schema (9) befriedigt. Weil ferner aus (21) die Propartion

$$(23)\quad a_{11} : a_{12} : a_{13} = b_1 : b_2 : b_3$$

folgt, so müssen also, wenn die für ξ_1, ξ_2, ξ_3 unter den letztern Bedingungen hergeleiteten Werte die Gleichung (14) befriedigen sollen, die Coefficienten dieser Gleichung in demselben Verhältnisse stehen, wie die Coefficienten einer der Gleichungen (8). Fasst man nun die beiden Fälle für die 3 Gleichungen (8) zusammen, so kann man den Satz aufstellen: Sollen die aus dem System (8) für die Variabeln ξ_1, ξ_2, ξ_3 hergeleiteten Werte eine nicht zu diesem System gehörende Gleichung (14) befriedigen, so ist es für ein Schema, welches aus dem zu (8) gehörenden dadurch abgeleitet ist, dass die Coefficienten der letzten Gleichung die Stelle irgend einer Horizontalreihe in dem letztern vertreten, notwendig und hinreichend, dass es alle Bedingungen erfülle, welche für das ursprüngliche Schema vorausgesetzt sind. Ist für das Schema (9) die Determinante des 3 ten Grades gleich Null, eine partielle des 2 ten Grades nicht, so muss auch für das Schema (16) die Determinante des 3 ten Grades gleich Null sein, eine partielle des 2 ten Grades aber nicht; verschwinden für (9) die Determinanten des 3 ten Grades und alle partiellen

des 2 ten Grades, so müssen auch für (16) die Determinanten des 3 ten Grades und alle partiellen des 2 ten Grades verschwinden.

Diese Betrachtungen sollen nun ausgedehnt werden auf die n Gleichungen des I. Grades der n Variabeln $\xi_1 \ldots \xi_1$:

$$(24)\quad \begin{cases} a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 + \ldots + a_{1n}\,\xi_n = 0 \\ a_{21}\,\xi_1 + a_{22}\,\xi_2 + \ldots + a_{2n}\,\xi_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,\xi_1 + a_{n2}\,\xi_2 + \ldots + a_{nn}\,\xi_n = 0. \end{cases}$$

Dieses System kann für nicht verschindende Werte von $\xi_1 \ldots \xi_n$ nur dann bestehen, wenn die Determinante des n ten Grades des Schemas der n^2 Elemente

$$(25)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$$

gleich Null ist, was hier vorausgesetzt sein soll; also, wenn diese Determinante mit R bezeichnet wird, so soll sein:

$$(26)\quad R = \Sigma + a_{11}\,a_{22} \ldots a_{nn} = 0.$$

Ferner sollen mit R alle partiellen Determinanten des (n—1) ten, (n—2) ten u. s. w. bis einschliesslich des (n—1 + 1) ten Grades verschwinden, jedoch nicht eine des (n—1) ten Grades; dies sei die Determinante S des Schemas der $(n-1)^2$ Elemente:

$$(24)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,\,n-1} \\ a_{11} & a_{22} & \ldots & a_{2,\,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,\,n-1} \end{matrix}$$

Dann bleiben von (24) die Gleichungen zu lösen:

$$(28)\quad \begin{cases} a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 + \ldots + a_{1,\,n-1}\,\xi_{n-1} = -\,a_{1,\,n-1+1}\,\xi_{n-1+1} - \ldots - a_{1,n}\,\xi_n \\ a_{21}\,\xi_1 + a_{22}\,\xi_2 + \ldots + a_{2,\,n-1}\,\xi_{n-1} = -\,a_{2,\,n-1+1}\,\xi_{n-1+1} - \ldots - a_{1,n}\,\xi_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1,1}\,\xi_1 + a_{n-1,2}\,\xi_2 + \ldots + a_{n-1,n-1}\,\xi_{n-1} = -\,a_{n-1,n-1+1}\,\xi_{n-1+1} - \ldots - a_{n-1,n}\,\xi_n, \end{cases}$$

was für beliebige jedoch nicht verschwindende Werte von $\xi_{n-1+1} - \ldots - \xi_n$ möglich ist, da ja nach der Voraussetzung die Determinante S von (27) nicht Null ist. Wenn nun zur Abkürzung gesetzt wird

$$(29)\quad \begin{cases} A_{11}\,a_{1,\,n-1+1} + \ldots + A_{n-1,\,1}\,a_{n-1,\,n-1+1} = C_{1,\,n-1+1}, \ldots A_{11}\,a_{1,n} \\ \qquad + \ldots + A_{n-1,\,1}\,a_{n-1,n} = C_{1,n} \\ A_{12}\,a_{1,\,n-1+1} + \ldots + A_{n-1,\,2}\,a_{n-1,\,n-1+1} = C_{2,\,n-1+1}, \ldots A_{12}\,a_{1,n} \\ \qquad + \ldots + A_{n-1,\,2}\,a_{n-1,n} = C_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1,\,n-1}\,a_{1,\,n-1+1} + \ldots + A_{n-1,\,n-1}\,a_{n-1,\,n-1+1} = C_{n-1,\,n-1+1}, \ldots A_{1,\,n-1}\,a_{1,n} \\ \qquad + \ldots + A_{n-1,\,n-1}\,a_{n-1,n} = C_{n-1,n} \end{cases}$$

wo $A_{\varrho\sigma}$ das mit $\alpha_{\varrho\sigma}$ correspondierende adjungierte Element, also hier eine partielle Deter-

minante des $(n-1+1)^{ten}$ Grades bezeichnet von dem Schema (27), so folgen für $\xi_1 \ldots \xi_{n-1}$ die Werte:

$$(30)\quad \begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{1}{S}\,(c_{1,\,n-1+1}\,\xi_{n-1+1} + c_{1,\,n-1+2}\,\xi_{n-1+2} + \ldots + c_{1,n}\,\xi_n)\\
\xi_2 &= \frac{1}{S}\,(c_{2,\,n-1+1}\,\xi_{n-1+1} + c_{2,\,n-1+2}\,\xi_{n-1+2} + \ldots + c_{2,n}\,\xi_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\xi_{n-1} &= \frac{1}{S}\,(c_{n-1,\,n-1+1}\,\xi_{n-1+1} + c_{n-1,\,n-1+2}\,\xi_{n-1+2} + \ldots + c_{n-1,n}\,\xi_n)
\end{aligned}$$

Sollen nun die Werte für $\xi_1 \ldots \xi_n$ eine nicht zu (24) gehörende Gleichung

$$(31)\quad b_1\,\xi_1 + b_2\,\xi_2 + \ldots + b_n\,\xi_n = 0$$

befriedigen, so muss nach Einsetzung derselben die Gleichung stattfinden:

$$\begin{aligned}
&b_1\,(c_{1,\,n-1+1}\,\xi_{n-1+1} + c_{1,\,n-1+2}\,\xi_{n-1+2} + \ldots + c_{1,n}\,\xi_n)\,\frac{1}{S} +\\
&b_2\,(c_{2,\,n-1+1}\,\xi_{n-1+1} + c_{2,\,n-1+2}\,\xi_{n-1+2} + \ldots + c_{2,n}\,\xi_n)\,\frac{1}{S} +\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ b_{n-1}\,(c_{n-1,\,n-1+1}\,\xi_{n-1+1} + c_{n-1,\,n-1+2}\,\xi_{n-1+2} + \ldots + c_{n-1,\,n}\,\xi_n)\,\frac{1}{S}\\
&+ b_{n-1+1}\,\xi_{n-1+1} + b_{n-1+2}\,\xi_{n-1+2} + \ldots + b_n\,\xi_n = 0 \text{ oder:}
\end{aligned}$$

$$(32)\quad \begin{cases}
(b_1\,c_{1,\,n-1+1} + b_2\,c_{2,\,n-1+1} + \ldots + b_{n-1}\,c_{n-1,\,n-1+1} + S\,b_{n-1+1})\,\xi_{n-1+1} +\\
(b_1\,c_{1,\,n-1+2} + b_2\,c_{2,\,n-1+2} + \ldots + b_{n-1}\,c_{n-1,\,n-1+2} + S\,b_{n-1+2})\,\xi_{n-1+2} +\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(b_1\,c_{1,n} + b_2\,c_{2,n} + \ldots + b_{n-1}\,c_{n-1,n} + S\,b_n)\,\xi_n = 0.
\end{cases}$$

Da nun die 1 Variabeln $\xi_{n-1+1} \ldots \xi_n$ nicht verschwinden, so folgen die Gleichungen:

$$(33)\quad \begin{cases}
b_1\,c_{1,\,n-1+1} + b_2\,c_{2,\,n-1+1} + \ldots + b_{n-1}\,c_{n-1,\,n-1+1} + S\,b_{n-1+1} = 0\\
b_1\,c_{1,\,n-1+2} + b_2\,c_{2,\,n-1+2} + \ldots + b_{n-1}\,c_{n-1,\,n-1+2} + S\,b_{n-1+2} = 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_1\,c_{1,n} + b_2\,c_{2,n} + \ldots + b_{n-1}\,c_{n-1,n} + S\,b_n = 0
\end{cases}$$

und aus diesen für beliebige nicht verschwindende Werte der $(n-1)$ Grössen $b_1, \ldots b_{n-1}$, da S nicht Null ist, die Gleichungen:

$$(34)\quad \begin{cases}
b_{n-1+1} = -\,(b_1\,c_{1,\,n-1+1} + b_2\,c_{2,\,n-1+1} + \ldots + b_{n-1}\,c_{n-1,\,n-1+1})\,\frac{1}{S}\\
b_{n-1+2} = -\,(b_1\,c_{1,\,n-1+2} + b_2\,c_{2,\,n-1+2} + \ldots + b_{n-1}\,c_{n-1,\,n-1+2})\,\frac{1}{S}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_n = -\,(b_1\,c_{1,n} + b_2\,c_{2,n} + \ldots + b_{n-1}\,c_{n-1,n})\,\frac{1}{S}
\end{cases}$$

Nach einiger Ueberlegung findet man nun, wenn man (29) berücksichtigt, dass die linken Seiten von (33) nichts anderes sind als die partiellen Determinanten des $(n-1+1)^{ten}$ Grades eines Schemas, das aus dem Schema (25) entsteht, wenn man die Elemente irgend einer Horzontalreihe vertreten lässt resp. durch die Grössen $b_1 \ldots b_n$; welcher Horizontalreihe ist ganz gleichgiltig; denn wenn auch durch Vertauschung zweier Horizontalreihen eines Schemas die zugehörige Determinante in den entgegengesetzten Wert übergeht, so bleibt dies doch ohne Einfluss für den Fall, dass die Determinante gleich Null ist. Die linken Seiten von (33) sind also wie gesagt partielle Determinanten des Schemas

$$(35)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{matrix}$$

Wenn nun die partielle Determinante des $(n-1+1)^{ten}$ Grades dieses Schemas verschwindet, so verschwinden natürlich auch alle partiellen Determinanten des $(n-1+2)^{ten}$ Grades, deshalb die partiellen Determinanten des $(n-1+3)^{ten}$ u. s. w. und schliesslich verschwindet auch die Determinante des n^{ten} Grades.

Es ist also ersichtlich, dass dieses neue Schema diejenigen Bedingungen erfüllt, welche das Schema (25) erfüllt. Und sind umgekehrt die Grössen $b_1, \ldots b_n$ nach (34) bestimmt, so folgt daraus (33) und hieraus wieder, dass die aus (24) abgeleiteten Werte für $\xi_1 \ldots \xi_n$ auch die Gleichung (31) befriedigen. Das gefundene Resultat lässt sich nun als Satz folgendermassen ausdrücken:

Sollen die unter der Bedingung, dass die zugehörige Determinante des n^{ten} Grades und alle partiellen des $(n-1)^{ten}$, $(n-2)^{ten}$ u. s. w. bis einschliesslich des $(n-1+1)^{ten}$ Grades verschwinden, jedoch eine partielle Determinante des $(n-1)^{ten}$ Grades nicht verschwindet, aus dem System (24) hergeleiteten Werte der nicht verschwindenden Variabeln $\xi_1 \ldots \xi_n$ eine nicht zu demselben gehörende Gleichung (31) befriedigen, so ist es für ein Schema (34), welches aus (25) folgt, indem die Coefficienten genannter Gleichung als Elemente in derselben Reihenfolge wie die der Gleichungen (24) die Stelle irgend einer Horizontalreihe vertreten, notwendig und hinreichend, dass für dieses neue Schema die Determinante des n^{ten} Grades und alle partiellen Determinanten des $(n-1)^{ten}$, $(n-2)^{ten}$ u. s. w. bis einschliesslich des $(n-1+1)^{ten}$ Grades verschwinden.

Es möge nun übergegangen werden zu den nicht homogenen Funktionen. Die Bedingungen, unter denen sich eine solche in eine Funktion von (n—1) und nicht in weniger Variabeln verwandeln lässt, lassen sich herleiten aus den Bedingungen für die Verwandlung der quadratischen Formen und aus den Betrachtungen des vorigen Abschnittes. Wenn man die von jetzt ab nicht mehr homogene Funktion hat:

$$\begin{aligned}(1)\quad f(x_1 \ldots x_n) = {} & a_n x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2 a_{1n} x_1 x_n \\ & + a_{22} x_2^2 + \ldots + 2 a_{2n} x_2 x_n \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{nn} x_n^2 \\ & + 2 b_1 x_1 + 2 b_2 x_2 + \ldots + 2 b_n x_n \\ & + c,\end{aligned}$$

und setzt in dieselben statt der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ resp. die Aggregate $x_1 + \xi_1 \ldots x_n + \xi_n$, so geht der quadratische Teil über in die rechte Seite der Gleichung (1) des I. Abschnitts. Der lineare Teil

$$2 b_1 x_1 + 2 b_2 x_2 + \ldots + 2 b_n x_n$$

verwandelt sich in

$$2 b_1 (x_1 + \xi_1) + 2 b_2 (x_2 + \xi_2) + \ldots + 2 b_n (x_n + \xi_n);$$

zu dem ursprünglichen Teile kommt also noch das Aggregat;

$$2 b_1 \xi_1 + 2 b_2 \xi_2 + \ldots + 2 b_n \xi_n,$$

das man aus dem ersten erhält, wenn man statt der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ resp. die Grössen $\xi_1 \ldots \xi_n$ setzt und das daher mit

$$2 f_b (\xi_1 \ldots \xi_n)$$

bezeichnet werden soll. Die Constante c bleibt ungeändert; fasst man Alles zusammen, so entsteht die Gleichung:

$$\begin{aligned}(2)\quad f(x_1 + \xi_1, \ldots x_n + \xi_n) = {} & f(x_1, \ldots x_n) + 2 f_1 (\xi_1 \ldots \xi_n) x_1 + \ldots + 2 f_n (\xi_1 \ldots \xi_n) x_n \\ & + f_1 (\xi_1 \ldots \xi_n) \xi_1 + \ldots + f_n (\xi_1 \ldots \xi_n) \xi_n \\ & + 2 f_b (\xi_1 \ldots \xi_n).\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise wie früher kann man nun den Ausdruck links in die Funktion $f(x_1 \ldots x_n)$, die nur (n—1) Variabeln enthalten soll, übergehen lassen; zu diesem Zwecke würden, als $f(x_1 \ldots x_n)$ noch eine quadratische Form war, die n Funktionen $f_1 (\xi_1 \ldots \xi_n) \ldots f_n (\xi_1 \ldots \xi_n)$ gleich Null gesetzt und dann mit Hilfe einer nicht verschwindenden partiellen Determinante des (n—1)ten Grades es so eingerichtet, dass 1 Variabeln wirklich herausfielen. Dieselbe Operation lässt sich auch hier anstellen, wenn man zugleich den Ausdruck

$$f_b (\xi_1 \ldots \xi_n)$$

zum Verschwinden bringen kann. Das ist aber mit Benutzung des S. 10 angeführten Satzes möglich; denn hier haben wir ja den Fall, dass die Werte der Variabeln $\xi_1 \ldots \xi_n$, welche aus den zu erfüllenden Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{array}{l} a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 + \ldots + a_{1n}\,\xi_n = 0 \\ a_{21}\,\xi_1 + a_{22}\,\xi_2 + \ldots + a_{2n}\,\xi_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{nn}\,\xi_1 + a_{n2}\,\xi_2 + \ldots + a_{nn}\,\xi_n = 0 \end{array}$$

eine nicht zu diesem System gehörende Gleichung

$$(4)\quad b_1\,\xi_1 + b_2\,\xi_2 + \ldots + b_n\,\xi_n = 0$$

befriedigen sollen. Wann dies geschehen kann, sagt uns eben der angeführte Satz; aus demselben lässt sich also die Bedingung ableiten, welche in Verbindung mit den Bedingungen für die Verwandlung der quadratischen Formen, die Anforderungen angiebt, die man an eine nicht homogene Funktion 2ten Grades von n Variabeln stellen muss, damit sie in eine solche von $(n-1)$ Variabeln und nicht in weniger transformirt werden kann. Der S. 1 angeführte Satz lässt sich demnach auf eine nicht homogene Funktion 2ten Grades von n Variabeln folgendermassen ausdehnen: Damit eine gegebene nicht homogene Funktion $f(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ von n Variabeln und vom 2ten Grade durch eine Substitution des ersten Grades von nicht verschwindender Determinante in eine Funktion verwandelt werden kann, die $(n-1)$ Variabeln enthält und in keine Funktion einer geringern Anzahl von Variabeln verwandelt werden kann, ist es notwendig und hinreichend, dass für das dem quadratischen Teile gehörende Schema die Determinante des n^{ten} Grades und alle partiellen Determinanten des $(n-1)^{\text{ten}}$ $(n-2)^{\text{ten}}$ u. s. w. bis einschliesslich des $(n-1+1)^{\text{ten}}$ Grades, jedoch nicht alle partiellen Determinanten des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, und dass diese Forderungen, welche an dieses Schema gestellt sind, auch dann noch befriedigt werden, wenn in demselben die n Coefficienten des linearen Teiles als Elemente die Stelle einer beliebigen Horizontalreihe vertreten.

Mittelst dieses Satzes und der Gleichung (18) werde nun die Funktion von n Variabeln:

$$\begin{aligned} (5)\quad f(x_1\ldots x_n) = {} & a_{11}\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 + \ldots + 2\,a_{1n}\,x_1\,x_n \\ & + a_{22}\,x_2^2 + \ldots + 2\,a_{2n}\,x_2\,x_n \\ & + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + a_{nn}\,x_n^2 \\ & + 2\,b_1\,x_1 + 2\,b_2\,x_2 + \ldots\ldots + 2\,b_n\,x_n \\ & + c \end{aligned}$$

in eine Funktion verwandelt, die nur noch 3 Variabeln enthält und nicht weniger. Es muss also in Bezug auf dieselbe Folgendes vorausgesetzt werden:

Erstens sollen für das dem quadratischen Teile zugehörende Schema:

$$(6)\quad \begin{array}{l} a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ a_{nn} \end{array}$$

Die Determinante des n^{ten} Grades und die partiellen Determinanten des $(n-1)^{ten}$, $(n-2)^{ten}$ u. s. w. bis einschliesslich des $[n-(n-3)+1]^{ten}$ das ist des 4ten Grades verschwinden.

Zweitens soll eine partielle Determinante des $[n-(n-3)]^{ten}$ oder des 3ten Grades nicht Null sein und zwar die Determinante D des Schemas

$$(7)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}. \end{matrix}$$

Drittens sollen diese Voraussetzungen für das Schema (22) auch dann noch bestehen bleiben, wenn statt einer Horizontalreihe die Elemente

$$b_1 \quad b_2 \ldots b_n$$

gesetzt werden, wenn also für (22) das Schema gesetzt wird

$$(8)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{matrix}$$

Unter diesen Bedingungen lässt sich die $f(x_1 \ldots x_n)$ folgendermassen in eine Funktion von 3 Variabeln verwandeln. Setzt man wieder satt $x_1 \ldots x_n$ resp. die Aggregate $x_1 + \xi_1 \ldots x_n + \xi_n$, so folgt nach (18)

$$\begin{aligned}(9)\quad f(x_1+\xi_1 \ldots x_n+\xi_n) = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + a_{nn}x_n^2 \\ & + 2b_2\xi_1 + 2b_2\xi_2 + \ldots + 2b_n\xi_n \\ & + c \\ + 2(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n)x_1 + \ldots + 2(a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n)x_n \\ + (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n)\xi_1 + \ldots + (a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n)\xi_n \\ + 2(b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_n\xi_n).\end{aligned}$$

Es müssen nun die Gleichungen gelöst werden:

$$(10)\quad \begin{matrix} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = 0 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n = 0. \end{matrix}$$

Wegen der dritten Voraussetzung erfüllen die aus denselben abgeleiteten Werte für $\xi_1 \ldots \xi_n$ auch stillschweigend die Gleichung

$$(11)\quad b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_n\xi_n = 0.$$

Die Auflösung der Gleichungen (27) ist möglich wegen der ersten Voraussetzung; und wegen (24) bleiben für beliebige Werte von $\xi_4 \ldots \xi_n$ die Gleichungen zu lösen:

$$
\begin{aligned}
& a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 + a_{13}\,\xi_3 = -\,a_{14}\,\xi_4 - \ldots - a_{1n}\,\xi_n \\
(12)\quad & a_{21}\,\xi_1 + a_{22}\,\xi_2 + a_{23}\,\xi_3 = -\,a_{24}\,\xi_4 - \ldots - a_{2n}\,\xi_n \\
& a_{31}\,\xi_1 + a_{32}\,\xi_2 + a_{33}\,\xi_3 = -\,a_{34}\,\xi_4 - \ldots - a_{3n}\,\xi_n
\end{aligned}
$$

Nun sei

$$(13)\quad \xi_4 = -\,x_4,\ \xi_5 = -\,x_5,\ \ldots\ \xi_n = -\,x_n$$

so folgen, wie früher Seite (3) gefunden wurde, für ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Werte:

$$
\begin{aligned}
& \xi_1 = (c_{14}\,x_4 + \ldots + c_{1n}\,x_n)\frac{1}{D} \\
(14)\quad & \xi_2 = (c_{24}\,x_4 + \ldots + c_{2n}\,x_n)\frac{1}{D} \\
& \xi_3 = (c_{34}\,x_4 + \ldots + c_{3n}\,x_n)\frac{1}{D}
\end{aligned}
$$

Und mit Berücksichtigung der Gleichung (15) Seite (4) verwandelt sich dann die Funktion (21) in

$$
\begin{aligned}
(15)\quad & f\,(x_1, \ldots x_n) = f\,(x_1 + \xi_1,\ x_2 + \xi_2,\ x_3 + \xi_3) = g\,(x_1'\ x_2'\ x_3') = \\
& \frac{1}{D^2}(a_{11}\,x_1'^2 + 2\,a_{12}\,x_1'\,x_2' + 2\,a_{13}\,x_1'\,x_3' + a_{22}\,x_2'^2 + 2\,a_{23}\,x_2'\,x_3' + a_{33}\,x_3'^2) \\
& \qquad + \frac{1}{D}\,(2\,b_1\,x_1' + 2\,b_2\,x_2' + 2\,b_3\,x_3') + c.
\end{aligned}
$$

Diese neue Funktion $g\,(x_1'\ x_2'\ x_3')$ ist wegen (24) nicht in eine von 2 Variabeln verwandelbar.

Nachdem wir nun erfahren haben, unter welchen Bedingungen eine nicht homogene Funktion 2ten Grades und von n Variabeln in eine solche von 3 Variabeln, aber nicht in eine von 2 Variabeln verwandelt werden kann, mögen nun die Maxima und Minima einer solchen Funktion

$$
\begin{aligned}
(1)\quad f\,(x_1 \ldots x_n) = {} & a_{11}\,x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 + \ldots + 2\,a_{1n}\,x_1\,x_n \\
& + a_{22}\,x_2^2 + \ldots + 2\,a_{2n}\,x_2\,x_n \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& \qquad\qquad + a_{nn}\,x_n^2 \\
& + 2\,b_1\,x_1 + 2\,b_2\,x_2 + \ldots + 2\,b_n\,x_n \\
& \qquad\qquad + c
\end{aligned}
$$

untersucht werden, in Bezug auf die wir also die Seite (12) und (13) angeführten Voraussetzungen machen, so dass sie sich also, wie früher gezeigt, transformieren lässt, vorab in die Funktion

$$(2)\ f(x_1 .. x_n) = \frac{1}{D^2}\,[a_{11}(Dx_1 + c_{14}x_4 + .. + c_{1n}x_n)^2 + 2\,a_{12}(Dx_1 + c_{14}x_4 + .. + c_{1n}x_n)$$
$$(Dx_2 + c_{24}x_4 + .. + c_{2n}x_n) + 2\,a_{13}(Dx_1 + .. + c_{14}x_4 + .. + c_{1n}x_n)(Dx_3 + c_{34}x_4 + .. + c_{3n}x_n)$$
$$+ a_{22}(Dx_2 + c_{24}x_4 + .. + c_{2n}x_n)^2 + 2\,a_{23}(Dx_2 + c_{24}x_4 + .. + c_{2n}x_n)(Dx_3 + c_{34}x_4 + .. + c_{3n}x_n)$$
$$+ a_{33}(Dx_3 + c_{34}x_4 + .. + c_{3n}x_n)^2] + \frac{1}{D}[2b_1(Dx_1 + c_{14}x_4 + .. + c_{1n}x_n) + 2b_2(Dx_2 + c_{24}x_4 + .. + c_{2n}x_n)$$
$$+ 2\,b_3(Dx_3 + c_{34}x_4 + .. + c_{3n}x_n)] + C$$

und dann schliesslich durch die linearen Substitutionen:

$$(3)\quad \begin{cases} D\,x_1 + c_{14}\,x_4 + \ldots + c_{1n}\,x_n = x_1' \\ D\,x_2 + c_{24}\,x_4 + \ldots + c_{2n}\,x_n = x_2' \\ D\,x_3 + c_{34}\,x_4 + \ldots + c_{3n}\,x_n = x_3' \end{cases}$$

in die Fnnktion

$$(4)\ f(x_1 .. x_n) = g(x_1', x_2', x_3') = \frac{1}{D^2}(a_{11}\,x_1'^2 + 2\,a_{12}\,x_1'\,x_2' + 2\,a_{13}\,x_1'\,x_3' + a_{22}\,x_2'^2$$
$$+ 2\,a_{23}\,x_2'\,x_3' + a_{33}\,x_3'^2)$$
$$+ \frac{1}{D}(2\,b_1\,x_1' + 2\,b_2\,x_2' + 2\,b_3\,x_3') + C,$$

die sich dann nicht mehr in eine Funktion von weniger als 3 Variabeln umformen lässt, da ja nach der Voraussetzung die Determinante D des 3 ten Grades des symmetrischen Schemas der 9 Elemente

$$(5)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

nicht Null ist.

Da die sämtlichen n Variabeln der Funktion (1) von einander unabhängig sein sollen, so haben wir's offenbar nur mit absoluten Maxima und Minima zu thun.

Es wären demnach zuerst für die Funktion (1) resp. (2) die n Gleichungen zu bilden:

$$(6)\quad \frac{\delta f(x_1, \ldots x_n)}{\delta x_1} = 0,\ \frac{\delta f(x_1, \ldots x_n)}{\delta x_2} = 0,\ \ldots\ \frac{\delta f(x_1, \ldots x_n)}{\delta x_n} = 0,$$

und aus denselben könnte man dann für die n Variabeln $x_1 \ldots x_n$ die Werte bestimmen, welche obige Funktion zu einem Maximum oder Minimum machen.

Dieses Verfahren braucht aber nicht angewendet zu werden, sondern man wird schneller zu einem bestimmtern Resultate gelangen, wenn man die Eigenschaft der Funktion, sich in eine solche von 3 Variabeln verwandeln zu lassen, benutzt. Bildet man daher das System der n Gleichungen (6) mit Rücksicht auf die verwandelte Funktion (4) so erhält man

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{\delta g}{\delta x_1'}\frac{\delta x_1'}{\delta x_1} + \frac{\delta g}{\delta x_2'}\frac{\delta x_2'}{\delta x_1} + \frac{\delta g}{\delta x_3'}\frac{\delta x_3'}{\delta x_1} = 0 \\ \frac{\delta g}{\delta x_1'}\frac{\delta x_1'}{\delta x_2} + \frac{\delta g}{\delta x_2'}\frac{\delta x_2'}{\delta x_2} + \frac{\delta g}{\delta x_3'}\frac{\delta x_3'}{\delta x_2} = 0 \\ \frac{\delta g}{\delta x_1'}\frac{\delta x_1'}{\delta x_3} + \frac{\delta g}{\delta x_2'}\frac{\delta x_2'}{\delta x_3} + \frac{\delta g}{\delta x_3'}\frac{\delta x_3'}{\delta x_3} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\delta g}{\delta x_1'}\frac{\delta x_1'}{\delta x_n} + \frac{\delta g}{\delta x_2'}\frac{\delta x_2'}{\delta x_n} + \frac{\delta g}{\delta x_3'}\frac{\delta x_3'}{\delta x_n} = 0, \end{cases}$$

worin der Kürze halber in g $(x_1'\ x_2'\ x_3')$ das Argument (x_1', x_2', x_3') fortgelassen ist. Die drei partiellen Differentialquotienten

$$(8)\quad \frac{\delta g}{\delta x_1'},\ \frac{\delta g}{\delta x_2'},\ \frac{\delta g}{\delta x_3'}$$

kehren in den n Gleichungen überall wieder; aus den ersten 3 Gleichungen ist ersichtlich, dass die Grössen (8) alle drei gleich Null sein müssen.

Wenn man nämlich die Differentiationen ausführt mit Bezug auf (3), so lauten die ersten 3 Gleichungen:

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{\delta g}{\delta x_1'} \cdot D = 0 \\ \frac{\delta g}{\delta x_2'} \cdot D = 0 \\ \frac{\delta g}{\delta x_3'} \cdot D = 0 \end{cases}$$

Nun ist aber nach der Voraussetzung D nicht Null, also ergiebt sich

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{\delta g\ (x_1', x_2', x_3')}{\delta x_1'} = 0 \\ \frac{\delta g\ (x_1', x_2', x_3')}{\delta x_2'} = 0 \\ \frac{\delta g\ (x_1', x_2', x_3')}{\delta x_3'} = 0, \end{cases}$$

für welche Werte der Grössen (8) die übrigen (n—3) Gleichungen von selbst erfüllt sind. Die Anwendung der linken Seite von (10) auf die rechte von (4) führt das System der 3 Gleichungen

$$(11)\quad \begin{cases} a_{11}\, x_1' + a_{12}\, x_2' + a_{13}\, x_3' = -\, b_1\, D \\ a_{21}\, x_1' + a_{22}\, x_2' + a_{23}\, x_3' = -\, b_2\, D \\ a_{31}\, x_1' + a_{32}\, x_2' + a_{33}\, x_3' = -\, b_3\, D \text{ herbei.} \end{cases}$$

Die drei Grössen b_1, b_2 und b_3 sind den gemachten Voraussetzungen gemäss ganz beliebig,

und für diese beliebigen Werte ist das System (11) auflösbar, weil ja ebenfalls nach der Voraussetzung die Determinante D des Schemas (5) nicht Null ist; es verträgt sich also hier alles miteinander und es ergeben sich für die 3 Variabeln x_1' x_2' und x_3' die Werte:

$$(12)\quad \begin{cases} x_1' = -(A_{11}\, b_1 + A_{21}\, b_2 + A_{31}\, b_3) \\ x_2' = -(A_{12}\, b_1 + A_{22}\, b_2 + A_{32}\, b_3) \\ x_3' = -(A_{13}\, b_1 + A_{23}\, b_2 + A_{33}\, b_3), \end{cases}$$

worin, wie früher, das adjungierte Element $A_{\varrho\sigma}$, hier eine partielle Determinante des 2 ten Grades des Schemas (5), correspondirt mit $\alpha_{\varrho\sigma}$; der Kürze halber mögen ferner statt der rechten Seiten resp. die Grössen A,' A',' und A''' eingeführt werden, so dass besteht

$$(13)\quad \begin{cases} x_1' = A' \\ x_2' = A'' \\ x_3' = A''' \end{cases}$$

Im Falle eines Maximums oder Minimums der Funktion (4) müssen also die 3 Variabeln x_1', x_2', x_3' die ganz bestimmten Werte in (12) resp. (13) annehmen oder für die Funktion (1) resp. (2) sind die Bedingungen eines Maximums oder Minimums

$$(14)\quad \begin{cases} D\, x_1 + c_{14}\, x_4 + \ldots + c_{1n}\, x_n = A' \\ D\, x_2 + c_{24}\, x_4 + \ldots + c_{2n}\, x_n = A'' \\ D\, x_3 + c_{34}\, x_4 + \ldots + c_{3n}\, x_n = A''' \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen man für beliebige Werte der (n−3) Variabeln $x_4 \ldots x_n$ Werte für die zugehörigen 3 Variabeln x_1, x_2 und x_3 finden kann.

Ob die Funktion (1) für die Werte (14) zu einem Maximum oder ob sie zu einem Minimum wird, sagt uns wieder die Funktion (4) der 3 Variabeln x_1', x_2', x_3'; es hängt dies bekanntlich von dem vollständigen zweiten Differential $d^2 g\,(x_1', x_2', x_3')$ ab, das nun zu bilden ist; für diesen Ausdruck ergiebt sich:

$$(15)\quad d^2g\,(x_1'\, x_2'\, x_3') = \frac{1}{2}(a_{11}\, dx_1'^2 + 2\, a_{12}\, dx_1'\, dx_2' + 2\, a_{13}\, dx_1'\, dx_3' + a_{22}\, dx_2'^2 + 2\, a_{23}\, dx_2'\, dx_3' + a_{33}\, dx_3'^2).$$

Die rechte Seite ist nun eine ternäre quadratische Form und, wie in der höhern Mathematik bewiesen ist, dann wesentlich positiv, wenn die Ungleichheiten stattfinden

$$(16)\quad a_{11} > 0,\ A_{33} > 0,\ D > 0;$$

sie ist wesentlich negativ, wenn besteht:

$$(17)\quad a_{11} < 0,\ A_{33} < 0,\ D < 0,$$

wo D die Determinante des 3 ten Grades des Schemas (5) bezeichnet und A_{33} das mit a_{33} correspondierende adjungierte Element ist, hier eine partielle Determinante des 2 ten Grades desselben Schemas.

Demnach wird unter den Bedingungen (15) die Funktion (4) also auch (1) für die Werte (12) resp. (13) zu einem Minimum, unter der Bedingung (16) für dieselben Werte zu einem Maximum oder mit andern Worten, der Ausdruck:

$$(17)\ \frac{1}{D^2}(a_{11}A'^2 + 2a_{12}A'A'' + 2a_{13}A'A''' + a_{22}A''^2 + 2a_{23}A_2'A''' + a_{33}A'''^2) + \frac{1}{D}(2b_1A' + 2b_2A'' + 2b_3A''') + c$$

ist ein Maximalwert der Funktion (1), wenn (16) erfüllt ist, ein Minimalwert, wenn (15) besteht.

Schulnachrichten.

I. Die allgemeine Lehrverfassung.

A. Allgemeine Uebersicht über die einzelnen Lehrgegenstände und die für jeden derselben bestimmte Stundenzahl.

	VI.	V.	IV.	U.III.	O.III.	U.II.	O. II.	U. I.	O. I.	Summe
Christliche Religionslehre:										
a) katholische	3	2	2	2	2	2	2	2		17
b) evangelische	3 2		2				2			7
Deutsch und Geschichtserzählungen	3 1 } 4	2 1 } 3	3	2	2	3	3	3		23
Latein	8	8	7	7	7	7	6	7		57
Griechisch	—	—	—	6	6	6	6	6		30
Französisch	—	—	4	3	3	3	2	2		17
Englisch	—	—	—	—	—	—	2	2		4
Hebräisch	—	—	—	—	—	—	2	2		4
Geschichte und Erdkunde	2	2	2 2	2 1	2 1	2 1	3	3		23
Rechnen und Mathematik	4	4	4	3	3	4	4	4		30
Naturbeschreibung	2	2	2	2	—	—	—	—		8
Physik, Chemie und Mineralogie	—	—	—	—	2	2	2	2		8
Gesang	2	2	—	—	—	—		—		4
Schreiben	2	2	—	—	—	—		—		4
Zeichnen	—	2	2	2	2	—		—		8

Bemerkung.
Ueber Turnen, Chorgesang, Zeichnen und Schwimmen siehe Mitteilungen über den technischen Unterricht.

B. Uebersicht der Verteilung der Stunden unter die einzelnen Lehrer.

Nr.	Namen der Lehrer	Ordinariat	I.	II O.	II U.	III O.	III U.	IV.	V.	VI.	Stdzhl.
1	**Dr. Eberhard,** Direktor.	I.	6 Griech.	3 Gesch.	2 Homer	2 Ovid					13
2	**Prof. Dr. v. Gimborn.**	II. O.	7 Lat.	3 Deutsch 6 Lat. 6 Griech.							22
3	**Prof. Dr. Heinz.**	II. U.			3 Deutsch 7 Lat. 4 Griech.	3 Gesch. u. Erdk.	3 Gesch.	2 Gesch.			22
4	**Oberlehrer Müller.**	III. U.	2 Franz. 2 Engl.	2 Franz. 2 Engl.	3 Franz.		2 Deutsch 7 Lat. 3 Franz.				23
5	**Oberlehrer Sextro.**	V.	3 Deutsch				6 Griech.	2 Erdk.	3 Deutsch 8 Lat. 2 Erdk.		24
6	**Oberlehrer Plathner.**	IV.			3 Gesch.	2 Deutsch 5 Lat.		3 Deutsch 7 Lat. 4 Franz.			24
7	**Oberlehrer Dr. Kolligs,**	VI.	3 Gesch.			6 Griech. 3 Franz.				3 Deutsch 8 Lat. 1 Gesch.-erzähl.	24
8	**Oberlehrer Herff.**	III. O.			4 Math. 2 Phys.	3 Math. 2 Phys.	3 Math. 2 Naturk.	4 Rech. 2 Naturk.		2 Naturk.	24
9	**Oberlehrer Strobel.**		2 Rel. 2 Hebr.	2 Rel. 2 Hebr.	2 Rel.	2 Rel.	2 Rel.	2 Rel.	2 Rel.	3 Rel.	21
10	**Oberlehrer Dr. Eck.**		4 Math. 2 Phys.	4 Math. 2 Phys.					4 Rech. 2 Naturk.	4 Rech. 2 Erdk.	24
11	**Mendler,** technischer Lehrer.		2 Chorgesang 9 Turnen			2 Zeich.	2 Zeich.	2 Zeich.	2 Schreib. 2 Zeich. 2 Gesang	2 Schreib. 2 Gesang	27
12	Superintendent **Gallwitz,** evangelischer Religionslehrer.		2 Rel.		2 Rel.				2 Rel. bezw. 3 in VI.		7

C. Uebersicht über die behandelten Lehrpensen.

P r i m a.

Ober- und Unter-Prima vereinigt.

Ordinarius: Der Direktor.

Religionslehre. a) katholische. Die katholische Glaubenslehre. Wiederholungen aus der Sittenlehre und Kirchengeschichte. Dreher Lehrbuch. — 2 St.

Oberlehrer Strobel.

b) evangelische. Kirchengeschichte nach Christliebs Handbuch. Wiederholung der früher gelernten Lieder und Psalmen. — 2 St.

Superintendent Gallwitz.

Deutsch. Schillers Leben. Dessen Gedichte sowie die bedeutenderer neuerer Dichter nach der Auswahl in Buschmanns Lesebuche. Shakespeares Julius Cäsar, Kleists Prinz von Homburg, Schillers Braut von Messina und Lessings Laokoon (mit Auswahl). Privatlektüre: Nathan der Weise, Hamlet, Tasso, Macbeth, Iphigenie. Dispositionsübungen, Vorträge, Aufsätze. 3 St.

Oberlehrer Sextro.

Themata zu den Aufsätzen.

1. Goethes religiöse Entwickelung in den Oden „Prometheus“, „Grenzen der Menschheit“, „Das Göttliche“, „Ganymed.“
2. Wie wird in Shakespeares „Julius Cäsar“ Brutus ein Mörder? (Klassenaufsatz).
3. Worauf führt Sokrates in Platos Apologie die gegen ihn bestehende gehässige Stimmung zurück?
4. Charakteristik des Antonius in Shakespeares „Julius Cäsar.“
5. Inwiefern ist durch Herders Wahlspruch „Licht, Liebe, Leben“ die wahre Bestimmung des Menschen ausgedrückt? (Klassenaufsatz).
6. Aus welchen Gründen erregt Leonardo da Vincis Abendmahl unser Wohlgefallen? (Nach Lessings Laokoon I—VI).
7. Näher gerückt ist der Mensch an den Menschen. Enger wird um ihn, reger erwacht, es umwälzt rascher sich in ihm die Welt.
8. Die sittliche Entwickelung des Helden in Kleists: Prinz von Homburg.

Abiturientenaufsatz.

a) Im Wintertermin: Machet nicht viel Federlesen,
Schreibt auf meinen Leichenstein:
„Dieser ist ein Mensch gewesen,
Und das heisst ein Kämpfer sein.“

b) Im Herbsttermin: Euch, ihr Götter, gehöret der Kaufmann. Güter zu suchen geht er,
Doch an sein Schiff knüpfet das Gute sich an.

Latein. Cic. pro Milone. Briefe mit Auswahl. Tacit. Annal. I. II mit Auswahl. Privatlektüre und Uebungen im Uebersetzen ohne Vorbereitung aus Livius IV und V. Ausgewählte Oden des Horaz aus I und II, Satiren mit Auswahl. Einzelne Oden wurden auswendig gelernt. Alle 14 Tage eine Uebersetzung ins Lateinische im Anschluss an die Lektüre, abwechselnd als Klassen- und als Hausarbeit. Daneben alle 6 Wochen eine

Uebersetzung ins Deutsche als Klassenarbeit und gelegentlich eine lateinische Inhaltsangabe. Grammatische und stilistische Wiederholungen. — 7 St.

Prof. Dr. von Gimborn.

Griechisch. Platos Apologie und Criton. Demosthenes 3 Olynthische Reden. Uebersetzungen aus Xenophons Hellenika ohne Vorbereitung. Grammatische Wiederholungen aus allen Gebieten je nach Bedürfnis. Uebersetzungen ins Deutsche nach Diktaten als Klassenarbeiten alle 4 Wochen. Hom. Jl. XII—XXIV mit Auswahl. Sophocl. Antigone. Auswendiglernen geeigneter Stellen. — 6 St.

Der Direktor.

Französisch. Im Winter: Barrau, Scènes de la Révolution Française; im Sommer: Molière, les Femmes Savantes. Synonymisches, Stilistisches und Metrisches im Anschluss an die Lektüre. Grammatische Wiederholungen. Sprechübungen. Alle 14 Tage eine Uebersetzung aus dem Französischen ins Deutsche, abwechselnd als Haus- und als Klassenarbeit. — 2 St.

Oberlehrer Müller.

Englisch. Collection of Tales and Sketches (II Velh. u. Klasing). Befestigung und gelegentliche Wiederholung der Grammatik. Sprechübungen. Extemporalien und Diktate. — 2 St.

Derselbe.

Hebräisch. Die schwachen Verba. Das Zahlwort. Die Partikeln mit Suffixen. Die dazugehörigen Uebungsstücke. Die Hauptregeln der Syntax. Gelesen wurden ausgewählte Stücke aus den historischen Büchern des A. T. Schriftliche Uebungen im Uebersetzen und Erklären biblischer Texte. — 2 St.

Oberlehrer Strobel.

Geschichte und Erdkunde. Die epochemachenden weltgeschichtlichen Ereignisse von Christi Geburt bis zum Augsburger Religionsfrieden, im Zusammenhang ihrer Ursachen und Wirkungen Wiederholungen in der Erdkunde. — 3 St.

Oberlehrer Dr. Kolligs.

Mathematik. Wiederholung des arithmetischen Pensums der früheren Klassen an Uebungsaufgaben. Zinseszinse- und Rentenrechnung. Die imaginären Grössen. Vervollständigung der Trigonometrie. (Additionstheoreme). Abschluss der Stereometrie. Alle 6 Wochen eine schriftliche Arbeit. — 4 St.

Oberlehrer Dr. Eck.

Aufgaben für die schriftliche Reifeprüfung.

Im Ostertermin:

1. Planimetrie: Von einem Dreieck seien gegeben das Verhältnis zweier Seiten b und c, nämlich $b : c = m : n$, und die zur Seite b und zur 3. Seite Seite a gehörigen Mittellinien m_b beziehungsweise m_a. Man konstruiere das Dreieck.
2. Algebra: Die Summe von 5 Zahlen, welche eine steigende arithmetische Reihe bilden, ist 40, die Summe ihrer Quadrate 410. Welche Zahlen sind es?

3. Trigonometrie: Von einem Dreieck sind gegeben eine Seite a, die Differenz der anliegenden Winkel β und γ und die Differenz der Projektionen p und q der beiden anderen Seiten b beziehungsweise c auf a. Man berechne die fehlenden Winkel und Seiten. $p-q = 1292$ m; $a = 1508$ m; $\beta-\gamma = 58^0\ 23'\ 42''$.
4. Stereometrie: Wie gross ist die Oberfläche F und der Inhalt J einer Kugel, wenn das derselben eingeschriebene regelmässige Tetraeder die Kante s hat? $s = 2$ m.

Im Herbsttermin:

1. Algebra: 4632,40 ℳ stehen zu $3^1/_4\%$ auf Zinseszins; wie viele Jahre kann davon eine am Ende jedes Jahres zahlbare Rente von 550 ℳ bezogen werden?
2. Trigonometrie: Ein roter Lichtstrahl fällt innerhalb eines Hauptschnittes unter einem Winkel von 45^0 auf ein Glasprisma, dessen brechender Winkel 60^0 beträgt. Unter welchem Winkel tritt der Strahl aus dem Prisma aus, wenn das Brechungsverhältnis für rotes Licht 1,5 beträgt?
3. Geometrie: Man beschreibe einen Kreis O', welcher durch zwei gegebene Punkte A und B geht und einen gegebenen Kreis O unter dessen Durchmesser als Sehne schneidet.
4. Stereometrie: Ein gerader Kegel aus Eisen (spez. Gew. 7,6) hat an der Grundfläche einen Umfang von 92 cm; seine Seite misst 132 cm. Wie viel wiegt er?

Physik. Mechanik und Akustik. — 2 St.

Derselbe.

Obersekunda.

Ordinarius: Prof. Dr. von Gimborn.

Religionslehre. a) katholische: Geschichte der katholischen Kirche. Nach Drehers Lehrbuch. — 2 St.

Oberlehrer Strobel.

b) evangelische: vacat.

Deutsch. Inhalt des Nibelungenliedes unter Veranschaulichung durch Proben aus dem Urtext. Ausblicke auf nordische Sagen und die grossen germanischen Sagenkreise, auf die höfische Epik und höfische Lyrik. Uebersicht über die Dichtungsarten. Auswendiglernen von Dichterstellen und Uebungen im freien Vortrag. Schillers Maria Stuart. Goethes Götz, Egmont. Dispositionsübungen. Aufsätze. — 3 St.

Der Ordinarius.

Themata zu den Aufsätzen.

1. Die Verdienste des Themistocles um sein Vaterland.
2. Wie widerlegt Sokrates den Antiphon? Nach Xen. Memorab.
3. Wie beweist Cicero in seiner Rede Pro lege Manilia die Notwendigkeit des Krieges mit Mithridates? (Klassenaufsatz).
4. Welche Milderungsgründe können für die Schuld des Götz angeführt werden?
5. Gedankengang der Rede Adherbals (Sall. Jug. 14).
6. Welche Bedeutung für die dramatische Handlung haben die Volksscenen im Egmont?
7. Welches Bild gewinnen wir aus der Odyssee von dem Charakter des Eumaios?
8. Disposition und Gedankengang der Ansprache Scipios an die Soldaten vor der Schlacht am Ticinus. (Liv. XXI. 41. 42) Klassenaufsatz.

Latein. Sallust, De bello Jugurthino. Cicero, Pro lege Manilia. Livius XXI und

XXII mit Auswahl. Grammatische Wiederholungen und Ergänzungen. Alle 14 Tage eine schriftliche Uebersetzung ins Lateinische, abwechselnd als Klassen- und als Hausarbeit. Daneben alle 6 Wochen eine Uebersetzung ins Deutsche als Klassenarbeit. Virg. Aen. VII—XII mit Auswahl, desgl. Georg. Eclog. Einzelne Stellen wurden auswendig gelernt. — 6 St.

Der Ordinarius.

Griechisch. Auswahl aus Xenoph. Memorabilien; Lysias VII, XXII, XXXII; Herodot VIII und IX mit Auswahl. Wiederholungen aus der Kasus- Tempus- und Moduslehre nach Kägi. Alle 4 Wochen eine Uebersetzung aus dem Griechischen als Klassenarbeit. Homer Odyss. XIII—XXIV mit Auswahl. Geeignete Stellen wurden auswendig gelernt. — 6 St.

Der Ordinarius.

Französisch. Im Winter: Coppée, Pariser Skizzen und Erzählungen (Velh. u. Klas.); im Sommer: Racine, Athalie. Synonymisches, Stilistisches und Metrisches im Anschluss an die Lektüre. Sprechübungen. Gelegentlich grammatische Wiederholungen nebst Uebersetzungen ins Französische. Alle 14 Tage eine Uebersetzung aus dem Französischen ins Deutsche, abwechselnd als Haus- und als Klassenarbeit. — 2 St.

Oberlehrer Müller.

Englisch. Aussprache. Formenlehre und die wichtigsten syntaktischen Regeln nach Tendering, Lehrbuch der englischen Sprache. Lektüre von Prosastücken und Gedichten aus dem mit dem Lehrbuche verbundenen Lesebuche und Uebersetzen der deutschen Stücke. Sprechübungen. Extemporalien und Diktate. — 2 St.

Derselbe.

Hebräisch. Die Elementarlehre. Das Pronomen. Das Nomen. Nominalsuffixe. Die dazugehörigen Uebungsstücke und Vokabeln. Das regelmässige Verbum. Nach Baltzers Schulgrammatik. — 2 St.

Oberlehrer Strobel.

Geschichte und Erdkunde. Hauptereignisse der griechischen Geschichte bis zum Tode Alexanders des Grossen und der römischen Geschichte bis zum Tode des Kaisers Augustus. Wiederholungen aus der Erdkunde. — 3 St.

Der Direktor.

Mathematik. Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Gleichungen einschliesslich der quadratischen mit mehreren Unbekannten. Arithmetische und geometrische Reihen erster Ordnung. Abschluss der Aehnlichkeitslehre, goldener Schnitt. Einiges über harmonische Punkte und Strahlen. Ebene Trigonometrie nebst Uebungen im Berechnen von Dreiecken, Vierecken und regelmässigen Figuren. Alle 6 Wochen eine schriftliche Arbeit. — 4 St.

Oberlehrer Dr. Eck.

Physik. Wärmelehre, Magnetismus, Elektrizität. Wiederholungen der chemischen und mineralogischen Grundbegriffe. — 2 St.

Derselbe.

Untersekunda.

Ordinarius: Prof. Dr. Heinz.

Religionslehre. a) katholische. Die Lehre von der natürlichen Religion und von der göttlichen Offenbarung. Das Christentum. Die katholische Kirche. Nach Drehers Lehrbuch I. — 2 St.

Oberlehrer Strobel.

b) evangelische. Das Kirchenjahr. Das Reich Gottes im Neuen Testament nach Christlieb § 81—105. Wiederholung der Katechismussprüche. — 2 St.

Superintendent Gallwitz.

Deutsch. Gelesen und erklärt wurden epische und lyrische Gedichte des 18. Jahrhunderts, Schillers Jungfrau von Orleans, Lessings Minna von Barnhelm und Goethes Hermann und Dorothea. Auswendiglernen von Dichterstellen und Uebungen im freien Vortrage. Dispositionsübungen. Aufsätze. — 3 St.

Der Ordinarius.

Themata zu den Aufsätzen.

1. Die Mahnungen des Herbstes.
2. Johanna und Isabeau als Friedensstifterinnen in Schillers „Jungfrau von Orleans."
3. Wie widerlegt Cicero den Vorwurf, er habe Catilina in die Verbannung gestossen. (Klassenaufsatz).
4. Der Ruhm der Vorfahren ein Hort der Enkel.
5. Die Bedeutung des dritten Aufzuges in Lessings „Minna von Barnhelm."
6. Die socialen und politischen Verhältnisse in Rom während der catilinarischen Verschwörung. (Klassenaufsatz).
7. Friedrichs des Grossen Friedensarbeit.
8. Charakteristik des Romulus. Nach Livius.
9. Vieles wünscht sich der Mensch, und doch bedarf er nur wenig.
10. Die epischen Schilderungen in Goethes „Hermann und Dorothea." (Prüfungsaufsatz).

Latein. Cic. in Catilin. I und II Sallust. bell. Cat. mit Auswahl. Liv. I und II mit Auswahl und Virg. Aen. I—VI einschliesslich mit Auswahl. Uebungen im Uebersetzen ohne Vorbereitung. Gelegentlich stilistische Regeln und synonymische Unterscheidungen. Auswendiglernen einzelner Dichterstellen. Grammatische Wiederholungen und Ergänzungen. Alle 8 Tage eine schriftliche Uebersetzung ins Lateinische als Klassen- oder als Hausarbeit; alle 6 Wochen statt ersterer eine schriftliche Uebersetzung ins Deutsche als Klassenarbeit. Mündliche Uebersetzungen. — 7 St.

Der Ordinarius.

Griechisch. Xenoph. Anab. III und IV. Auswahl aus Hellen. I—IV nach einem Kanon. Die Syntax des Nomens (Artikel, Pronomen, Kasuslehre), sowie die notwendigsten Hauptregeln der Tempus- und Moduslehre. Wiederholungen aus der Formenlehre. Alle 14 Tage eine Uebersetzung ins Griechische als Haus- und zum Teil als Klassenarbeiten. Gelegentlich eine Uebersetzung aus dem Griechischen ins Deutsche. — 4 St.

Der Ordinarius.

Hom. Odyss. I—XII mit Auswahl. Geeignete Stellen wurden auswendig gelernt. — 2 St.

Der Direktor.

Französisch. Thiers Bonaparte en Egypte et en Syrie. Befestigung der Lehre vom Konjunktiv; Particip, Artikel, Adjektiv, Adverb, Präpositionen, Kasusrektion, Infinitiv. Wiederholung und Erweiterung der Lehre von den Fürwörtern nach der Sprachlehre von Ploetz-Kares. Erweiterung des Wort- und Phrasenschatzes. Schriftliche und mündliche Uebersetzungen ins Französische; Diktate, Sprechübungen. Alle 3 Wochen eine häusliche Arbeit, in jedem Tertial mehrere Klassenarbeiten. — 3 St.

Oberlehrer Müller.

Geschichte. Deutsche und preussische Geschichte vom Regierungsantritt Friedrichs des Grossen bis zur Gegenwart unter Berücksichtigung unserer gesellschaftlichen und wirtschaftlichen Entwickelung. — 2 St.

Erdkunde. Wiederholung der Erdkunde Europas. Elementare mathematische Erdkunde. Kartenskizzen. — 1 St.

Oberlehrer Plathner.

Mathematik. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten, quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten. Erklärung der Potenz mit negativen und gebrochenen Exponenten. Begriff des Logarithmus. Uebungen im Rechnen mit fünfstelligen Logarithmen. Exponentialgleichungen. Bestimmung des Flächeninhalts geradliniger Figuren. Berechnung des Kreisinhaltes und Kreisumfanges. Erklärung der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkeligen Dreiecke. Trigonometrische Berechnung rechtwinkeliger und gleichschenkeliger Dreiecke. Die einfachen Körper nebst Berechnung von Kantenlängen, Oberflächen und Inhalten. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit. — 4 St.

Oberlehrer Herff.

Physik. Vorbereitender physikalischer Lehrgang. Teil II. Die wichtigsten chemischen Erscheinungen. Magnetismus, Elektrizität, Akustik, Optik. — 2 St.

Derselbe.

Obertertia.

Ordinarius: Oberlehrer Herff.

Religionslehre. a) katholische. Die Lehre von den hl. Sakramenten und Sakramentalien. Das hl. Messopfer. Einzelne Bilder aus der Kirchengeschichte. Nach Drehers Leitfaden. — 2 St.

Oberlehrer Strobel.

b) evangelische. Wie in Untersekunda.

Deutsch. Lesen und Erklären poetischer und prosaischer Stücke aus dem Lesebuche von Buschmann, II. Teil. Schillers Glocke und Wilhelm Tell. Elemente der Poetik. Deklamationsübungen. Alle 4 Wochen ein Aufsatz, wounter in jedem Tertial ein Klassenaufsatz — 2 St.

Oberlehrer Plathner.

Latein. Caesar de bell. Gall. V—VII. Wiederholung und Ergänzung der Tempus- und Moduslehre nach Ellendt-Seyffert. Mündliche Uebersetzungen aus dem Uebungsbuche von Busch-Fries. Alle 8 Tage eine Uebersetzung ins Lateinische abwechselnd als häusliche oder Klassenarbeit, alle 6 Wochen statt der letzteren eine Uebersetzung aus dem Lateinischen ins Deutsche. — 5 St.

Derselbe.

Ausgewählte Abschnitte aus Ovids Metamorphosen. Auswendiglernen geeigneter Stellen. Prosodie und Metrik. — 2 St.

Der Direktor.

Griechisch. Xenoph. Anab. I und II. Die Verba auf $\mu\iota$ und die wichtigsten unregelmässigen Verba des attischen Dialekts. Wiederholung und Ergänzung der Lehraufgabe der III. B. nach Kägi. Die wichtigtsen Regeln der Syntax im Anschluss an die Lektüre. Mündliche Uebersetzungen aus dem Uebungsbuche von Wesener. Auswendiglernen von Vokabeln. Alle 14 Tage abwechselnd eine häusliche oder eine Klassenarbeit. — 6 St.

Oberlehrer Dr. Kolligs.

Französisch. Die wichtigsten unregelmässigen Verba. Ergänzung der sonstigen Formenlehre. Die syntaktischen Hauptgesetze in Bezug auf Gebrauch der Hilfsverba avoir und être, Wortstellung, Tempora, Indikativ und Konjunktiv; Erweiterung des Wort- und Phrasenschatzes. (Ploetz-Kares, Sprachlehre und Uebungsbuch, Ausgabe B.) Schriftliche und mündliche Uebersetzungen ins Französische; alle 3 Wochen eine häusliche Arbeit. Sprechübungen im Anschluss an die Lektüre. — 3 St.

Derselbe.

Geschichte und Erdkunde. Deutsche Geschichte vom Ausgang des Mittelalters bis zum Regierungsantritte Friedrichs des Grossen, insbesondere brandenburgisch-preussische Geschichte. Das Wichtigste aus der ausserdeutschen Geschichte. (Nach Pütz). — 2 St.

Wiederholung der physischen und politischen Erdkunde Deutschlands. Erdkunde der deutschen Kolonien. — 1 St.

Prof. Dr. Heinz.

Mathematik. Arithmetik: Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten. Das Notwendigste über Wurzelgrössen. Planimetrie: Flächengleichheit von Figuren. Berechnung der Flächen geradliniger Figuren. Aehnlichkeitslehre Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit. — 3 St.

Der Ordinarius.

Naturkunde. Der Mensch und dessen Organe nebst Unterweisungen über Gesundheitspflege. Vorbereitender physikalischer Lehrgang, Teil I. (Mechanische Erscheinungen; Wärmelehre). — 2 St.

Derselbe.

Zeichnen. Herstellung perspektivischer Umrissbilder nach Holzkörpern. Anfang des Schattierens nach Reliefs. Zeichnen nach lebenden einheimischen Pflanzenteilen. Bemalung von Flachornamenten mit Farben. — 2 St.

Mendler.

Untertertia.

Ordinarius: Oberlehrer Müller.

Religionslehre. a) katholische. Die Lehre von den Geboten. Das Kirchenjahr. Nach Drehers Leitfaden. Einige kirchliche Hymnen erklärt und auswendig gelernt. — 2 St.

Oberlehrer Strobel.

b) evangelische. Wie in Untersekunda.

Deutsch. Behandlung prosaischer und poetischer Lesestücke, insbesondere der Balladen aus dem Lesebuche von Buschmann, II. Teil. Auswendiglernen und Vortragen von Gedichten. Zusammenfassender Ueberblick über die wichtigsten der deutschen Sprache eigentümlichen grammatischen Gesetze. Alle 4 Wochen ein Aufsatz. — 2 St.

Der Ordinarius.

Latein. Caes. de bell. Gall I—IV. Wiederholung der Casuslehre. Hauptregeln der Tempus- und Moduslehre (nach Ellendt-Seyffert). Mündliche und schriftliche Uebersetzungen aus dem Uebungsbuche von Busch-Fries. Alle 8 Tage eine Uebersetzung ins Lateinische, abwechselnd als häusliche oder Klassenarbeit, statt der letzteren alle 6 Wochen eine Uebersetzung aus dem Lateinischen ins Deutsche. — 7 St.

Derselbe.

Griechisch. Die Formenlehre bis zu den Verben auf μι nach Kägi. Mündliche Uebersetzungen aus dem Lesebuche von Wesener. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit, teils als Haus-, teils als Klassenarbeit. — 6 St.

Oberlehrer Sextro.

Französisch. Die regelmässige Konjugation, sowie die Hülfsverben avoir und être unter besonderer Berücksichtigung der Konjunktivformen; die notwendigsten unregelmässigen Verba (Ploetz-Kares, Elementarbuch, 38—63). Schriftliche und mündliche Uebersetzungen; alle 3 Wochen eine schriftliche Arbeit. Uebungen im Sprechen und Rechtschreiben. — 3 St.

Der Ordinarius.

Geschichte und Erdkunde. Kurzer Ueberblick über die weströmische Kaisergeschichte vom Tode des Augustus an; deutsche Geschichte und das Wichtigste der ausserdeutschen Geschichte bis zum Ausgang des Mittelalters. — 2 St.

Wiederholung der politischen Erdkunde Deutschlands. Physische und politische Erdkunde der aussereuropäischen Erdteile ausser den deutschen Kolonien. Einfache Kartenskizzen an der Wandtafel und in Heften. — 1 St.

Prof. Dr. Heinz.

Mathematik. Die Grundrechnungen mit absoluten Zahlen. Gleichungen ersten Grades mit 1 Unbekannten. Parallelogramme; Kreislehre. Planimetrische Konstruktionsaufgaben. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit. — 3 St.

Oberlehrer Herff.

Naturkunde. Ueberblick über das Tierreich. Grundbegriffe der Tiergeographie. Einiges aus der Anatomie und Physiologie der Pflanzen, sowie über Kryptogamen und

Pflanzenkrankheiten. Beschreibung einiger schwieriger Pflanzenarten zur Ergänzung der Erkenntnisse in Formenlehre, Systematik und Biologie. Besprechung der wichtigsten ausländischen Nutzpflanzen. Uebungen im einfachen schematischen Zeichnen des Beobachteten. (Nach Bänitz.) — 2 St.

Derselbe.

Zeichnen. Wiedergabe von Gypsmodellen im Umrisse. Darstellung einfacher mathematischer Körper nach Holzmodellen. — 2 St.

Mendler.

Quarta.

Ordinarius: Oberlehrer Plathner.

Religionslehre. a) katholische. 1. Hauptstück des Katechismus. Biblische Geschichte: Das Leiden und die Verherrlichung Christi; schwierigere Stücke des Alten Testaments. — 2 St.

Oberlehrer Strobel.

b) evangelische. Wie in Untersekunda.

Deutsch. Lesen, Erklären und mündliches Nacherzählen von Gedichten und Prosastücken aus dem Lesebuche von Buschmann, II. Abteilung. Auswendiglernen und Vortragen von Gedichten. Wiederholung und Erweiterung des grammatischen Pensums der Quinta. Das Wichtigste aus der Wortbildungslehre, der zusammengesetzte Satz, Zeichensetzung und Rechtschreibung nach dem Leidfaden von Buschmann. Alle 14 Tage ein Diktat oder ein Aufsatz. — 3 St.

Der Ordinarius.

Latein. Wiederholung der Formenlehre. Das Wichtigste aus der Kasuslehre und einiges aus der Tempus- und Moduslehre, nach Ellendt-Seyffert. Mündliches und schriftliches Uebersetzen aus dem Uebungsbuche von Busch, 3. Teil. 10 Lebensbeschreibungen des Cornelius Nepos, daran anknüpfend Rückübersetzungen. Alle 8 Tage eine schriftliche Klassen- oder Hausarbeit, dazu in jedem Tertial 2 schriftliche Uebersetzungen ins Deutsche. — 7 St.

Derselbe.

Französisch. Erwerbung einer richtigen Aussprache durch praktische Uebungen in einem kurzen propädeutischen Kursus; Aneignung eines mässigen Wortschatzes. Leseübungen und Versuche im Sprechen in jeder Stunde. Erlernen der Hauptkonjugation (regelmässiges Verbum auf er), unter Beschränkung auf den Indikativ und Imperativ, sowie der Hilfsverben avoir und être. Substantiv, Artikel, Teilartikel, Adjektiv, Steigerung, Zahlwort, das Wichtigste vom Pronomen. Nach dem Elementarbuch von Ploetz-Kares. Rechtschreibeübungen. Alle 3 Wochen eine schriftliche Arbeit. — 4 St.

Derselbe.

Geschichte. Geschichte der Griechen und Römer nach Pütz. Grundriss für die mittleren Klassen. — 2 St.

Prof. Dr. Heinz.

Erdkunde. Physische und politische Erdkunde von Europa ausser Deutschland, insbesondere der um das Mittelmeer gruppierten Länder, unter Benutzung von Daniel. Entwerfen von Kartenskizzen an der Tafel und im Hefte. — 2 St.

Oberlehrer Sextro.

Mathematik und Rechnen. Dezimalbruchrechnung. Resolution und Reduktion in Dezimalbrüchen. Zusammengesetzte Regeldetrie mit ganzen Zahlen und Brüchen, (Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben: Gewinn- und Verlust-, Zins-, Rabatt-, Diskont-, Verteilungs-, Gesellschafts- und Mischungsrechnung). Nach Schellens Rechenbuch. Planimetrie: Die Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken. Leichtere dahin gehörige Konstruktionen. Nach Boymann I. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit. — 4 St.

Oberlehrer Herff.

Naturkunde. Zoologie: Niedere Tiere, besonders nützliche und schädliche, sowie ihre Feinde, mit besonderer Berücksichtigung der Insekten. Botanik: Vergleichende Beschreibung verwandter Arten und Gattungen von Blütenpflanzen nach vorhandenen Exemplaren. Uebersicht über das natürliche Pflanzensystem. Lebenserscheinungen der Pflanzen. Uebungen im einfachen schematischen Zeichnen des Beobachteten. — 2 St.

Derselbe.

Zeichnen. Anwendung der krummen Linie auf einfache Flächenornamente. Blatt- und Blumenformen nach Wandtafeln und Modellen. — 2 St.

Mendler.

Quinta.

Ordinarius: Oberlehrer Sextro.

Religionslehre. a) katholische. II. und III. Hauptstück des Katechismus. Vorbereitung auf den Empfang des hl. Altarssakramentes. Biblische Geschichte des Neuen Testamentes. — 2 St.

Oberlehrer Strobel.

b) evangelische. Biblische Geschichten des Neuen Testamentes. I. und II. Hauptstück des Katechismus. Sprüche und Kirchenlieder. — 2 St.

Superintendent Gallwitz.

Deutsch. Der einfache und erweiterte Satz. Das Notwendigste vom zusammengesetzten Satze nach Buschmann, Leitfaden. Rechtschreibe- und Interpunktionsübungen. Lesen und Erklären prosaischer und poetischer Stücke aus dem Lesebuche von Buschmann. Mündliches Nacherzählen, erste Versuche im schriftlichen Nacherzählen; Auswendiglernen und Vortragen von Gedichten. Alle 8 Tage eine schriftliche Arbeit. — 2 St.

Der Ordinarius.

Latein. Wiederholung der regelmässigen Formenlehre, die unregelmässige mit Beschränkung auf das Notwendige, nach Ellendt-Seyffert. Aneignung eines angemessenen Wortschatzes im Anschluss an das im Uebungsbuch von Busch Gelesene, ebenso nach Bedürfnis des Lesestoffes einige syntaktische Regeln. Alle 8 Tage eine schriftliche Klassenarbeit und eine Hausaufgabe. — 8 St.

Derselbe.

Geschichtserzählungen. Die sagenhafte Vorgeschichte der Griechen und Römer im Anschlusse an Buschmann, Sagen und Geschichten, I. Teil. — 1 St.

Derselbe.

Erdkunde. Physische und politische Erdkunde Deutschlands. Weitere Einführung in das Verständnis des Reliefs, des Globus und der Karten. Anleitung zum Entwerfen von Kartenskizzen an der Tafel und in Heften. — 2 St.

Derselbe.

Rechnen. Teilbarkeit der Zahlen, gewöhnliche Brüche, Resolution und Reduktion in Brüchen. Die deutschen Masse, Gewichte und Münzen. Regeldetrie in Brüchen. Alle 4 Wochen eine Reinarbeit. — 4 St.

Oberlehrer Dr. Eck.

Naturkunde. Beschreibung wichtiger Wirbeltiere nach vorhandenen Exemplaren und Abbildungen nebst Mitteilungen über deren Lebensweise, ihren Nutzen oder Schaden. Grundzüge des Knochenbaues beim Menschen. (Bänitz, Leitfaden der Zoologie.) Vollständige Kenntniss der äusseren Organe der Blütenpflanzen im Anschluss an die Beschreibung und Vergleichung verwandter, gleichzeitig vorliegender Arten. (Bänitz, Leitfaden der Botanik): Uebungen im einfachen schematischen Zeichnen des Beobachteten. — 2 St.

Derselbe.

Gesang. Kenntnis der Dur- und Molltonarten, verbunden mit darauf bezüglichen Treff- und rhythmischen Uebungen. Einübung von Choralmessen und zweistimmigen Kirchen- und Volksliedern. 2 St.

Mendler.

Schreiben. Wiederholung und Befestigung der kleinen und grossen deutschen und lateinischen Buchstaben, vom Worte zum Satze fortschreitend, Taktschreiben. — 2 St.

Derselbe.

Zeichnen. Gerad- und krummlinige Gebilde nach Vorzeichnung des Lehrers an der Schultafel. — 2 St.

Derselbe.

Sexta.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Kolligs.

Religionslehre. a) katholische: Erstes Hauptstück des Katechismus. Wiederholung des Beichtunterrichts. Die notwendigen Gebete. Die biblische Geschichte des Alten Testaments. — 3 St.

Oberlehrer Strobel.

b) evangelische. Wie Quinta; dazu eine Stunde Einführung in die christliche Religionslehre. — 3 St.

Superintendent Gallwitz.

Deutsch. Lesen und Erklären von Gedichten und Prosastücken aus dem Lesebuche von Buschmann. Uebungen im Nacherzählen des Gelesenen und Vorerzählten und im Vortragen von Gedichten. Redeteile und Glieder des einfachen Satzes; Unterscheidung der starken und schwachen Flexion. Rechtschreibeübungen in wöchentlichen Diktaten in der Klasse. — 3 St.

Der Ordinarius.

Latein. Die regelmässige Formenlehre mit Ausschluss der Deponentia nach Ellendt-Seyffert. Uebersetzungen aus dem Uebungsbuche von Busch. Auswendiglernen von Vokabeln. Wöchentlich eine Klassenarbeit und eine häusliche Reinschrift. — 8 St.

Derselbe.

Geschichtserzählungen. Lebensbilder aus der vaterländischen Sage und Geschichte. — 1 St.

Derselbe.

Erdkunde. Grundbegriffe der physischen und mathematischen Erdkunde. Erste Anleitung zum Kartenlesen. Die Erdoberfläche im allgemeinen, das Bild der engeren Heimat insbesondere. — 2 St.

Oberlehrer Dr. Eck.

Rechnen. Wiederholung der Grundrechnungen mit ganzen benannten und unbenannten Zahlen. Die deutschen Masse, Gewichte und Münzen nebst Uebungen in der decimalen Schreibweise und den einfachsten decimalen Rechnungen. Regeldetrie mit ganzen Zahlen. Alle 4 Wochen eine Reinarbeit. — 4 St.

Derselbe.

Naturkunde. Beschreibung wichtiger Säugetiere und Vögel nach vorhandenen Exemplaren und Abbildungen nebst Mitteilungen über ihre Lebensweise, ihren Nutzen oder Schaden. Nach Bänitz, Leitfaden der Zoologie. Beschreibung vorliegender Blütenpflanzen nebst ihrer Erklärung. Nach Bänitz, Leitfaden der Botanik. — 2 St.

Oberlehrer Herff.

Gesang. Kenntnis der Noten, Taktarten, Durtonarten und Intervalle. Treffübungen. Notenschreiben. Einübung ein- und zweistimmiger Lieder. — 2 St.

Mendler.

Schreiben. Einübung der kleinen und grossen deutschen und lateinischen Schriftformen; Wörter und Sätze mit denselben. Taktschreiben. — 2 St.

Derselbe.

Dispensationen.

Von der Teilnahme am Religionsunterricht waren weder katholische noch evangelische Schüler befreit.

Technischer Unterricht.

1. Turnen. Die Anstalt besuchten im Winter 142, im Sommer 140 Schüler. Von diesen waren befreit:

	Vom Turnunterrichte überhaupt:		Von einzelnen Uebungsarten:	
Auf Grund ärztlichen Zeugnisses:	im W. 5	im S. 10	im W. 6	im S. 6
Aus anderen Gründen:	im W. 0	im S. 0	im W. 0	im S. 0
zusammen:	im W. 5	im S. 10	im W. 6	im S. 6
also von der Gesamtzahl der Schüler:	im W. 3,4 %	im S. 7,1 %	im W. 4,2 %	im S. 4,2 %

Es bestanden bei 8 getrennt zu unterrichtenden Klassen 3 Turnabteilungen; zur kleinsten von diesen gehörten 33, zur grössten 59 Schüler.

Von einer besonderen Vorturnerstunde abgesehen, waren für den Turnunterricht wöchentlich insgesamt 9 Stunden angesetzt. Ihn erteilte der technische Lehrer Mendler. Der Anstalt steht ein Turnplatz und eine Turnhalle zur Verfügung, welche in unmittelbarer Nähe des Klassengebäudes liegen und nur von den Schülern der Anstalt benutzt werden. Von den Bewegungsspielen werden mit Vorliebe Ballspiele (Schlag-, Grenz-, Schleuder- und Fussball) täglich in den beiden Pausen, desgleichen auch während der Turnstunden betrieben.

2. Chorgesang für die besseren Sänger aller Klassen. Es wurden Choralmessen und vierstimmige kirchliche und weltliche Gesänge für gemischten Chor eingeübt. — 2 St.

Mendler.

3. Zeichnen. An dem fakultativen Zeichenunterricht beteiligten sich im Winter 3, im Sommer 1 Schüler.

Derselbe.

Schwimmen. Am 3. Juni wurde die Schwimmschule eröffnet. 75% der Schüler sind Freischwimmer. Auf Grund ärztlichen Zeugnissen waren vom Baden 3 Schüler befreit.

Schwimmlehrer Gayer.

Uebersicht der eingeführten Lehrbücher.

1. Religionslehre: a) katholische. Dreher, Lehrbuch (I u. II). Dreher, Leitfaden (III). Diözesankatechismus. (IV, V, VI). Mey, Biblische Geschichte.
   b) evangelische. Dr. F. Christlieb, Handbuch der evangelischen Religionslehre. (I—1V). Zahns Biblische Historien von Giebe. (V u. VI). Evangelischer Katechismus, herausgegeben von der rheinischen Provinzial-Synode (V u. VI).
2. Deutsch. Lesebücher von Buschmann. 1. Abteilung (V u. VI), 2. Abteilung (IV, III u. II inf.), 3. Abteilung (II—I). Buschmann, Leitfaden für den Unterricht in der deutschen Sprachlehre (IIIb—VI).

3. Latein. Ellendt-Seyfferts Grammatik (I—VI). Übungsbücher von H. Busch und W. Fries (III a—VI).
4. Griechisch. Kochs Grammatik (I); II a—III b: Dr. A. Kaegi, Griechische Schulgrammatik. Wesener, Elementarbuch (III).
5. Französisch. Ploetz-Kares, Sprachlehre und Übungsbuch, Ausgabe B. (I—III a); Ploetz-Kares, Elementarbuch (III b u. IV).
6. Englisch. Tendering, Grammatik (I—II a).
7. Hebräisch. Baltzer, Schulgrammatik und Übungsbuch (I—II a).
8. Geschichte und Erdkunde. Pütz, Grundriss der Geographie und Geschichte (I u. II a); desgleichen für die mittleren Klassen (II b—IV). Buschmann, Sagen und Geschichten 1. Bd. (V). Daniel, Leitfaden für den Unterricht in der Geographie. (V - I).
9. Mathematik und Rechnen:
   a) Planimetrie: Boymann-Vering (IV—I).
   b) Trigonometrie: Boymann-Vering (II a u. I).
   c) Stereometrie: Boymann-Vering (I).
   d) Algebra: Heilermann und Diekmann (III b—I). Schlömilch, 5stellige Logarithmentafel (II b—I).
   e) Rechnen: Schellen-Lemkes, Aufgabensammlung (VI—IV).
10. Physik und Naturkunde. Koppe, Physik 1. Teil (III a u. II b); 2. Teil (II a u. I). Bänitz, Leitfaden für Zoologie und Botanik (VI—III a).

II. Verfügungen der vorgesetzten Behörde von allgemeinem Interesse.

Eine Verfügung des Königlichen Provinzial-Schulkollegiums vom 10. Dezember gestattet die Weglassung der Rangnummern auf den Zeugnissen der Schüler.

III. Chronik der Anstalt.

1. Eine Verfügung vom 5. Juli 1898 genehmigte die Einführung einer 7. Lateinstunde in Prima für das Schuljahr 1898/99.

2. Durch Verfügung vom 4. Dezember wird die Einführung der kleinen Grammatik der hebräischen Sprache von Dr. Theodor Dreher von Ostern künftigen Jahres ab genehmigt.

3. Der Allerhöchste Geburtstag Seiner Majestät des Kaisers und Königs wurde am 26. Januar durch eine öffentliche Vorfeier, in welcher das Schauspiel mit Gesang in 8 Bildern von Hermann Kipper: „Des Prinzen Heinrich von Preussen Reise um die Welt“ aufgeführt wurde, woran sich die von Oberlehrer Dr. Eck gehaltene Festrede anschloss, festlich begangen.

Am 27. war feierlicher Gottesdienst in der Gymnasialkirche. —

Von Sr. Majestät erhielt der Oberprimaner Kaltenbach: „Deutschlands Seemacht sonst und jetzt“ von Kapitänleutnant a. D. Wislicenus als Prämie zum 27. Januar.

4. Im Auftrage des Herrn Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten erhielten folgende fünf fleissige und befähigte Schüler: „Unser Kaiser“ von G. W. Büxenstein als Prämie: 1. Oberprimaner Reineke. 2. Unterprimaner Sauter 3. Obersekundaner Buk. 4. Untersekundaner Hiller. 5. Obertertianer Mutter.

5. Die schriftliche Reifeprüfung eines zum Ostertermin zugelassenen Oberprimaners fand vom 30. Januar bis 4. Februar statt.

6. Auf Befehl Sr. Majestät des Kaisers und Königs übersandte das Oberhofmarschallamt am 2. Februar die farbige Reproduktion des Bildes: „Flötenconcert Friedrichs des Grossen in Sanssouci von Adolf v. Menzel“ eingerahmt der Anstalt als Geschenk.

7. Am 19. März, am Feste des hl. Joseph, führte der Religionslehrer 8 Schüler der Anstalt, welche in besonderem Unterrichte vorbereitet worden waren, zur ersten hl. Kommunion.

8. Durch Verfügung vom 7. April wurde dem Pfarramtskandidat Junkereit die Vertretung des Superintendenten Gallwitz bei Beurlaubungen oder dienstlichen Verhinderungen gestattet.

9. Entsprechend der Verfügung vom 11. April wurden acht Exemplare: „Unser Kaiser“ von G. W. Büxenstein an folgende Schüler als Prämie verteilt: 1. Edelmann. 2. Endress. 3. Fecker. 4. Heinzelmann. 5. Kaltenbach. (Alle Oberprimaner). 6. Strobel (II O). 7. Lauterwasser (III U). 8. Burkart (IV).

10. Am 20. Juni fand in der Gymnasialkirche ein Trauergottesdienst für den am 18. verstorbenen Obersekundaner Anton Sauter aus Grosselfingen statt; die Königliche Medizinalbehörde hatte nur den Schülern der obersten Klassen die Beteiligung an der Beerdigung gestattet. Der Verstorbene war ein braver, wohlbegabter, seinen Lehrern lieber Schüler.

11. Die schriftliche Reifeprüfung der zum Herbsttermin zugelassenen Oberprimaner begann am 3. und endete am 7. Juli.

12. Der Herr Generalsuperintendent der Rheinprovinz Umbeck nahm am 24. Juli eine Revision des evangelischen Religionsunterrichts vor.

13. Das Auftreten ansteckender Krankheiten veranlasste die Medizinalbehörde, fast der Hälfte der Schüler den Besuch der Anstalt vom 4. bis 18. Juli zu untersagen. Infolgedessen musste auch von dem vorgeschriebenen Ausflug abgesehen werden.

14. Unterricht zu erteilen waren durch Krankheit abgehalten: Oberlehrer Dr. Kolligs am 6. und 20., 21., 22. Oktober, am 24. und 25. Februar, am 12. und 13. Mai, sowie vom 29. Mai bis 4. Juni; Oberlehrer Herff am 20., 21., 22. Oktober und 21. Februar; der

technische Lehrer Mendler am 24. und 25. Oktober; Oberlehrer Müller vom 12. bis 17. Juni. Geschworner war der Direktor am 19. und 20. Dezember, vom 24. bis 27. Mai nahm er an der 7. Rheinischen Direktorenkonferenz in Bonn teil; Oberlehrer Herff war vom 24. bis 29. Februar beurlaubt; vom 3. bis 10. Juli durfte er wegen Erkrankung in seiner Familie nicht unterrichten.

IV. Statistische Mitteilungen.

A. Frequenztabelle.

	O. I.	U. I.	O. II.	U. II.	O. III.	U. III.	IV.	V.	VI.	Summa
1. Bestand am 1. Juni 1898.	5	7	10	11	15	21	20	19	14	122
2. Abgang bis zum Schluss des Schuljahres $18^{97}/_{98}$.	4	—	—	4	2	1	1	—	2	14
3. a. Zugang durch Versetzung zu Michaelis 1898.	6	8	6	13	16	17	19	12	—	97
3. b. Zugang durch Aufnahme zu Michaelis 1898.	—	—	1	—	—	8	2	4	18	33
4. Frequenz am Anfang des Schuljahres $18^{98}/_{99}$.	7	9	9	13	18	27*	24	16	18*	141
5. Zugang im Wintersemester.	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
6. Abgang im Wintersemester.	1	—	2	—	1	—	—	—	—	4
7. a. Zugang durch Versetzung zu Ostern.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7. b. Zugang durch Aufnahme zu Ostern.	—	—	—	—	—	2	—	—	—	2
8. Frequenz am Anfang des Sommersemesters.	6	9	7	13	16	30	24	15	20	140
9. Zugang im Sommersemester.	—	—	—	—	1	—	—	1	—	2
10. Abgang im Sommersemester.	—	—	1	—	—	—	—	—	1	2
11. Frequenz am 1. Juni 1899.	6	9	7	13	17	30	24	16	19	141
12. Durchschnittsalter am 1. Juni 1899.	$19^{11}/_{12}$	$19^{1}/_{12}$	$17^{6}/_{12}$	$17^{11}/_{12}$	$16^{8}/_{12}$	$15^{4}/_{12}$	$14^{3}/_{12}$	$12^{10}/_{12}$	$11^{11}/_{12}$	

*) Ein Schüler trat freiwillig aus IIIa in IIIb und einer aus V in VI zurück.

B. Religions- und Heimatsverhältnisse der Schüler.

	Kathol.	Evang.	Israel.	Einheim.	Auswärt.	Ausländer
1. Am Anfang des Wintersemesters.	125	16	—	54	71	16
2. Am Anfang des Sommersemesters.	124	16	—	54	71	15
3. Am 1. Juni 1899.	123	18	—	55	71	15

Das Zeugnis behufs Meldung zum einjährig-freiwilligen Militairdienst haben erhalten: Ostern 1899: keiner, Herbst 1898: 10 Schüler.

Davon sind zu einem praktischen Berufe abgegangen: 4.

C. Übersicht über die Abiturienten.

1. Im Ostertermin fand die mündliche Reifeprüfung unter dem Vorsitze des durch Verfügung vom 3. Februar zum Königl. Prüfungskommissar ernannten Direktors am 11. März statt. Das Zeugnis der Reife erhielt der einzige Prüfling:

Namen.	Geburtsort.	Geburtstag.	Konfession.	Stand und Wohnort der Eltern.	Gewählter Beruf.
Wannenmacher Sebastian	Rangendingen	9. Juli 1877	katholisch	Landwirt, Rangendingen	Theologie.

2. Im Herbsttermin wurde die mündliche Reifeprüfung ebenfalls unter dem Vorsitze des durch Verfügung vom 4. Juli zum Königlichen Kommissar ernannten Direktors am 1. August abgehalten. Folgenden 6 Schülern wurde das Reifezeugnis zuerkannt:

Namen.	Geburtsort.	Geburtstag.	Konfession.	Stand und Wohnort der Eltern.	Gewählter Beruf.
1. Edelmann Hieronymus	Ebingen	11. Nov. 1880	evangel.	Rentner, Sigmaringen	Militairfach
2. Endress Anton	Killer	18. Juni 1879	kathol.	Lehrer, Killer	Forstfach
3. Fecker Friedrich	Steinhofen	10. Jan. 1881	„	Landwirt, Steinhofen	Theologie
4. Heinzelmann Karl	Steinhilben	19. Dez. 1878	„	Landwirt, Steinhilben	Rechtswissenschaft
5. Kaltenbach Anton	Ruhestetten	19. Mai 1878	„	Landwirt, Ruhestetten	Theologie
6. Reineke Karl	Schloss Weinburg	23. Jan. 1877	„	Fürstl. Obergärtner, Inzigkofen	Theologie

V. Sammlung von Lehrmitteln.

1. Die Lehrerbibliothek, verwaltet von Oberlehrer Plathner, erhielt folgenden Zuwachs:

a) Durch Schenkung:

Von der Fürstlich Hohenzollernschen Hofbibliothek: Zeitschrift des deutschen Palästina-Vereins Bd. XXI. 1./3. Heft nebst den Mitteilungen und Nachrichten. Nr. 3./6. 1898 und 1./2. 1899. — Alemannia, Jahrg. XXVI. 2./3. Heft.

Aus dem Königlichen Hausarchiv: Publikationen aus den Königlich Preussischen Staatsarchiven, Bd. 71—73. Leipzig 1898 und 1899.

Von dem Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medizinalangelegenheiten: Jahrbuch für Volks- und Jugendspiele von E. v. Schenckendorff und F. A. Schmidt, Jahrg. VII. — Gritzner, M. Stammbaum des Preussischen Königshauses. — Seidel, P. Hohenzollern, Jahrbuch. I. Jahrg. 1897.

Von dem Königlichen Provinzial-Schulkollegium in Koblenz: Joh. Sebast. Bach's Werke, Jahrg. 45. 1. und 2. Lieferung, Leipzig 1895.

Von der Königlichen Regierung zu Sigmaringen: Amtsblatt für Hohenzollern.

Von dem Verein für Geschichte und Altertumskunde in Hohenzollern: Mitteilungen des Vereins von dem Jahre 1867/68 an bis zum Jahre 1896/97.

b) Durch Ankauf aus etatsmässigen Mitteln:

Kiesling. Q. Horatius Flaccus, I. T. Oden und Epoden. 3. Aufl. v. Heinze. Berlin 1898. — Rothert, Prof. Dr. E. Karten und Skizzen aus der vaterländischen Geschichte der neueren Zeit (III.) und der ausserdeutschen Geschichte der letzten Jahrhunderte (V. Bd.) Düsseldorf. — Frick und Gaudig. Aus deutschen Lesebüchern. Bd. V. Abt. IV. Liefer. 1—10. Gera und Leipzig. — Herbert Spencer. Die Erziehung in geistiger, sittlicher und leiblicher Hinsicht. Uebersetzt von Dr. Fritz Schultze. Leipzig 1898. — Statistisches Jahrbuch der höheren Schulen, XIX. Jahrg. 1. und 2. Abt. 1898/99. — Schneider, Dr. G. Die Weltanschauung Platos, dargestellt im Anschlusse an den Dialog Phädon. Berlin 1898. — Büxenstein, G. Unser Kaiser. Zehn Jahre der Regierung Wilhelms II. 1888—1898. — Berlin, Leipzig, Stuttgart. — Sext. Propertius' Elegien von Max Rothstein, 2 Teile. Berlin 1898. — Leimbach, K. L. Die deutschen Dichter der Neuzeit und Gegenwart. Bd. VIII. 1. und 2. Liefer. Leipzig und Frankfurt. — Heinze und Schröder. Aufgaben aus deutschen Dramen, Epen und Romanen. XI. und XII. Bdch. Leipzig 1899. — Holl, Dr. K. Fürstbischof Jakob Fugger von Konstanz (1604—1626) und die katholische Reform der Diöcese im ersten Viertel des 17. Jahrhunderts. Freiburg im Breisgau. 1898. — Klein, Dr. H. J. Die Wunder des Erdballes, Leipzig. — Schneider, H. Durch Wissen — zum Glauben. Leipzig 1897. — Baumeister, Dr. A. Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen. III. Bd. 5. und 6. Abt. München 1898. — Rethwisch, C. Jahresberichte über das höhere Schulwesen. XII. Jahrg. 1897. Berlin 1898. — Harnack, O. Schiller. Berlin 1898. — Warnecke, Dr. G. Erläuterungen zu Seemanns Wandbildern. II. Hälfte. Tafel 51—100. Leipzig 1899. — Wildermann, Dr. M. Jahrbuch der Naturwissenschaften. XIV. Jahrg. Freiburg 1899. — Gurlitt, C. Die deutsche Kunst des XIX. Jahrhunderts. Berlin 1899. — Ziegler, Th. Die geistigen und socialen Strömungen des XIX. Jahrhunderts. Berlin 1899. — Petronii Satirae et Liber Priapeorum von Franz Bücheler. Berlin 1882. — Petronius. Uebersetzt von Wilh. Heinse. 2 Bdd. Leipzig. — Tyndall, das Licht. Uebersetzt von Clara Wiedemann, Braunschweig 1895. — Maxwell, Theorie der Wärme. Uebersetzt von Neesen. Braunschweig 1878. — Maxwell, Elektrizität in elementarer Behandlung. Uebersetzt von Graetz. Braunschweig 1883. — Ferner folgende Zeitschriften: Jlberg und Richter. Neue Jahrbücher für das klassische Altertum, Geschichte, deutsche Litteratur und Pädagogik. — Gäa. Natur und Leben. — Hoffmann, Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. — Müller, Zeitschrift für das Gymnasialwesen. — Lyon, Zeitschrift für den deutschen Unterricht. — Hirsch. Mitteilungen aus der historischen Litteratur. — Centralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preussen.

2. Die Schülerbibliothek, ebenfalls verwaltet von Oberlehrer Plathner, erhielt folgenden Zuwachs:

Büxenstein, G. Unser Kaiser. Zehn Jahre der Regierung Wilhelms II. (1888—1898) 2 Exemplare. — Das Neue Universum. 19. Jahrg. — Kapitän Mayne — Reid. Im afrikanischen Busch. — Münchgesang, R. Der Giesserbursch von Nürnberg. — Jakobs, Fr. Hellas. Geographie, Geschichte und Litteratur Griechenlands. 2 Exemplare. — Zingeler, C. Th. Friedrich von Zollern. — Zehme, Dr. A. Die Kulturverhältnisse des deutschen Mittelalters. 2 Exemplare. — Freytags Schulausgaben von Uhland, Voss, Wieland, Shakespeare, Rückert, Nibelungenlied von Hooke und Schulze, 13 Bddch. — Schweiger-Lerchenfeld. Das Mittelmeer. Freiburg 1888. — Kellner, Th. Der Sieg des Kreuzes, Köln. — v. Holleben. Deutsches Flottenbuch. Leipzig.

3. Anschauungsmittel für den geschichtlichen und geographischen Unterricht.

Seemanns Wandbilder, Liefer. 8—10. Leipzig 1899. — Gurlitt. Castra Romana und Alesia. Anschauungstafeln zu Cäsar. Friedrich Andreas Perthes. Gotha. — v. Liliencron, Freiherr, die deutsche Marine, unter Zugrundelegung des neuen Flottengesetzes, mit Illustrationen von Willy Stöwer. Berlin 1899.

4. Für das von Oberlehrer Dr. Eck verwaltete physikalische Kabinett wurde ein Differenzial-Thermoskop mit Nebenapparaten angeschafft.

5. Für das von Oberlehrer Herff verwaltete naturwissenschaftliche Kabinett wurden angeschafft:

1. Ein Wiederkäuermagen vom Schaf. 2. Blütenmodelle vom Raps und von der Erbse. 3. Drei Tafeln vom wilden Schwein, vom Gorilla und vom Koloradokäfer.

6. Lehrmittel für den technischen Unterricht.

Des Prinzen Heinrich Reise um die Welt von Kipper: 2 Partit., 40 Chorst., 11 Textbücher. Geschenkt wurden von Oberlehrer Strobel: Singenberger, vierstimmige Messe; 1 Partitur und 36 Stimmen und Obersteiner, dreistimmige Messe, 36 Stimmen; Festmarsch von Egler, Geschenk des Komponisten. — 3 Hefte Figurenzeichnen von Koopmann, ein Heft Tierköpfe von Heine. — 2 Stück: Kreisendes Rad.

VI. Stiftungen und Unterstützungen von Schülern.

a. Stiftungen, und zwar:

1. Die von dem Hochseligen Fürsten Karl Anton von Hohenzollern Königliche Hoheit im Jahre 1868 begründete „Prinz Wilhelm Stiftung“ für brave und bedürftige Schüler des hiesigen Gymnasiums aus den Hohenzollernschen Landen; unter gleich würdigen Bewerbern haben jedesmal die Schüler der höheren Klasse den Vorzug vor denen der niederen. Der Stiftungsfonds wurde durch letztwillige Bestimmung des Hochseligen Fürsten vom Jahre 1872 (bezw. 1879) um 4000 Mark vermehrt, so dass in Zukunft jährlich mindestens zwei Stipendien zu ungefähr 130 Mark zur Verteilung kommen können.

2. Die „Sales Sonntagsche Stiftung“ zu 24 Mark,

3. die aus der „Armenseelenpfründe zu Trochtelfingen“ fliessenden Stipendien im Betrage von 356 Mark 79 Pfg., welche in drei bis fünf Portionen vergeben werden.

Bei Bewerbungen um die Sales Sonntagsche Stiftung haben Verwandte des Stifters den Vorzug, auch wenn sie nicht dem hiesigen Gymnasium angehören. Um die aus der Armenseelenpfründe zu Trochtelfingen fliessenden Stipendien können sich von den Schülern des Gymnasiums nur solche bewerben, welche beabsichtigen sich dem Studium der Theologie zuzuwenden; dieselben müssen aus dem ehemaligen Fürstentum Sigmaringen stammen, doch haben diejenigen, welche den ehemaligen Ämtern Trochtelfingen und Jungnau angehören, den Vorzug.

Infolge der Herabsetzung des Zinsfusses werden die Stipendien von 1899 ab in der genannten Weise verringert.

b. Unterstützungen. An Freistellen wurden zehn Prozent der Gesamt-Solleinnahme des Schulgeldes vergeben.

VII. Mitteilungen an die Schüler und an deren Eltern.

1. Montag, den 14. August.

Um 8 Uhr findet ein feierlicher Gottesdienst in der Gymnasialkirche statt; um 9 Uhr ist Verteilung der Zeugnisse in den betreffenden Klassen.

2. Das neue Schuljahr.

Das neue Schuljahr von Herbst 1899 bis Herbst 1900 beginnt Mittwoch, den 20. September, vormittags 8 Uhr mit einem feierlichen Gottesdienste in der Gymnasialkirche; der Unterricht beginnt um 9 Uhr.

Anmeldungen neuer Schüler nimmt der Unterzeichnete am Dienstag, den 19. September, vormittags von 8—9 Uhr im Konferenzzimmer des Gymnasiums entgegen; doch kann die Anmeldung auch vorher schriftlich erfolgen. Bei der Anmeldung ist 1) der Geburtsschein, 2) ein Abgangszeugnis der zuletzt besuchten Anstalt und 3) eine Bescheinigung über erfolgte Impfung oder bei zurückgelegtem 12. Lebensjahre über Wiederimpfung vorzulegen. Die Aufnahme in die Sexta geschieht vorschriftsmässig in der Regel nicht vor dem vollendeten 9. Lebensjahre. Die elementaren Vorkenntnisse, welche bei der Prüfung für die Sexta nachgewiesen werden müssen, lassen sich dahin zusammenfassen, dass gefordert wird: Geläufiges Lesen deutscher und lateinischer Druckschrift; Kenntnis der Redeteile; eine leserliche Handschrift; Fertigkeit, Diktiertes ohne grobe orthographische Fehler nachzuschreiben; Sicherheit in den vier Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen; Bekanntschaft mit den Geschichten des Alten und des Neuen Testamentes. Die Aufnahmeprüfungen beginnen Dienstag, den 19. September, vormittags 10 Uhr.

Hinsichtlich der Wahl und jedes späteren Wechsels der Wohnung bei auswärtigen Schülern ist vorherige Rücksprache mit dem Direktor und dessen Genehmigung erforderlich. Ein Unterbringen in Wirtshäusern ist nicht gestattet.

Sigmaringen im August 1899.

Dr. Eberhard,
Gymnasialdirektor.

WILHELM-GYMNASIUM ZU HAMBURG

Die
emente der Differential-
und Integralrechnung

im Lehrplan des humanistischen Gymnasiums

VON

EDMUND HOPPE

HAMBURG 1910

bei Lütcke & Wulff, Eines Hohen Senates, wie auch des Johanneums Buchdruckern

cr. Nr. 1000.

Wenn ich es unternehme, über Differential- und Integralrechnung auf dem humanistischen Gymnasium zu schreiben, so bin ich mir durchaus bewußt, daß ich damit nichts Neues bringe. Würde ich nur die Forderung, dieses Gebiet der mathematischen Wissenschaft in den Unterrichtsbetrieb eines Gymnasiums einzuführen, aufstellen und durch den Hinweis auf seine Bedeutung für die moderne Kultur oder seinen Wert für die mathematische Bildung begründen wollen, würde ich nur theoretisch zu der Frage, ob ein solcher Unterricht notwendig oder doch wünschenswert sei, Stellung nehmen wollen, so bliebe freilich das Folgende besser ungeschrieben; denn die Begründung für die Forderung solchen Unterrichts ist in vorbildlicher Klarheit und Gründlichkeit von Geheimrat Klein[1]) in verschiedenen Publikationen und Vorträgen geboten. Ich betone ausdrücklich, daß es sich bei den Ausführungen Kleins nicht etwa um Oberrealschulen und Realgymnasien handelt, sondern gerade um humanistische Gymnasien. Sehr oft wird dies übersehen, und man tut gern so, als ob man die Reform des mathematischen Unterrichts wohl den Oberrealschulen gönnen möchte, aber den Gymnasien sei der Eintritt in das Paradies verschlossen. Schon vor den durch die aufopfernde Tätigkeit Kleins in Fluß gebrachten Bestrebungen zur Reform unseres mathematischen Unterrichts war in Österreich durch Höfler[2]) diese Reform vorbereitet, und dementsprechend ist dort die Reform erheblich weiter durchgeführt als bei uns, wo die Schwierigkeiten, die Massen in Bewegung zu bringen, wie es scheint, ganz besonders groß sind.

Es muß zugegeben werden, daß Kleins Vorschläge selbst bei sehr tüchtigen Mathematiklehrern Widerspruch fanden allein, nachdem Holzmüllers Gründe gegen die Einführung von Thaer[3]) eine einwandfreie Widerlegung gefunden haben, darf wohl vorausgesetzt werden, daß ein theoretischer Widerspruch nicht mehr erhoben

[1]) Klein, F. Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen, Teubner, Leipzig 1904. Jahresbericht der Deutsch. Mathem. Vereinig., Teubner, Leipzig 1905, p. 33.

[2]) Österreichische Mittelschule, Jahrg. V, Wien 1891.

[3]) Monatsschrift für höhere Schulen, Berlin 1904, p. 86.

wird, wenigstens nicht von mathematischer Seite, wenn man Forderung aufstellt, die Schüler sollen in die Elemente der Differen und Integralrechnung eingeführt werden.

Ich habe darum nicht mehr nötig, die Forderung zu begründ es soll vielmehr im folgenden ein Bericht gegeben werden ü die Erfahrungen und die Resultate, welche mit der Einführ dieses Unterrichts gewonnen sind. Auch mit der praktischen A führung dieses Unterrichts ist das Wilhelm-Gymnasium nicht erste; wir müssen um 50 Jahre zurückgehen, um auf den Mann kommen, der es für „verkehrt" hielt, seinen Schülern die Gesic punkte vorzuenthalten, welche ihnen einen Einblick in den Zusamm hang der mathematischen Disziplin und ein Verständnis für umfassende Bedeutung der Mathematik ermöglichten. Schellba Name wird immer mit Ehren genannt werden, wenn man mathematischen Unterricht am Gymnasium reden will, und wa Berlin vor 50 Jahren nicht nur möglich war, sondern im grö Segen getrieben ist, das sollte heute unmöglich sein oder k guten Früchte zeitigen?

Warum jenes Beispiel, welches Schellbach gab, für preußische Unterrichtsverwaltung nicht die Veranlassung wu schon damals mit der Einführung dieser Methode allgemein vo gehen, hat verschiedene Gründe. Klein gibt in seinem Ref an die Breslauer Naturforscherversammlung zwei Gründe an. „ herrschende Neuhumanismus mit seinen vorwiegend literar ästhetischen Interessen hat mannigfach hemmend gewirkt — f den Neuhumanismus kommt die Mathematik, wenn überhaupt nur nach ihrem formalen Werte, nicht nach ihrem Inhal Betracht." Ein zweiter Grund soll sein, „daß die mathemati Forscher in ihrer Mehrzahl ausschließlich von den Interessen Spezialität beherrscht waren". Ich möchte hinzufügen, daß d jungen Mathematiker an den Schulen durch Belastung mit al Unterrichtsstunden, für welche sie keinerlei Vorbildung bes gezwungen wurden, ihre Arbeitszeit mit dem Studium dieser he genen Unterrichtsfächer zu verbringen, dadurch von dem W arbeiten auf mathematischem Gebiet abgehalten wurden un schließlich, wenn sie den Unterricht in der Prima übernah nicht mehr imstande waren, weitergehende Gesichtspunkte mit Aufgaben der Elementarmathematik zu verbinden. In vielen Fl mag auch die Gehaltsfrage die Ursache für die geistige Verkümm gewesen sein. Weil man den Gymnasiallehrern das Gehalt v

hielt, welches die andern akademisch gebildeten Beamten bezogen, en sich viele veranlaßt, nach einem Ersatz zu suchen, und so t die Lohnarbeit an die Stelle der wissenschaftlichen, zum großen naden der Schule und der Schüler. Es gehörte in der Tat ein roismus dazu, lieber zu hungern, als auf wissenschaftliche Arbeit verzichten. In Preußen ist das ja nun anders geworden; dort rden also diese Gründe nicht mehr hemmend im Wege stehen, l die Behörde darf erwarten, daß es nicht mehr an Kräften zur orm fehlen wird. Immerhin ist die Tatsache nicht zu leugnen, daß zu dem Zeitpunkt, wo Klein seine pädagogischen Bemühungen ann, auf den Gymnasien die Schellbachschen Bestrebungen verschwindenden Ausnahmen völlig vergessen waren.

Die Bemühungen Kleins fanden zunächst ihren Abschluß in den enannten Meraner Lehrplänen, die in bezug auf den mathematischen erricht wohl allgemeine Zustimmung erfahren haben. Leider t es noch an der Voraussetzung zu ihrer Verwirklichung, nämlich der Zuteilung von vier Stunden Mathematikunterricht in den tien. In Hamburg hat sogar die Untersekunda nur drei Stunden! e allgemeine Einführung des Meraner Lehrplans für Mathematik soviel ich weiß, noch nirgend stattgefunden, so wünschenswert auch wäre; aber die preußische Unterrichtsverwaltung hat in nderen Fällen die Einführung des reformierten Unterrichtsplanes attet. Auch die hamburgische Oberschulbehörde hat auf meine gabe die Erlaubnis erteilt, die neue Methode am Wilhelm-masium zu probieren, und dafür bin ich der Behörde zu auf-tigem Danke verpflichtet. Denn es ist zweifellos zunächst die gabe der Mathematiker, Erfahrungen zu sammeln und mitzu-n, ehe erwartet werden darf, daß die Behörde die neuen Lehr-e allgemein einführt. Es ist auch, wie ich schon bei der rechung in Dresden 1907 ausführte, noch nicht an der Zeit, bücher für diesen Unterricht zu verfassen, sondern vor allem mt es darauf an, sich und andere zu überzeugen, daß dieser rricht günstigere Resultate hat als die frühere Methode, ohne die ler mehr zu belasten. Darum glaube ich, daß es wünschenswert ist, e Erfahrung, die ich an einer jetzt mit dem Examen entlassenen se von Obersekunda bis zur Oberprima mit dem neuen Unter-sstoff gemacht habe, hier mitzuteilen. Dadurch werden am besten Bedenken gegen die allgemeine Einführung zerstreut werden.

Es handelte sich zunächst darum, einen Plan für diesen V
such aufzustellen. Die Meraner Pläne boten wohl eine Anleitu
ließen sich aber nicht einfach übertragen, nicht nur aus dem Gru
weil in den hamburgischen Gymnasien in beiden Tertien und Un
sekunda nur je drei Mathematikstunden zur Verfügung ste
sondern vor allem auch aus dem Grunde, weil sich dieser Ver
zunächst nur auf eine Klasse erstrecken sollte. Nun haben
ein vollständiges Doppelgymnasium mit Oster- und Michaelisklas
also auch mit der Möglichkeit zu rechnen, daß alle Halbj
neue Schüler durch Zurückversetzung in den Coetus eintreten
andere aus demselben in andere Klassen zurücktreten. Da d
Wechsel in den mittleren Klassen naturgemäß stärker ist a
den oberen Klassen, ist eine solche neue Methode des Unterr
in diesen Klassen nicht gut versuchsweise in einem Coetus d
zuführen, ohne jene Zurückversetzten in schwere Bedrängni
bringen. Es wird sich meiner Meinung nach empfehlen, für
mittleren Klassen mit der Durchführung der Meraner Besch
zu warten, bis die allgemeine Einführung erfolgen kann, d. h
alle Lehrer der Schule in der gleichen Methode unterrichten
ist natürlich auch jetzt schon nicht nur möglich, sondern
wünschenswert, daß der Lehrer bei dem prinzipiellen Festhalte
dem alten Lehrplan doch die Gesichtspunkte, welche der
Richtung angehören, besonders betont und so einem analyti
Unterricht in den oberen Klassen den Weg bereitet. Es
übrigens gleich betont werden, daß ich es nicht für richtig
würde, schon bei der ersten Einführung in die Lösung von Gleich
mit zwei Unbekannten diese als Variabele zu betrachten u
schon auf dieser Stufe den Funktionsbegriff einzuführen. Zu
müssen die Schüler die Größen als feste Zahlenwerte betra
um eine Sicherheit in der Lösung der Gleichungen und hinrei
Gewandtheit in der Behandlung algebraischer Ausdrück
bekommen.

Eine sehr wesentliche Vorarbeit aber liegt in diesen F
auf geometrischem Gebiet. Klein hat mit Recht darauf aufm
gemacht, daß das verdienstliche Werk Euklids sicherlich ni
Schulbuch geschrieben ist. Als solches ist es erst mehrere
hunderte nach Euklid benutzt, als man die Methode der
griechischen Forscher vergessen hatte. Jene haben induktiv ge
und induktiv unterrichtet, wie wir es glücklicherweise ja bei
nachweisen können, wie es aber auch von Platon und den

hagoreern zweifellos geübt ist. Läßt man die Lehrsätze als sultate der Induktion, als Lösung von Aufgaben erscheinen, hat man die Raumanschauung der Schüler so weitgehend ausildet, daß damit dem späteren analytischen Unterricht aufs beste gearbeitet ist. Natürlich wird auf dieser Stufe auch mit den metrischen Zahlenbildern gearbeitet werden müssen; das ist nes Erachtens schon um der irrationalen Zahlen willen durch- notwendig. Auch die Betrachtungen über die Veränderung der talt konstruktiver Gebilde bei Veränderung der Größenwerte gegebenen Stücke sind wertvoll und möglich, wie ich das schon 20 und 30 Jahren erprobt habe. Ganz besonderen Wert aber :e man in der Untersekunda auf die Proportionalität und die lichkeitslage auch bei Polygonen legen, denn man arbeitet damit allgemeinen Perspektive am wirksamsten vor. Ein solcher ktiv geometrischer Unterricht bereitet den Boden besser als adisch eingestreute Aufgaben über funktionale Abhängigkeit; ı eine gründlichere Behandlung ist bei drei Wochenstunden doch t möglich. Natürlich sind alle spitzfindigen Konstruktionen, n Aufstellung man in der Zeit der Scholastik für Mathematik , unbedingt auszuschließen; aber wenn man das auch tut, wird ı keine Zeit bleiben, um wirklich den Funktionsbegriff induktiv en Mittelklassen herauszuarbeiten.

Alle diese Gründe bestimmten mich, die Einführung der neuen node erst von Obersekunda an zu beantragen, und der Verlauf Unterrichts scheint mir die Gewähr zu geben, daß man auch ı noch das Ziel sehr wohl erreichen kann. Es ist natürlich, auch in den oberen Klassen noch Rücksicht zu nehmen ist auf ickversetzungen, wenn sie auch seltener sind. Das erschwerte rgemäß die Aufstellung eines solchen Lehrganges sehr und zwang , die Hauptarbeit in die Prima, und zwar in das zweite Semester Unterprima und das erste der Oberprima, zu verlegen, so daß ler, welche bis zum zweiten Semester der Unterprima in den us eintraten, imstande waren, nach kurzer Zeit mitzuarbeiten. habe solchen Schülern einige Wochen eine Extrastunde gegeben, in keinem Falle haben sich Schwierigkeiten herausgestellt; sie n sehr schnell in den Lehrgang so weit eingeführt, daß sie lg hatten. Aus dieser Rücksichtnahme erklären sich die meisten eichungen von dem Meraner Lehrplan, nur in einigen Punkten ich sachliche Bedenken gegen den Lehrplan und würde auch , wenn in allen oberen Klassen die neue Methode eingeführt

wird, diese Bedenken geltend machen. Von diesen Ausstellung
wird an den betreffenden Stellen selbst die Rede sein, nur ein
Punkt möchte ich schon hier hervorheben, da er in Zusammenha
steht mit dem Pensum der Untersekunda. Er betrifft die Einführu
der Wurzeln.

Es scheint geheiligte Tradition zu sein, zunächst die Poten
mit ganzzahligen Exponenten durchzunehmen, um damit die Pote
regeln abzuleiten, dann die Wurzeln als ein gänzlich ne
Gebiet einzuführen, hier alle Operationen wieder mit ganzzahli
Wurzelexponenten abzuleiten und dann Potenzen mit gebroche
Exponenten durchzunehmen. Schon bei meinem Eintritt in
Lehramt ist mir diese Zeitvergeudung unangenehm gewesen,
ich habe, nachdem die Potenzregeln mit ganzzahligen positi
Exponenten abgeleitet waren, die Erweiterung des Potenzbegri
auf negative und gebrochene Exponenten angeschlossen. Das
den Schülern gar nichts Ungewohntes; schon beim Multiplikati
begriff ist eine solche Erweiterung nötig, sobald man mit relat
Zahlen multipliziert. Es wird also keinen Schüler aufregen,
die Definition: a^m heißt, a soll $m$mal als Faktor gesetzt wer
oder, wie man die Potenz sonst zunächst bestimmen will, erwe
werden muß, wenn wir für m auch negative oder gebrochene Za
zulassen. Das zwingt dazu, die Potenz als Exponentialgröß
fassen. Damit ist dann aber die Lehre von den Wurzeln s
mitgegeben, und es ist gänzlich überflüssig, irgend welche
Wurzelregeln abzuleiten und gar lernen zu lassen. Man bra
nur jede Wurzel als Potenz mit gebrochenen Exponenten schr
zu lassen, und kein Schüler hat dann Schwierigkeiten. Natü
muß das an einer Reihe von Beispielen geübt werden, aber ich
oft genug das Experiment gemacht, daß, nachdem die Potenz
in der angedeuteten Weise, auf gebrochene Exponenten ausged

durchgenommen war und den Schülern erzählt war, daß $\sqrt[n]{a}$

eine andere Schreibweise sei für $a^{\frac{1}{n}}$, selbst die schwächsten U
sekundaner die schwierigsten Wurzelausdrücke der Aufg
sammlungen fehlerlos auflösen konnten. Warum also in den
gabensammlungen noch heute bis zu 20 Seiten mit solchen W
ausdrücken und den „Wurzelregeln“ angefüllt sind, ist mir
unverständlich. Daß das Wurzelausziehen die Umkehrun
Potenzierens ist, lernen die Schüler natürlich auch mit dieser M

Die
emente der Differential-
und Integralrechnung

im Lehrplan des humanistischen Gymnasiums

VON

EDMUND HOPPE

HAMBURG 1910

bei Lütcke & Wulff, Eines Hohen Senates, wie auch des Johanneums Buchdruckern

Nr. 1000.

Wenn ich es unternehme, über Differential- und Integral-
chnung auf dem humanistischen Gymnasium zu schreiben, so bin
h mir durchaus bewußt, daß ich damit nichts Neues bringe. Würde
ı nur die Forderung, dieses Gebiet der mathematischen Wissenschaft
den Unterrichtsbetrieb eines Gymnasiums einzuführen, aufstellen
d durch den Hinweis auf seine Bedeutung für die moderne Kultur
er seinen Wert für die mathematische Bildung begründen wollen,
ürde ich nur theoretisch zu der Frage, ob ein solcher Unterricht
twendig oder doch wünschenswert sei, Stellung nehmen wollen,
bliebe freilich das Folgende besser ungeschrieben; denn die
gründung für die Forderung solchen Unterrichts ist in vorbild-
her Klarheit und Gründlichkeit von Geheimrat Klein[1]) in ver-
ıiedenen Publikationen und Vorträgen geboten. Ich betone aus-
ücklich, daß es sich bei den Ausführungen Kleins nicht etwa
ı Oberrealschulen und Realgymnasien handelt, sondern gerade
ı humanistische Gymnasien. Sehr oft wird dies übersehen,
d man tut gern so, als ob man die Reform des mathematischen
ıterrichts wohl den Oberrealschulen gönnen möchte, aber den
ymnasien sei der Eintritt in das Paradies verschlossen. Schon
r den durch die aufopfernde Tätigkeit Kleins in Fluß gebrachten
strebungen zur Reform unseres mathematischen Unterrichts war
Österreich durch Höfler[2]) diese Reform vorbereitet, und dem-
tsprechend ist dort die Reform erheblich weiter durchgeführt als
uns, wo die Schwierigkeiten, die Massen in Bewegung zu bringen,
e es scheint, ganz besonders groß sind.

Es muß zugegeben werden, daß Kleins Vorschläge selbst bei
ıst tüchtigen Mathematiklehrern Widerspruch fanden allein, nach-
ı Holzmüllers Gründe gegen die Einführung von Thaer[3]) eine
wandfreie Widerlegung gefunden haben, darf wohl vorausgesetzt
rden, daß ein theoretischer Widerspruch nicht mehr erhoben

[1]) Klein, F. Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen
terrichts an den höheren Schulen, Teubner, Leipzig 1904. Jahresbericht der
hemat. Vereinig., Teubner, Leipzig 1905, p. 33.

[2]) Österreichische Mittelschule, Jahrg. V, Wien 1891.

[3]) Monatsschrift für höhere Schulen, Berlin 1904, p. 86.

wird, wenigstens nicht von mathematischer Seite, wenn man die Forderung aufstellt, die Schüler sollen in die Elemente der Differential- und Integralrechnung eingeführt werden.

Ich habe darum nicht mehr nötig, die Forderung zu begründen, es soll vielmehr im folgenden ein Bericht gegeben werden über die Erfahrungen und die Resultate, welche mit der Einführung dieses Unterrichts gewonnen sind. Auch mit der praktischen Ausführung dieses Unterrichts ist das Wilhelm-Gymnasium nicht das erste; wir müssen um 50 Jahre zurückgehen, um auf den Mann zu kommen, der es für „verkehrt“ hielt, seinen Schülern die Gesichtspunkte vorzuenthalten, welche ihnen einen Einblick in den Zusammenhang der mathematischen Disziplin und ein Verständnis für die umfassende Bedeutung der Mathematik ermöglichten. Schellbachs Name wird immer mit Ehren genannt werden, wenn man vom mathematischen Unterricht am Gymnasium reden will, und was in Berlin vor 50 Jahren nicht nur möglich war, sondern im größten Segen getrieben ist, das sollte heute unmöglich sein oder keine guten Früchte zeitigen?

Warum jenes Beispiel, welches Schellbach gab, für die preußische Unterrichtsverwaltung nicht die Veranlassung wurde schon damals mit der Einführung dieser Methode allgemein vorzugehen, hat verschiedene Gründe. Klein gibt in seinem Referat an die Breslauer Naturforscherversammlung zwei Gründe an. „Der herrschende Neuhumanismus mit seinen vorwiegend literarisch ästhetischen Interessen hat mannigfach hemmend gewirkt — für den Neuhumanismus kommt die Mathematik, wenn überhaupt, so nur nach ihrem formalen Werte, nicht nach ihrem Inhalt in Betracht.“ Ein zweiter Grund soll sein, „daß die mathematischen Forscher in ihrer Mehrzahl ausschließlich von den Interessen ihrer Spezialität beherrscht waren“. Ich möchte hinzufügen, daß die jungen Mathematiker an den Schulen durch Belastung mit allerlei Unterrichtsstunden, für welche sie keinerlei Vorbildung besaßen, gezwungen wurden, ihre Arbeitszeit mit dem Studium dieser heterogenen Unterrichtsfächer zu verbringen, dadurch von dem Weiterarbeiten auf mathematischem Gebiet abgehalten wurden und so schließlich, wenn sie den Unterricht in der Prima übernahmen, nicht mehr imstande waren, weitergehende Gesichtspunkte mit den Aufgaben der Elementarmathematik zu verbinden. In vielen Fällen mag auch die Gehaltsfrage die Ursache für die geistige Verkümmerung gewesen sein. Weil man den Gymnasiallehrern das Gehalt vo

thielt, welches die andern akademisch gebildeten Beamten bezogen, hen sich viele veranlaßt, nach einem Ersatz zu suchen, und so t die Lohnarbeit an die Stelle der wissenschaftlichen, zum großen haden der Schule und der Schüler. Es gehörte in der Tat ein roismus dazu, lieber zu hungern, als auf wissenschaftliche Arbeit verzichten. In Preußen ist das ja nun anders geworden; dort rden also diese Gründe nicht mehr hemmend im Wege stehen, d die Behörde darf erwarten, daß es nicht mehr an Kräften zur form fehlen wird. Immerhin ist die Tatsache nicht zu leugnen, daß zu dem Zeitpunkt, wo Klein seine pädagogischen Bemühungen gann, auf den Gymnasien die Schellbachschen Bestrebungen verschwindenden Ausnahmen völlig vergessen waren.

Die Bemühungen Kleins fanden zunächst ihren Abschluß in den enannten Meraner Lehrplänen, die in bezug auf den mathematischen terricht wohl allgemeine Zustimmung erfahren haben. Leider lt es noch an der Voraussetzung zu ihrer Verwirklichung, nämlich der Zuteilung von vier Stunden Mathematikunterricht in den tien. In Hamburg hat sogar die Untersekunda nur drei Stunden! e allgemeine Einführung des Meraner Lehrplans für Mathematik , soviel ich weiß, noch nirgend stattgefunden, so wünschenswert auch wäre; aber die preußische Unterrichtsverwaltung hat in onderen Fällen die Einführung des reformierten Unterrichtsplanes tattet. Auch die hamburgische Oberschulbehörde hat auf meine gabe die Erlaubnis erteilt, die neue Methode am Wilhelm-mnasium zu probieren, und dafür bin ich der Behörde zu auf-tigem Danke verpflichtet. Denn es ist zweifellos zunächst die gabe der Mathematiker, Erfahrungen zu sammeln und mitzu-en, ehe erwartet werden darf, daß die Behörde die neuen Lehr-ne allgemein einführt. Es ist auch, wie ich schon bei der prechung in Dresden 1907 ausführte, noch nicht an der Zeit, rbücher für diesen Unterricht zu verfassen, sondern vor allem mt es darauf an, sich und andere zu überzeugen, daß dieser erricht günstigere Resultate hat als die frühere Methode, ohne die üler mehr zu belasten. Darum glaube ich, daß es wünschenswert ist, ne Erfahrung, die ich an einer jetzt mit dem Examen entlassenen sse von Obersekunda bis zur Oberprima mit dem neuen Unter-tsstoff gemacht habe, hier mitzuteilen. Dadurch werden am besten Bedenken gegen die allgemeine Einführung zerstreut werden.

Es handelte sich zunächst darum, einen Plan für diesen Ve
such aufzustellen. Die Meraner Pläne boten wohl eine Anleitun
ließen sich aber nicht einfach übertragen, nicht nur aus dem Grun
weil in den hamburgischen Gymnasien in beiden Tertien und Unt
sekunda nur je drei Mathematikstunden zur Verfügung steh
sondern vor allem auch aus dem Grunde, weil sich dieser Versu
zunächst nur auf eine Klasse erstrecken sollte. Nun haben
ein vollständiges Doppelgymnasium mit Oster- und Michaelisklass
also auch mit der Möglichkeit zu rechnen, daß alle Halbjah
neue Schüler durch Zurückversetzung in den Coetus eintreten o
andere aus demselben in andere Klassen zurücktreten. Da die
Wechsel in den mittleren Klassen naturgemäß stärker ist als
den oberen Klassen, ist eine solche neue Methode des Unterric
in diesen Klassen nicht gut versuchsweise in einem Coetus dur
zuführen, ohne jene Zurückversetzten in schwere Bedrängnis
bringen. Es wird sich meiner Meinung nach empfehlen, für di
mittleren Klassen mit der Durchführung der Meraner Beschlü
zu warten, bis die allgemeine Einführung erfolgen kann, d. h.
alle Lehrer der Schule in der gleichen Methode unterrichten.
ist natürlich auch jetzt schon nicht nur möglich, sondern s
wünschenswert, daß der Lehrer bei dem prinzipiellen Festhalten
dem alten Lehrplan doch die Gesichtspunkte, welche der ne
Richtung angehören, besonders betont und so einem analytisc
Unterricht in den oberen Klassen den Weg bereitet. Es
übrigens gleich betont werden, daß ich es nicht für richtig ha
würde, schon bei der ersten Einführung in die Lösung von Gleichun
mit zwei Unbekannten diese als Variabele zu betrachten und
schon auf dieser Stufe den Funktionsbegriff einzuführen. Zunä
müssen die Schüler die Größen als *feste* Zahlenwerte betracl
um eine Sicherheit in der Lösung der Gleichungen und hinreich
Gewandtheit in der Behandlung algebraischer Ausdrücke
bekommen.

Eine sehr wesentliche Vorarbeit aber liegt in diesen Kl
auf geometrischem Gebiet. *Klein* hat mit Recht darauf aufmer
gemacht, daß das verdienstliche Werk *Euklids* sicherlich nicl
Schulbuch geschrieben ist. Als solches ist es erst mehrere
hunderte nach *Euklid* benutzt, als man die Methode der gr
griechischen Forscher vergessen hatte. Jene haben induktiv gearb
und induktiv unterrichtet, wie wir es glücklicherweise ja bei H
nachweisen können, wie es aber auch von *Platon* und den le

thagoreern zweifellos geübt ist. Läßt man die Lehrsätze als esultate der Induktion, als Lösung von Aufgaben erscheinen, hat man die Raumanschauung der Schüler so weitgehend aus-bildet, daß damit dem späteren analytischen Unterricht aufs beste gearbeitet ist. Natürlich wird auf dieser Stufe auch mit den ometrischen Zahlenbildern gearbeitet werden müssen; das ist ines Erachtens schon um der irrationalen Zahlen willen durch-s notwendig. Auch die Betrachtungen über die Veränderung der stalt konstruktiver Gebilde bei Veränderung der Größenwerte gegebenen Stücke sind wertvoll und möglich, wie ich das schon 20 und 30 Jahren erprobt habe. Ganz besonderen Wert aber lte man in der Untersekunda auf die Proportionalität und die nlichkeitslage auch bei Polygonen legen, denn man arbeitet damit allgemeinen Perspektive am wirksamsten vor. Ein solcher uktiv geometrischer Unterricht bereitet den Boden besser als radisch eingestreute Aufgaben über funktionale Abhängigkeit; n eine gründlichere Behandlung ist bei drei Wochenstunden doch nt möglich. Natürlich sind alle spitzfindigen Konstruktionen, en Aufstellung man in der Zeit der Scholastik für Mathematik lt, unbedingt auszuschließen; aber wenn man das auch tut, wird h keine Zeit bleiben, um wirklich den Funktionsbegriff induktiv den Mittelklassen herauszuarbeiten.

Alle diese Gründe bestimmten mich, die Einführung der neuen thode erst von Obersekunda an zu beantragen, und der Verlauf Unterrichts scheint mir die Gewähr zu geben, daß man auch n noch das Ziel sehr wohl erreichen kann. Es ist natürlich, auch in den oberen Klassen noch Rücksicht zu nehmen ist auf ückversetzungen, wenn sie auch seltener sind. Das erschwerte rgemäß die Aufstellung eines solchen Lehrganges sehr und zwang u, die Hauptarbeit in die Prima, und zwar in das zweite Semester Unterprima und das erste der Oberprima, zu verlegen, so daß üler, welche bis zum zweiten Semester der Unterprima in den tus eintraten, imstande waren, nach kurzer Zeit mitzuarbeiten. habe solchen Schülern einige Wochen eine Extrastunde gegeben, in keinem Falle haben sich Schwierigkeiten herausgestellt; sie en sehr schnell in den Lehrgang so weit eingeführt, daß sie lg hatten. Aus dieser Rücksichtnahme erklären sich die meisten eichungen von dem Meraner Lehrplan, nur in einigen Punkten e ich sachliche Bedenken gegen den Lehrplan und würde auch n, wenn in allen oberen Klassen die neue Methode eingeführt

wird, diese Bedenken geltend machen. Von diesen Ausstellung
wird an den betreffenden Stellen selbst die Rede sein, nur ein
Punkt möchte ich schon hier hervorheben, da er in Zusammenha
steht mit dem Pensum der Untersekunda. Er betrifft die Einführu
der Wurzeln.

Es scheint geheiligte Tradition zu sein, zunächst die Potenz
mit ganzzahligen Exponenten durchzunehmen, um damit die Pote
regeln abzuleiten, dann die Wurzeln als ein gänzlich neu
Gebiet einzuführen, hier alle Operationen wieder mit ganzzahlig
Wurzelexponenten abzuleiten und dann Potenzen mit gebrochen
Exponenten durchzunehmen. Schon bei meinem Eintritt in d
Lehramt ist mir diese Zeitvergeudung unangenehm gewesen, u
ich habe, nachdem die Potenzregeln mit ganzzahligen positiv
Exponenten abgeleitet waren, die Erweiterung des Potenzbegrif
auf negative und gebrochene Exponenten angeschlossen. Das
den Schülern gar nichts Ungewohntes; schon beim Multiplikatio
begriff ist eine solche Erweiterung nötig, sobald man mit relati
Zahlen multipliziert. Es wird also keinen Schüler aufregen, d
die Definition: a^m heißt, a soll $m$mal als Faktor gesetzt werd
oder, wie man die Potenz sonst zunächst bestimmen will, erweit
werden muß, wenn wir für m auch negative oder gebrochene Zah
zulassen. Das zwingt dazu, die Potenz als Exponentialgröße
fassen. Damit ist dann aber die Lehre von den Wurzeln so
mitgegeben, und es ist gänzlich überflüssig, irgend welche n
Wurzelregeln abzuleiten und gar lernen zu lassen. Man brau
nur jede Wurzel als Potenz mit gebrochenen Exponenten schrei
zu lassen, und kein Schüler hat dann Schwierigkeiten. Natür
muß das an einer Reihe von Beispielen geübt werden, aber ich h
oft genug das Experiment gemacht, daß, nachdem die Potenzl
in der angedeuteten Weise, auf gebrochene Exponenten ausgede

durchgenommen war und den Schülern erzählt war, daß $\sqrt[n]{a}$

eine andere Schreibweise sei für $a^{\frac{1}{n}}$, selbst die schwächsten Un
sekundaner die schwierigsten Wurzelausdrücke der Aufga
sammlungen fehlerlos auflösen konnten. Warum also in den
gabensammlungen noch heute bis zu 20 Seiten mit solchen Wu
ausdrücken und den „Wurzelregeln“ angefüllt sind, ist mir
unverständlich. Daß das Wurzelausziehen die Umkehrung
Potenzierens ist, lernen die Schüler natürlich auch mit dieser Met

ın ist $i\frac{\pi}{2} = ln\frac{1+i}{1-i} = ln\frac{1+\frac{1}{3}i}{1-\frac{1}{3}i} + ln\frac{1+\frac{1}{2}i}{1-\frac{1}{2}i} =$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \ldots\ldots\ldots \\ + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}.$$

Die gleiche Zerlegung läßt sich beliebig fortsetzen, da $\frac{+i}{-i} = \frac{z+i}{z-i} \cdot \frac{u+i}{u-i}$ für u die Bedingung gibt: $u = \frac{nz+1}{z-n}$,) bei der vorigen Zerlegung für $n = 2$ setzen wir $z = 7$, so ist $= 3$, so daß man beliebig schnell konvergierende Reihen für π eiten kann.

Einführung in die Integralrechnung.

Wenn ein bestimmter Kurvenzug gegeben ist, wo wir die inaten y, die Abszissen x nennen, und betrachten die Ordinaten schen den beiden Punkten o und n mit den zugehörigen rdinaten $x_o y_o$ und $x_n y_n$. Dann teilen wir $x_n - x_o$ in n gleiche e $\triangle x$, so daß dem Punkte x_1 die Abszisse $x_o + \triangle x$ usw. zugehört. ın sind die entsprechenden $y_1 = y_o + \triangle y_o$; $y_2 = y_1 + \triangle y_1$ usw. ın ist $y_n = y_o + \triangle y_o + \triangle y_1 + \triangle y_2 + \ldots = y_o + \left(\frac{\triangle y_o}{\triangle x} + \frac{\triangle y_1}{\triangle x} + \ldots\right)\triangle x$. Wenn nun keiner der Werte $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ∞ wird, bleibt auch die Summe der $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ endlich, wir schreiben dann $= y_o + \sum_o^n \frac{\triangle y}{\triangle x}\triangle x$. Wenn nun y eine Funktion von $x = f(x)$ ist, so auch $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ eine Funktion von x, und zwar $= f'(x)$, wenn $\triangle x$ ıdlich klein wird. Dann schreiben wir statt des Σ-Zeichens $\int$ haben also $y_n = y_o + \int_o^n \frac{dy}{dx}dx$ oder $f(n) = f(o) + \int_o^n f'(x)\,dx$, die Summe aller unendlich kleinen Zuwachsstücke der y ist ch der Differenz zwischen dem Endwert der y minus dem Anfangs- derselben.

Also $\int_o^n f'(x)\,dx = f(n) - f(o)$.

Um also das $\int$ zu finden, ist es nötig, eine Funktion $f(x)$ suchen, deren Differentialquotient die Funktion $f'(x)$, welche gegeb ist, wird, d. h. diese Summation ist die Umkehrung der Differentiati

Es ist offenbar für den Wert des Integrals ganz ohne Wirku wenn ich die Koordinatenachsen parallel mit sich selbst verschie es würde dann nur, wenn die x-Achse parallel mit sich selbst das Stück c auf der y-Achse verschoben wird, $y_n^c = y_n \pm c$ u $y_o^c = y_o \pm c$ zu setzen sein, und der Wert bliebe ungeändert. Ei solche Summation zwischen zwei festen Grenzen nennt man bestimmtes Integral.

Kommt es uns nicht darauf an, den Wert zwischen dies festen Grenzen zu bestimmen, sondern nur den Verlauf der Ku festzustellen, so können wir von einem beliebigen konstanten Wer ausgehen und suchen dann nur eine Funktion $f(x)$, deren Differenti quotient unter dem Integral steht. Dann nennen wir das Integ unbestimmt und schreiben also $\int f'(x)\,dx = fx + c$.

Da es keine allgemeine Methode der Integration gibt, werden fundamentalen Differentialquotienten repetiert und $\int a\,dx, \int x^m dx$ u bis zum arc tang gebildet. Um auch Ausdrücke zu integrier deren Differentialquotienten nicht in den Fundamentalformeln kommen, wird zunächst die Transformation eingeführt, also z $\int (a + bx)^n\,dx$. Substituieren wir $a + bx = z$, so ist $\frac{dx}{dz} =$ also $y = \int z^n \frac{1}{b}\,dz = \frac{1}{b}\,\frac{(a+bx)^{n+1}}{n+1} + c$. Ähnliche Aufga werden in größerer Zahl gerechnet, um die Substitutionsmeth einzuüben.

Es folgt die partielle Integration $\int u \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx = u \cdot v - \int v \cdot \frac{d}{dx}$ Beispiele hierfür sind $\int x \cdot \cos x\,dx$; $\int x\,ln\,x\,dx$; $\int x^3\,(ln\,x)^2$ $\int \cos^2 x\,dx$ usw. Ebenso werden von einer Reihe von Aggregaten Funktionen die Integrale gebildet, z. B. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}} dx$

Es wird eine Reihe von bestimmten Integralen ebenso gerechnet, z. B. $\int_o^3 (2x + 3x^2)\,dx = 36$; $\int_o^a \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a^3}$; $\int_o^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,d$ $= 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\int_o^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot dx = \frac{1}{2}\int_o^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{4}$. Von b derem Interesse sind die Flächen- und Körperberechnungen, z. B

krecht zur Achse begrenzte halbe Parallelsegment wird als Σ der
Werte von $x = o$ bis $x = x$ gefunden: $\int_o^x \sqrt{2px} \cdot dx = \frac{2}{3} xy$.
der Ellipse wenden wir nicht die übliche Integration an
Polarkoordinaten, sondern die im Sinne der Archimedesschen
mation ausgeführte Zurückführung auf den Kreis. Sind a und b
Halbachsen der Ellipse, und bezeichnet man die Ordinaten des
iptkreises mit y, die zugehörigen Ordinaten der Ellipse mit η,
ist $y = \sqrt{a^2 - x^2}$; $\eta = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; also $\frac{\eta}{y} = \frac{b}{a}$; also
$= \frac{b}{a}$; also $\Sigma\eta = \frac{b}{a} \cdot a^2\pi = ab\eta$. Auf dieselbe Weise
l das Volumen des Ellipsoids auf die Kugel zurückgeführt:
$= \frac{4}{3} a^2 b\pi$; $V_a = \frac{4}{3} ab^2\pi$.

Die Fläche des Kreises dient als Beispiel für die Integration
Polarkoordinaten, indem in dem Integral für den Quadranten
x durch Substitution der Polarkoordinaten $dx = -r\sin\varphi \cdot d\varphi$
l und darum $\int_o^r y\,dx = r^2 \int_o^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{r^2\pi}{4}$.

Abiturientenaufgaben.

Für die schriftliche Prüfung ist Verordnung, daß zwei Reihen
je vier Aufgaben der Behörde zur Auswahl überreicht werden
sen, außerdem einige Sonderaufgaben. Ich schlug darum folgende
gaben vor:

Erste Reihe.

1. An die Parabel $y^2 = 8x$ soll von dem Punkte $\xi = 2,5$ die Tangente konstruiert werden, und es sollen die Koordinaten beiden Berührungspunkte berechnet werden. Die Konstruktion uf Millimeterpapier mit Zirkel und Lineal genau auszuführen.

2. Die reelle Wurzel der Gleichung $x^3 - 6x - 9 = 0$ soll hisch gefunden werden, die beiden komplexen Wurzeln sollen chnet und auf der Gaußischen Zahlenebene genau dargestellt den.

3. Die Oberfläche eines geraden Zylinders sei a^2, wie groß der Radius der Grundfläche und die Höhe derselben sein, it sein Volumen ein Maximum wird?

4. Es ist gegeben die Funktion $y = \text{arc sin} \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$, es soll der erste Differentialquotient dieser Funktion abgeleitet werden.

Zweite Reihe.

1. Eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 7$, $b = 5$ cm rotiert das eine Mal um die Achse $2a$, das andere Mal um die Achse $2b$ und drittens um eine zu a parallel gezogene Tangente. Wie verhalten sich die Volumina der drei Rotationskörper zueinander?

2. Es ist gegeben die Funktion $y = ln \frac{a + x^2}{2bx}$. Es sollen der erste und zweite Differentialquotient abgeleitet werden, und der Wert von x soll angegeben werden, für welchen die Funktion ein Minimum wird.

3. Um eine gegebene Kugel vom Radius r soll eine quadratische Pyramide gelegt werden, so daß das Volumen dieser Pyramide ein Minimum ist. Wie groß muß die Höhe und die Grundkante derselben sein?

4. Wie hoch steht die Sonne am längsten Tage in Hamburg wenn sie genau im Westen steht, und um wieviel Uhr (Lokalzeit findet das statt?

Als Sonderaufgaben stellte ich folgende Fragen:

1. $\int_0^8 4\sqrt[3]{x^2} \cdot dx$ soll berechnet werden.

2. Es soll die Methode angegeben werden, um $\int e^x \sin x \cdot d$ zu finden.

Es wurde vom Schulrat die zweite Reihe zur Bearbeitung gewählt. Von den 17 Abiturienten haben drei den Anforderungen nicht entsprochen, dagegen war bei drei Arbeiten überhaupt kein rote Tinte anzubringen, und bei einer weiteren größeren Gruppe waren nur geringfügige Versehen zu monieren. Auch die Schüler welche im schriftlichen Examen nicht Genügendes leisteten, hatten die Methoden zum größten Teil begriffen, ihre Fehler beruhten durchweg auf anderen Ursachen.

Ergebnis.

Es kann sonach nicht bezweifelt werden, daß man auf dem humanistischen Gymnasium sehr wohl auf diese Weise unterrichten kann, daß man also den Schülern das Wertvolle nicht künstlich

zuenthalten braucht. Es ist in den drei Jahren, in welchen ich se Klasse unterrichtet habe, nicht eine einzige Klage über zuviel eit in der Mathematik vorgekommen, und besonders ist vor dem men keinerlei Paukerei nötig gewesen. Die Repetition bestand glich darin, daß die Schüler die Entwicklungen ohne Schreibng verstandesmäßig machten, d. h. sie hatten Gedankenfolgen rnt, aber nicht Gleichungen und Resultate.

Es ist natürlich, daß von der scholastischen Mathematik große gen fortbleiben, mit denen man hin und wieder noch die Zeit rödelt. Alle gekünstelten algebraisch-geometrischen Aufgaben, weder mathematisches Denken fördern noch praktischer Verdung entsprechen, sind fortzulassen. Solche Aufgaben, wie ein twinkliges Dreieck zu berechnen aus dem Radius des einhriebenen Kreises und der Differenz der Katheten oder ein eck aus $b - c$, α, h_a und viele andere, welche das Repertoire cher Aufgabensammlungen bilden, haben weder mathematischen praktischen Wert. Kein Fall der Wirklichkeit ist überhaupt bar, wo solche Stücke zur Auffindung der Figur gegeben sein ten. Ebenso ist in stereometrischen Aufgaben unglaublich viel ndigt. Während die Maximum- und Minimumaufgaben, selbst ihre Fassung künstlich aussieht, immer schon durch die ktionsbetrachtung einen großen Wert für den Denkprozeß haben, en solche auf Spitzfindigkeiten aufgebaute Lösungen künstlich mmengestellter Aufgaben sehr wohl von einem unwissenden uberger ohne mathematische Kenntnisse gelöst werden, während solide Denker den Kunstgriff nicht ohne weiteres findet. Wir n in Hamburg die vortreffliche Verfügung, daß bei den rientenaufgaben alle Aufgaben, welche „besondere Invention" rn, ausgeschlossen sein sollen. Es wäre sehr gut, wenn diese indigen Lösungen überhaupt aus dem Unterricht fortblieben, ehören in die Rätselstunde, aber nicht in die Mathematik. Es ystematisches Denken gelernt werden; das lernt man nicht Suchen nach Kunstgriffen. Nur wo eine Methode ihre ndung finden kann, ist eine Aufgabe wertvoll.

Dagegen halte ich für sehr wertvoll, die Schüler auf den schied der Konstruktion und Rechnung aufmerksam zu machen. e Aufgaben, die konstruktiv sehr bequem sind, können trigonosch unangenem sein, z. B. ein Dreieck aus einer Seite, der örigen Höhe und dem Radius des Umkreises oder aus einer der zugehörigen Mitteltransversale und dem Verhältnis der

beiden anderen Seiten. An solchen Aufgaben kann man den W akkuraten Zeichnens den Schülern begreiflich machen, da sie sel daß bei hinreichend sauberer Konstruktion die Zahlenwerte gesuchten Strecken und Winkel mit großer Annäherung aus Figur entnommen werden können. Ich halte das für wertvo als die mühevolle und zeitraubende Ableitung komplizierter go metrischer Formeln, die zum größten Teil nur den Wert ha einzelne bestimmte, meist praktisch gar nicht vorkommende gaben bequemer und eleganter lösen zu können. Von go metrischen Gleichungen werden nur die in unmittelbarem Ansc an die Additionstheoreme gegebenen Beziehungen zwischen Funktionen der doppelten und einfachen Winkel behandelt, dann aber so, daß jeder Schüler sie ohne Tafel und K ableiten kann.

Überhaupt wirkt nichts so fördernd auf die Denktätigkeit Schüler als die Ableitung systematischer Entwicklungen im K Es ist trostlos, wenn ein Mensch nur systematisch denken l wenn er den Schreibgriffel in der Hand hat. Außer durch Beseiti des goniometrischen Ballastes wird in der Trigonometrie auch viel Zeit gewonnen durch Beschränkung auf solche Dreiecksaufg die natürlichen Verhältnissen entsprechen; darum werden die weideschen Methoden, die Pothenotsche Lösung, die Hanse Lösung, die Aufgaben über das Parallelogramm an gemes physikalischen und geodätischen Größen geübt. Hier muß erw werden, daß ich auch von dem Meraner Lehrplan abweiche, i ich wohl die harmonische Teilung bis zum Apolloniusschen mit vielen Anwendungen behandelt habe, aber weder au Chordalen noch Polaren eingegangen bin. Ich glaube auch man diese Abschnitte, ohne die geometrische Ausbildung zu gefä sehr wohl fortlassen kann. Will man nämlich so weit gehe man wirkliche Probleme, wie z. B. in der Optik (mit Ausnahm harmonischen Verhältnisses beim Brennspiegel usw., welches na benutzt wird), damit lösen will, so erfordert das sehr vie wie ich vor Jahren schon zu meinem Schmerz erlebt habe. diese Zeit steht in keinem Verhältnis zu dem schließlichen Re da alle diese für einen Nichtmathematiker oder Physiker wic Probleme sich auch auf anderem Wege lösen lassen. Ebens ich die Transversalsätze (Ceva, Menelaos usw.) nicht beh obwohl die Probleme, daß drei Punkte auf einem Strahl i sollen, an sich sehr interessant sind. Es scheint mir aber i

samtbildung fördersamer, dem Funktionsbegriffe nachzugehen, als che Einzelfragen näher zu verfolgen.

Auch in der Algebra wird viel Zeit gewonnen durch Beschränkung sogenannten eingekleideten Aufgaben. Man kann mit diesen ht ein ganzes Semester ausfüllen, aber ich habe nie bemerkt, Schüler, welche zahllose derartige Aufgaben behandelt hatten, urch wirklich gefördert waren. Von diesen werden nur Mischungsgaben und Bewegungsaufgaben mit geometrischer Darstellung andelt, und zwar systematisch. Ebenso werden die quadratischen ichungen mit zwei Unbekannten nicht mit all den Kunstgriffen Lösungsmethoden behandelt, sondern nur die Hauptmethoden, übrigen aber wird nur die graphische Lösung gesucht.

Endlich wird auch in der Stereometrie Zeit gewonnen dadurch, man mehr Wert auf die zeichnerische Darstellung als auf die hetischen Beweise legt und in den Aufgaben sich auf Probleme Wirklichkeit beschränkt. Es wird z. B. niemals einem Menschen allen, das Verhältnis von Seite zum Grundradius eines Kegels urch zu berechnen, daß er Kugeln hineinwirft, die den Kegeltel berühren sollen, das kann er mit dem Metermaß bequemer n. Wohl haben ein- und umgeschriebene Kugeln sowohl bei eln, Zylindern, den regelmäßigen Körpern usw. systematische eutung und kommen daher in zahllosen Aufgaben auch in der is vor, sobald man aber daraus gekünstelte Aufgaben macht, z. B. vier gleiche sich berührende Kugeln sollen einen Kegeltel berühren und dergleichen, so steht die aufgewandte Zeit in em Verhältnis zu dem erzielten Bildungswert.

Vielleicht werden manche die Behandlung der diophantischen chungen vermissen. Faktisch ist dieselbe in der graphischen ıode enthalten. Denn Diophant behandelte tatsächlich ursprüngnur die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Unbekannten einer hung ohne die Bedingung, daß nur ganzzahlige positive Werte Unbekannten zugelassen werden sollten. Diese Bedingung erst später hinzugefügt, aber auch sie findet in der graphischen tellung sofort ihre Lösung, sobald man die Linie zeichnet. $3x + 5y = 31$ auf Millimeterpapier gezeichnet gibt sofort eiden ganzzahligen Lösungen $x_1 = 2$; $y_1 = 5$; $x_2 = 7$; $y_2 = 2$. uf wird natürlich in der Obersekunda aufmerksam gemacht, das scheint mir für das wirkliche Bedürfnis zu genügen.

Die Fortlassung des Kettenbruchverfahrens, die von anderer empfohlen ist, halte ich dagegen nicht für richtig. Gerade

wo die graphische Methode die Näherungswerte nahebringt, schei
es mir von Wert zu sein, dies Näherungsverfahren den Schüle
mitzugeben. Man braucht nicht übermäßig viel Zeit damit zu ve
lieren, aber für die irrationalen Größen und deren algebraisches Ve
ständnis ist das Kettenbruchverfahren doch von ganz fundamental
Bedeutung.

Von ganz besonderem Wert scheint mir aber die Beschränku
in der Differential- und Integralrechnung selbst zu sein. Fast al
mir bekannten Leitfäden, die für die Einführung dieser Rechnung
die höheren Schulen geschrieben sind, enden mit der Taylorschen od
Mac-Laurinschen Reihe und deren Anwendungen. Einige schweig
gänzlich vom Restgliede, andere geben spezielle Betrachtungen üb
die Konvergenz, keiner gibt eine wirkliche Auseinandersetzung üb
die Konvergenzbedingungen aus gutem Grunde, denn die erschöpfen
Darstellung würde viel Zeit und Mühe kosten und vielleicht do
nur von einzelnen verstanden werden. Nun scheint es mir ab
nicht richtig, den Schülern etwas nur bedingt Richtiges zu geb
oder sie damit zu vertrösten, daß „man“ das beweisen könne. F
die Bedürfnisse, soweit sie meines Erachtens in der Schule v
liegen, scheint das, was ich von Differential und Integral behand
habe, völlig ausreichend zu sein. Dies aber läßt sich, wie ich gez
habe, vollständig aus dem binomischen Lehrsatz ableiten, und des
Konvergenz ist auf die geometrische fallende Reihe basiert; $(1+)$
ist für $x < 1$ konvergent, und mehr bedurften wir nicht. A
Weitergehende, glaube ich, soll man getrost dem Universitätsstud
überlassen für diejenigen, welche Mathematik, Naturwissenscha
und Philosophie studieren wollen. Daß auch der Philosoph heute
gründliche Kenntnis der Differential- nnd Integralrechnung n
hat, wird ja allgemein zugestanden. Aber das Gymnasium
nicht die Aufgabe, nur für diese drei Fächer vorzubereiten, son
für alle Fakultäten. Da ist es freilich erforderlich, daß der Funkti
begriff und das Wesen der Infinitesimalrechnung jedem Gebild
geläufig ist. Aber das, was er davon aufnimmt, soll Selbsterkan
sein. Darum halte ich es für notwendig, daß der Abiturient du
aus über die Zulässigkeit und den Geltungsbereich seiner Meth
unterrichtet ist; nur dadurch lernt er die Grenzen seines Wis
und den Wert der Forschung, um diese Grenzen zu erwei
würdigen. Das ist aber heute mehr als je not, wo mit den
reichendsten Mitteln über die schwierigsten Probleme geschriebe
geredet wird. Die Achtung vor dem wirklichen Studium im Sc

eines Angesichtes ist wohl das Wertvollste, was wir einem Schüler itgeben können. Darum soll man meines Erachtens alles ver- eiden, was der Oberflächlichkeit Vorschub leistet. Darum begnügte h mich nicht mit der graphischen Lösung kubischer Gleichungen, arum aber ließ ich die Taylorsche Reihe fort und beschränkte ich auf das Gebotene.

Diese Beschränkung denke ich auch vorzuschlagen, wenn nicht ehr Rücksicht zu nehmen ist auf andere Klassen, die nicht nach ieser Methode unterrichtet sind. Natürlich kann dann die Ver- eilung des Stoffes eine bequemere werden und darum der Unter- cht mehr Zusammenhang bekommen; aber ich glaube, der im orstehenden skizzierte Stoff genügt, um das Ziel zu erreichen, aß ein moderner Mensch auch mit den Geisteskräften ausgerüstet e Schule verläßt, welche notwendig sind, um sich in den Geistes- römungen der Gegenwart zurechtzufinden und vor allem eine zuver- ssige Handhabe zu besitzen, den Wert vorgebrachter Meinungen nd sogenannter Beweise richtig zu beurteilen. Daß dies Ziel aber ne jede Belastung der Schüler erreichbar ist, glaube ich nach m Resultat dieser drei Jahre erwiesen zu haben. Alle Schüler erden bestätigen, daß sie nicht mehr zu arbeiten hatten wie in deren Klassen, ja, daß durchweg weniger häusliche Arbeiten rlangt wurden. Natürlich muß konzentriertes Arbeiten in der nterrichtsstunde verlangt werden, aber ohne dies lernt man über- upt nichts. Aber welche Freude macht es doch, wenn man merkt, ß durch die Arbeit der Gesichtskreis sich weitet und die Kraft s Verstandes wächst! Solche Freude soll man unseren Gymnasiasten cht vorenthalten!

Noch möchte ich einige Worte über das Examen sagen. Ich n kein Freund der Abschaffung des Examens. Auch wir Lehrer nd Menschen und irren uns oft genug bei der Beurteilung der enntnisse der Schüler; darum ist ein Examen nötig. Aber ich nschte die Beseitigung des Schemas, daß man vier Aufgaben ben muß, von denen mindestens drei wesentlich gelöst sein müssen. el besser kann ein Schüler zeigen, was er gelernt hat, wenn man n eine Entwicklung, die Darlegung einer Methode abverlangt; B. wenn man ihm die Aufgabe stellt, den Zusammenhang der gonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion darzu- en oder dergleichen. Dann muß er natürlich mehr Zeit haben zur Berechnung einer konkreten Aufgabe. Von solchen Ent- cklungen könnte man in der vorgeschriebenen Zeit etwa zwei

verlangen. Der gute Schüler hätte Gelegenheit, sein Verständnis selbständig walten zu lassen, der schwache Schüler würde sich an die Reproduktion der vorgetragenen Methode halten, und man hätte (ohne vorheriges Pauken) einen viel sicheren Maßstab zur Beurteilung. Es würde dem ganzen Unterricht zum Vorteil gereichen und würde eine gerechte Wertung der Schüler bieten, die wesentlich unabhängig von Zufälligkeiten ist, und auf die darum jeder Schüler sich freuen könnte. Dann hört das Examen auf, eine Quelle von Aufregung und Angst zu sein, sondern es ist die erwünschte Gelegenheit, daß der Schüler zeigen kann, daß er nicht vergeblich gearbeitet hat. Möge der Tag bald anbrechen, der uns und unseren Schülern solche Reform bringt!

ı ist $i\frac{\pi}{2} = ln\frac{1+i}{1-i} = ln\frac{1+\frac{1}{3}i}{1-\frac{1}{3}i} + ln\frac{1+\frac{1}{2}i}{1-\frac{1}{2}i} =$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \cdots\cdots\cdots\\ +&\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}.$$

Die gleiche Zerlegung läßt sich beliebig fortsetzen, da $\frac{i}{-i} = \frac{z+i}{z-i} \cdot \frac{u+i}{u-i}$ für u die Bedingung gibt: $u = \frac{nz+1}{z-n}$, bei der vorigen Zerlegung für $n = 2$ setzen wir $z = 7$, so ist 3, so daß man beliebig schnell konvergierende Reihen für π ten kann.

Einführung in die Integralrechnung.

Wenn ein bestimmter Kurvenzug gegeben ist, wo wir die ıaten y, die Abszissen x nennen, und betrachten die Ordinaten :hen den beiden Punkten o und n mit den zugehörigen dinaten $x_o y_o$ und $x_n y_n$. Dann teilen wir $x_n - x_o$ in n gleiche $\triangle x$, so daß dem Punkte x_1 die Abszisse $x_o + \triangle x$ usw. zugehört. ı sind die entsprechenden $y_1 = y_o + \triangle y_o$; $y_2 = y_1 + \triangle y_1$ usw. ı ist $y_n = y_o + \triangle y_o + \triangle y_1 + \triangle y_2 + \ldots = y_o + \left(\frac{\triangle y_o}{\triangle x} + \right.$ $\left.\frac{\triangle y_1}{\triangle x} + \ldots\right)\triangle x$. Wenn nun keiner der Werte $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ∞ wird, leibt auch die Summe der $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ endlich, wir schreiben dann $y_o + \sum_o^n \frac{\triangle y}{\triangle x}\triangle x$. Wenn nun y eine Funktion von $x = f(x)$ ist, so uch $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ eine Funktion von x, und zwar $= f'(x)$, wenn $\triangle x$ llich klein wird. Dann schreiben wir statt des Σ-Zeichens $\int$ haben also $y_n = y_o + \int_o^n \frac{dy}{dx}dx$ oder $f(n) = f(o) + \int_o^n f'(x)\,dx$, die Summe aller unendlich kleinen Zuwachsstücke der y ist ı der Differenz zwischen dem Endwert der y minus dem Anfangs- derselben.

Also $\int_o^n f'(x)\,dx = f(n) - f(o)$.

Um also das $\int$ zu finden, ist es nötig, eine Funktion $f(x)$ suchen, deren Differentialquotient die Funktion $f'(x)$, welche gegeb ist, wird, d. h. diese Summation ist die Umkehrung der Differentiatio

Es ist offenbar für den Wert des Integrals ganz ohne Wirkun wenn ich die Koordinatenachsen parallel mit sich selbst verschiel es würde dann nur, wenn die x-Achse parallel mit sich selbst u das Stück c auf der y-Achse verschoben wird, $y_n' = y_n \pm c$ u $y_o' = y_o \pm c$ zu setzen sein, und der Wert bliebe ungeändert. Ei solche Summation zwischen zwei festen Grenzen nennt man bestimmtes Integral.

Kommt es uns nicht darauf an, den Wert zwischen dies festen Grenzen zu bestimmen, sondern nur den Verlauf der Ku festzustellen, so können wir von einem beliebigen konstanten We ausgehen und suchen dann nur eine Funktion $f(x)$, deren Differenti- quotient unter dem Integral steht. Dann nennen wir das Integ unbestimmt und schreiben also $\int f'(x)\,dx = fx + c$.

Da es keine allgemeine Methode der Integration gibt, werden fuudamentalen Differentialquotienten repetiert und $\int a\,dx, \int x^m dx$ u bis zum arc tang gebildet. Um auch Ausdrücke zu integrie deren Differentialquotienten nicht in den Fundamentalformeln v kommen, wird zunächst die Transformation eingeführt, also z $\int (a + bx)^n\,dx$. Substituieren wir $a + bx = z$, so ist $\frac{dx}{dz} =$ also $y = \int z^n \frac{1}{b}\,dz = \frac{1}{b}\,\frac{(a+bx)^{n+1}}{n+1} + c$. Ähnliche Aufga werden in größerer Zahl gerechnet, um die Substitutionsmeth einzuüben.

Es folgt die partielle Integration $\int u \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx = u \cdot v - \int v \cdot \frac{d}{dx}$ Beispiele hierfür sind $\int x \cdot \cos x\,dx$; $\int x \ln x\,dx$; $\int x^3 (\ln x)^2$ $\int \cos^2 x\,dx$ usw. Ebenso werden von einer Reihe von Aggregaten o Funktionen die Integrale gebildet, z. B. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}\,dx$

Es wird eine Reihe von bestimmten Integralen ebenso gerechnet, z. B. $\int_o^3 (2x + 3x^2)\,dx = 36$; $\int_o^a \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a^3}$; $\int_o^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,d$ $= 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\int_o^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot dx = \frac{1}{2}\int_o^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{4}$. Von b derem Interesse sind die Flächen- und Körperberechnungen, z. B

krecht zur Achse begrenzte halbe Parallelsegment wird als Σ der
Verte von $x = o$ bis $x = x$ gefunden: $\int_o^x \sqrt{2px} \cdot dx = \frac{2}{3} xy$.
der Ellipse wenden wir nicht die übliche Integration an
Polarkoordinaten, sondern die im Sinne der Archimedesschen
nmation ausgeführte Zurückführung auf den Kreis. Sind a und b
Halbachsen der Ellipse, und bezeichnet man die Ordinaten des
uptkreises mit y, die zugehörigen Ordinaten der Ellipse mit η,
ist $y = \sqrt{a^2 - x^2}$; $\eta = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; also $\frac{\eta}{y} = \frac{b}{a}$; also
$= \frac{b}{a}$; also $\Sigma\eta = \frac{b}{a} \cdot a^2\pi = ab\eta$. Auf dieselbe Weise
d das Volumen des Ellipsoids auf die Kugel zurückgeführt:
$= \frac{4}{3} a^2 b\pi$; $V_a = \frac{4}{3} ab^2\pi$.

Die Fläche des Kreises dient als Beispiel für die Integration
Polarkoordinaten, indem in dem Integral für den Quadranten
dx durch Substitution der Polarkoordinaten $dx = -r\sin\varphi \cdot d\varphi$

d und darum $\int_o^r y\,dx = r^2 \int_o^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{r^2\pi}{4}$.

Abiturientenaufgaben.

Für die schriftliche Prüfung ist Verordnung, daß zwei Reihen
je vier Aufgaben der Behörde zur Auswahl überreicht werden
sen, außerdem einige Sonderaufgaben. Ich schlug darum folgende
gaben vor:

Erste Reihe.

1. An die Parabel $y^2 = 8x$ soll von dem Punkte $\xi = 2$,
5 die Tangente konstruiert werden, und es sollen die Koordinaten
beiden Berührungspunkte berechnet werden. Die Konstruktion
auf Millimeterpapier mit Zirkel und Lineal genau auszuführen.

2. Die reelle Wurzel der Gleichung $x^3 - 6x - 9 = 0$ soll
hisch gefunden werden, die beiden komplexen Wurzeln sollen
chnet und auf der Gaußischen Zahlenebene genau dargestellt
den.

3. Die Oberfläche eines geraden Zylinders sei a^2, wie groß
der Radius der Grundfläche und die Höhe derselben sein,
it sein Volumen ein Maximum wird?

4. Es ist gegeben die Funktion $y = \text{arc sin}\frac{1-x^2}{1+x^2}$, es
der erste Differentialquotient dieser Funktion abgeleitet wer

Zweite Reihe.

1. Eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 7$, $b = 5$ cm ro
das eine Mal um die Achse $2a$, das andere Mal um die Achse
und drittens um eine zu a parallel gezogene Tangente.
verhalten sich die Volumina der drei Rotationskörper zueinan

2. Es ist gegeben die Funktion $y = ln\frac{a+x^2}{2bx}$. Es s
der erste und zweite Differentialquotient abgeleitet werden,
der Wert von x soll angegeben werden, für welchen die Fun
ein Minimum wird.

3. Um eine gegebene Kugel vom Radius r soll eine quadrati
Pyramide gelegt werden, so daß das Volumen dieser Pyramid
Minimum ist. Wie groß muß die Höhe und die Grundkante
selben sein?

4. Wie hoch steht die Sonne am längsten Tage in Ham
wenn sie genau im Westen steht, und um wieviel Uhr (Loka
findet das statt?

Als Sonderaufgaben stellte ich folgende Fragen:

1. $\int_0^8 4\sqrt[3]{x^2} \cdot dx$ soll berechnet werden.

2. Es soll die Methode angegeben werden, um $\int e^x \sin$
zu finden.

Es wurde vom Schulrat die zweite Reihe zur Bearbe
gewählt. Von den 17 Abiturienten haben drei den Anforder
nicht entsprochen, dagegen war bei drei Arbeiten überhaupt
rote Tinte anzubringen, und bei einer weiteren größeren G
waren nur geringfügige Versehen zu monieren. Auch die Sch
welche im schriftlichen Examen nicht Genügendes leisteten, l
die Methoden zum größten Teil begriffen, ihre Fehler be
durchweg auf anderen Ursachen.

Ergebnis.

Es kann sonach nicht bezweifelt werden, daß man a
humanistischen Gymnasium sehr wohl auf diese Weise unter
kann, daß man also den Schülern das Wertvolle nicht kü

zuenthalten braucht. Es ist in den drei Jahren, in welchen ich e Klasse unterrichtet habe, nicht eine einzige Klage über zuviel eit in der Mathematik vorgekommen, und besonders ist vor dem men keinerlei Paukerei nötig gewesen. Die Repetition bestand glich darin, daß die Schüler die Entwicklungen ohne Schreibng verstandesmäßig machten, d. h. sie hatten Gedankenfolgen rnt, aber nicht Gleichungen und Resultate.

Es ist natürlich, daß von der scholastischen Mathematik große gen fortbleiben, mit denen man hin und wieder noch die Zeit rödelt. Alle gekünstelten algebraisch-geometrischen Aufgaben, weder mathematisches Denken fördern noch praktischer Verdung entsprechen, sind fortzulassen. Solche Aufgaben, wie ein twinkliges Dreieck zu berechnen aus dem Radius des einhriebenen Kreises und der Differenz der Katheten oder ein eck aus $b - c$, α, h_a und viele andere, welche das Repertoire cher Aufgabensammlungen bilden, haben weder mathematischen praktischen Wert. Kein Fall der Wirklichkeit ist überhaupt bar, wo solche Stücke zur Auffindung der Figur gegeben sein ten. Ebenso ist in stereometrischen Aufgaben unglaublich viel ndigt. Während die Maximum- und Minimumaufgaben, selbst n ihre Fassung künstlich aussieht, immer schon durch die ktionsbetrachtung einen großen Wert für den Denkprozeß haben, en solche auf Spitzfindigkeiten aufgebaute Lösungen künstlich mmengestellter Aufgaben sehr wohl von einem unwissenden uberger ohne mathematische Kenntnisse gelöst werden, während solide Denker den Kunstgriff nicht ohne weiteres findet. Wir n in Hamburg die vortreffliche Verfügung, daß bei den rientenaufgaben alle Aufgaben, welche „besondere Invention" rn, ausgeschlossen sein sollen. Es wäre sehr gut, wenn diese indigen Lösungen überhaupt aus dem Unterricht fortblieben, ehören in die Rätselstunde, aber nicht in die Mathematik. Es ystematisches Denken gelernt werden; das lernt man nicht Suchen nach Kunstgriffen. Nur wo eine Methode ihre ndung finden kann, ist eine Aufgabe wertvoll.

Dagegen halte ich für sehr wertvoll, die Schüler auf den schied der Konstruktion und Rechnung aufmerksam zu machen. e Aufgaben, die konstruktiv sehr bequem sind, können trigonosch unangenem sein, z. B. ein Dreieck aus einer Seite, der örigen Höhe und dem Radius des Umkreises oder aus einer der zugehörigen Mitteltransversale und dem Verhältnis der

beiden anderen Seiten. An solchen Aufgaben kann man den W
akkuraten Zeichnens den Schülern begreiflich machen, da sie se
daß bei hinreichend sauberer Konstruktion die Zahlenwerte
gesuchten Strecken und Winkel mit großer Annäherung aus
Figur entnommen werden können. Ich halte das für wertv
als die mühevolle und zeitraubende Ableitung komplizierter g
metrischer Formeln, die zum größten Teil nur den Wert ha
einzelne bestimmte, meist praktisch gar nicht vorkommende
gaben bequemer und eleganter lösen zu können. Von g
metrischen Gleichungen werden nur die in unmittelbarem Ans
an die Additionstheoreme gegebenen Beziehungen zwischen
Funktionen der doppelten und einfachen Winkel behandelt,
dann aber so, daß jeder Schüler sie ohne Tafel und K
ableiten kann.

Überhaupt wirkt nichts so fördernd auf die Denktätigkei
Schüler als die Ableitung systematischer Entwicklungen im K
Es ist trostlos, wenn ein Mensch nur systematisch denken
wenn er den Schreibgriffel in der Hand hat. Außer durch Beseit
des goniometrischen Ballastes wird in der Trigonometrie auch
viel Zeit gewonnen durch Beschränkung auf solche Dreiecksaufg
die natürlichen Verhältnissen entsprechen; darum werden die
weideschen Methoden, die Pothenotsche Lösung, die Hanse
Lösung, die Aufgaben über das Parallelogramm an gemes
physikalischen und geodätischen Größen geübt. Hier muß er
werden, daß ich auch von dem Meraner Lehrplan abweiche,
ich wohl die harmonische Teilung bis zum Apolloniusschen
mit vielen Anwendungen behandelt habe, aber weder a
Chordalen noch Polaren eingegangen bin. Ich glaube auch
man diese Abschnitte, ohne die geometrische Ausbildung zu gefä
sehr wohl fortlassen kann. Will man nämlich so weit gehe
man wirkliche Probleme, wie z. B. in der Optik (mit Ausnahm
harmonischen Verhältnisses beim Brennspiegel usw., welches na
benutzt wird), damit lösen will, so erfordert das sehr vie
wie ich vor Jahren schon zu meinem Schmerz erlebt habe.
diese Zeit steht in keinem Verhältnis zu dem schließlichen Re
da alle diese für einen Nichtmathematiker oder Physiker wi
Probleme sich auch auf anderem Wege lösen lassen. Ebens
ich die Transversalsätze (Ceva, Menelaos usw.) nicht behan
obwohl die Probleme, daß drei Punkte auf einem Strahl lie
sollen, an sich sehr interessant sind. Es scheint mir aber i

amtbildung fördersamer, dem Funktionsbegriffe nachzugehen, als he Einzelfragen näher zu verfolgen.

Auch in der Algebra wird viel Zeit gewonnen durch Beschränkung sogenannten eingekleideten Aufgaben. Man kann mit diesen ıt ein ganzes Semester ausfüllen, aber ich habe nie bemerkt, Schüler, welche zahllose derartige Aufgaben behandelt hatten, ırch wirklich gefördert waren. Von diesen werden nur Mischungs- ;aben und Bewegungsaufgaben mit geometrischer Darstellung ındelt, und zwar systematisch. Ebenso werden die quadratischen chungen mit zwei Unbekannten nicht mit all den Kunstgriffen Lösungsmethoden behandelt, sondern nur die Hauptmethoden, ıbrigen aber wird nur die graphische Lösung gesucht.

Endlich wird auch in der Stereometrie Zeit gewonnen dadurch, man mehr Wert auf die zeichnerische Darstellung als auf die ıetischen Beweise legt und in den Aufgaben sich auf Probleme Virklichkeit beschränkt. Es wird z. B. niemals einem Menschen llen, das Verhältnis von Seite zum Grundradius eines Kegels rch zu berechnen, daß er Kugeln hineinwirft, die den Kegel- el berühren sollen, das kann er mit dem Metermaß bequemer n. Wohl haben ein- und umgeschriebene Kugeln sowohl bei ln, Zylindern, den regelmäßigen Körpern usw. systematische utung und kommen daher in zahllosen Aufgaben auch in der is vor, sobald man aber daraus gekünstelte Aufgaben macht, z. B. vier gleiche sich berührende Kugeln sollen einen Kegel- el berühren und dergleichen, so steht die aufgewandte Zeit in m Verhältnis zu dem erzielten Bildungswert.

Vielleicht werden manche die Behandlung der diophantischen hungen vermissen. Faktisch ist dieselbe in der graphischen ode enthalten. Denn Diophant behandelte tatsächlich ursprüng- ur die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Unbekannten einer ung ohne die Bedingung, daß nur ganzzahlige positive Werte Unbekannten zugelassen werden sollten. Diese Bedingung erst später hinzugefügt, aber auch sie findet in der graphischen ellung sofort ihre Lösung, sobald man die Linie zeichnet. $3x + 5y = 31$ auf Millimeterpapier gezeichnet gibt sofort iden ganzzahligen Lösungen $x_1 = 2$; $y_1 = 5$; $x_2 = 7$; $y_2 = 2$. f wird natürlich in der Obersekunda aufmerksam gemacht, as scheint mir für das wirkliche Bedürfnis zu genügen.

Die Fortlassung des Kettenbruchverfahrens, die von anderer empfohlen ist, halte ich dagegen nicht für richtig. Gerade

wo die graphische Methode die Näherungswerte nahebringt, sch
es mir von Wert zu sein, dies Näherungsverfahren den Schül
mitzugeben. Man braucht nicht übermäßig viel Zeit damit zu
lieren, aber für die irrationalen Größen und deren algebraisches
ständnis ist das Kettenbruchverfahren doch von ganz fundament
Bedeutung.

Von ganz besonderem Wert scheint mir aber die Beschränk
in der Differential- und Integralrechnung selbst zu sein. Fast
mir bekannten Leitfäden, die für die Einführung dieser Rechnun
die höheren Schulen geschrieben sind, enden mit der Taylorschen
Mac-Laurinschen Reihe und deren Anwendungen. Einige schwe
gänzlich vom Restgliede, andere geben spezielle Betrachtungen
die Konvergenz, keiner gibt eine wirkliche Auseinandersetzung
die Konvergenzbedingungen aus gutem Grunde, denn die erschöpf
Darstellung würde viel Zeit und Mühe kosten und vielleicht
nur von einzelnen verstanden werden. Nun scheint es mir
nicht richtig, den Schülern etwas nur bedingt Richtiges zu g
oder sie damit zu vertrösten, daß „man“ das beweisen könne.
die Bedürfnisse, soweit sie meines Erachtens in der Schule
liegen, scheint das, was ich von Differential und Integral behal
habe, völlig ausreichend zu sein. Dies aber läßt sich, wie ich ge
habe, vollständig aus dem binomischen Lehrsatz ableiten, und d
Konvergenz ist auf die geometrische fallende Reihe basiert; $(1-$
ist für $x < 1$ konvergent, und mehr bedurften wir nicht.
Weitergehende, glaube ich, soll man getrost dem Universitätsstu
überlassen für diejenigen, welche Mathematik, Naturwissensch
und Philosophie studieren wollen. Daß auch der Philosoph heute
gründliche Kenntnis der Differential- nnd Integralrechnung
hat, wird ja allgemein zugestanden. Aber das Gymnasium
nicht die Aufgabe, nur für diese drei Fächer vorzubereiten, sc
für alle Fakultäten. Da ist es freilich erforderlich, daß der Funk
begriff und das Wesen der Infinitesimalrechnung jedem Gebi
geläufig ist. Aber das, was er davon aufnimmt, soll Selbsterka
sein. Darum halte ich es für notwendig, daß der Abiturient
aus über die Zulässigkeit und den Geltungsbereich seiner Me
unterrichtet ist; nur dadurch lernt er die Grenzen seines W
und den Wert der Forschung, um diese Grenzen zu erw
würdigen. Das ist aber heute mehr als je not, wo mit den
reichendsten Mitteln über die schwierigsten Probleme geschrieb
geredet wird. Die Achtung vor dem wirklichen Studium im S

ines Angesichtes ist wohl das Wertvollste, was wir einem Schüler tgeben können. Darum soll man meines Erachtens alles ver-iden, was der Oberflächlichkeit Vorschub leistet. Darum begnügte ı mich nicht mit der graphischen Lösung kubischer Gleichungen, rum aber ließ ich die Taylorsche Reihe fort und beschränkte ch auf das Gebotene.

Diese Beschränkung denke ich auch vorzuschlagen, wenn nicht hr Rücksicht zu nehmen ist auf andere Klassen, die nicht nach ser Methode unterrichtet sind. Natürlich kann dann die Ver-lung des Stoffes eine bequemere werden und darum der Unter-ht mehr Zusammenhang bekommen; aber ich glaube, der im rstehenden skizzierte Stoff genügt, um das Ziel zu erreichen, ß ein moderner Mensch auch mit den Geisteskräften ausgerüstet Schule verläßt, welche notwendig sind, um sich in den Geistes-ömungen der Gegenwart zurechtzufinden und vor allem eine zuver-sige Handhabe zu besitzen, den Wert vorgebrachter Meinungen d sogenannter Beweise richtig zu beurteilen. Daß dies Ziel aber ne jede Belastung der Schüler erreichbar ist, glaube ich nach n Resultat dieser drei Jahre erwiesen zu haben. Alle Schüler rden bestätigen, daß sie nicht mehr zu arbeiten hatten wie in leren Klassen, ja, daß durchweg weniger häusliche Arbeiten langt wurden. Natürlich muß konzentriertes Arbeiten in der terrichtsstunde verlangt werden, aber ohne dies lernt man über-ıpt nichts. Aber welche Freude macht es doch, wenn man merkt, 3 durch die Arbeit der Gesichtskreis sich weitet und die Kraft Verstandes wächst! Solche Freude soll man unseren Gymnasiasten ht vorenthalten!

Noch möchte ich einige Worte über das Examen sagen. Ich kein Freund der Abschaffung des Examens. Auch wir Lehrer l Menschen und irren uns oft genug bei der Beurteilung der ıntnisse der Schüler; darum ist ein Examen nötig. Aber ich nschte die Beseitigung des Schemas, daß man vier Aufgaben en muß, von denen mindestens drei wesentlich gelöst sein müssen. l besser kann ein Schüler zeigen, was er gelernt hat, wenn man eine Entwicklung, die Darlegung einer Methode abverlangt; 3. wenn man ihm die Aufgabe stellt, den Zusammenhang der onometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion darzu-en oder dergleichen. Dann muß er natürlich mehr Zeit haben zur Berechnung einer konkreten Aufgabe. Von solchen Ent-klungen könnte man in der vorgeschriebenen Zeit etwa zwei

verlangen. Der gute Schüler hätte Gelegenheit, sein Verständn selbständig walten zu lassen, der schwache Schüler würde sich a die Reproduktion der vorgetragenen Methode halten, und man hät (ohne vorheriges Pauken) einen viel sicheren Maßstab zur Beurteilun Es würde dem ganzen Unterricht zum Vorteil gereichen und wür eine gerechte Wertung der Schüler bieten, die wesentlich unabhäng von Zufälligkeiten ist, und auf die darum jeder Schüler sich freu könnte. Dann hört das Examen auf, eine Quelle von Aufregu und Angst zu sein, sondern es ist die erwünschte Gelegenheit, d der Schüler zeigen kann, daß er nicht vergeblich gearbeitet h Möge der Tag bald anbrechen, der uns und unseren Schülern solc Reform bringt!

124

ÜBER DIE

EIHENFOLGE GEWISSER GRENZOPERATIONEN

IN DER

INTEGRALRECHNUNG

VON

EMIL HOSSENFELDER,
OBERLEHRER.

WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE ZUM XVII. JAHRESBERICHT
DES KÖNIGL. GYMNASIUMS ZU STRASBURG I. WESTPR. ÜBER DAS SCHULJAHR 1890/91.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1891.

l. Progr. Nr. 41.

Die in den folgenden Zeilen zu behandelnden Aufgaben der Integralrechnung beziehen sich ie Bedingungen, unter welchen es erlaubt ist, die Operation des Integrierens und eine andere :operation in ihrer Reihenfolge zu vertauschen. In allen diesen Untersuchungen ist ein Begriff :ntscheidender Wichtigkeit, der Begriff der gleichmäfsigen Konvergenz, welcher vor nicht langer in die Analysis eingeführt worden ist. Nicht nur die Reihenlehre, in der Seidel zuerst die :ache der ungleichmäfsigen Konvergenz entdeckt hat, sondern auch die Integralrechnung hat in :iedenen Kapiteln durch diesen neuen Begriff eine Umgestaltung erfahren. Mir handelte es beim Studium dieser Gegenstände um Anschaulichkeit, sowie um möglichst einheitliche Dar- ng. Aus diesem Bestreben ist die folgende Abhandlung entstanden.

§ 1. Der Satz $\operatorname{Lim}\int f(x,q)dx = \int \operatorname{Lim} f(x,q)\,dx$.

Der in dem folgenden zu behandelnde Satz der Integralrechnung giebt Bedingungen an, unter :en der Grenzwert eines bestimmten Integrals gleich ist dem Integral des Grenzwerts der tion unter dem Integralzeichen, falls beiderseits ein Parameter q einen bestimmten Grenzüber- ausführt. Ich werde gewisser Anwendungen wegen den $\lim q = +\infty$ bevorzugen; es versteht von selbst, dafs das Gesagte für jeden andern Limes ebenfalls gültig ist, wenn man die Aus- :sweise entsprechend abändert. —

Der in Rede stehende Satz giebt Auskunft über häufig zu vollziehende Operationen, so unter 'n über die Integration einer unendlichen Reihe durch Integration der einzelnen Glieder der- a, also über Vertauschung von Summation und Integration, über die Differentiation eines be- :ten Integrals nach einem Parameter, über Vertauschung der Aufeinanderfolge der Integrationen. neine also, dafs die hierüber handelnden Kapitel der Integralrechnung an Übersichtlichkeit ge- en würden, wenn man den Satz

$$\lim\int f(x,q)dx = \int dx \lim f(x,q)$$

Mittelpunkt der Darstellung machte. Derselbe ist bisher selten ausdrücklich ausgesprochen, auch vielfach angewandt; formuliert findet er sich in keinem der mir bekannten Lehrbücher Differential- und Integralrechnung aufser in der „Einleitung in die Differential- und Integral- :ung“ des Herrn M. Pasch. Er findet sich ferner in einer Abhandlung des Herrn Stolz über :mäfsige Konvergenz der Funktionen von mehreren Veränderlichen, Math. Ann. Bd. 26, S. 83, auch, den dortigen Zwecken gemäfs, nicht in der möglichen Allgemeinheit. Das daselbst und sonst vielfach angeführte Werk des Herrn U. Dini: Fondamenti per la teorica delle funzioni :riabili reali ist mir nicht zugänglich. —

Es sei $f(x,q)$ eine eindeutige Funktion von x und q, welche für $a \leqq x \leqq b$ und für alle :e von q, welche gröfser sind, als eine gegebene Zahl, definiert ist. — Wir nehmen ferner an, es sei:

$$\lim_{q=+\infty} f(x,q) = \varphi(x), \qquad a \leqq x \leqq b,$$

es lasse sich, wenn eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ gegeben ist, bei jedem x eine Zahl G n, so dafs

$$\operatorname{abs}\left(f(x,q) - \varphi(x)\right) < \varepsilon,$$

nur $q > G$ ist.

Damit überhaupt der in Rede stehende Satz bestehen könne, muſs von vornherein angenc werden, daſs für alle soeben angegebenen Werte $f(x, q)$ sowohl wie $\varphi(x)$ integrierbar seien. Voraussetzung ist notwendig. Aufserdem möge angenommen werden, daſs für dieselben x alle Werte der Funktion $f(x, q)$ unter einer endlichen Zahl D liegen, woraus dann folgt, daſ $\varphi(x)$ diese Zahl nicht übersteigt. x ist die Integrationsvariable, während die andere Variab *Parameter*, den Grenzübergang $\lim q = +\infty$ ausführen soll. Der Anschaulichkeit wegen denk uns $f(x, q)$ für ein beliebiges q in der üblichen Weise zwischen den Abscissen a und b darg Diese Darstellung erfolge für jeden Wert des Parameters; nehmen wir denselben der leichtere stellung wegen etwa ganzzahlig über alle Grenzen wachsend an. Auf diese Weise erhalten w Schar Kurven zwischen denselben Abscissenwerten, welche sich der Kurve $y = \varphi(x)$ immer nähern. Diese Kurve $y = \varphi(x)$ wollen wir die *Grenzkurve* nennen. Denken wir uns zwei Na kurven konstruiert $y = \varphi(x) - \varepsilon$ und $y = \varphi(x) + \varepsilon$, unter ε eine beliebig kleine positive verstanden, so wird der Voraussetzung nach bei jedem Werte von x eine Zahl, welche wir ihrer Abhängigkeit von x G_x nennen, existieren, so daſs für den betreffenden Wert von x die Or sämtlicher Kurven, bei denen $q > G_x$, zwischen die beiden Ordinaten $\varphi(x) - \varepsilon$ und $\varphi(x) + \varepsilon$ fal Es wäre nun falsch, hieraus schliefsen zu wollen, daſs sämtliche *Kurven* $f(x, q)$ von einem besti hinlänglich groſsen q an auf Grund der gemachten Voraussetzung zwischen den beiden Na kurven $y = \varphi(x) - \varepsilon$ und $y = \varphi(x) + \varepsilon$ verlaufen müssen. Dies würde nur dann der Fa wenn für alle $x (a \leqq x \leqq b)$ *ein und dasselbe* G bewirken würde, daſs

$$\text{abs}\,(f(x, q) - \varphi(x)) < \varepsilon,$$

falls nur $q > G$ ist, was aus unserer Voraussetzung durchaus nicht folgt. —

Wenn aber für das ganze Intervall $a \leqq x \leqq b$ *eine Zahl* G *existiert, so daſs*

$$\text{abs}\,(f(x, q) - \varphi(x)) < \varepsilon$$

ist für alle $q > G$, *wo* ε *eine beliebig kleine positive Zahl ist, so sagt man,* $f(x, q)$ *konvergiere mäſsig für das ganze Intervall nach* $\varphi(x)$. In diesem Falle allein werden schliefslich sä Kurven $f(x, q)$ zwischen den beiden Nachbarkurven $\varphi(x) + \varepsilon$ und $\varphi(x) - \varepsilon$ verlaufen. Dies halten ist also ein ganz besonderes; die Aufdeckung des Unterschiedes zwischen gleichmäſsig nicht gleichmäſsiger Konvergenz ist epochemachend für die Analysis gewesen. —

Hierbei möge folgender Satz seine Stelle finden*): Wenn für alle $a \leqq x \leqq b$ die Fu $f(x, q)$ bei konstantem q für alle q, die gröfser sind als eine bestimmte Zahl Q, eine stetige F von x ist und *gleichmäſsig* bei

$$\lim q = +\infty$$

zum Grenzwerte $\varphi(x)$ konvergiert, so ist für ebendieselben Werte von x $\varphi(x)$ eine stetige Funktion v

Man hat nämlich auf Grund der gleichmäſsigen Konvergenz:

(a) $$\text{abs}\,(f(x, q) - \varphi(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

(b) $$\text{abs}\,(f(x_0, q) - \varphi(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3},$$

wenn $q > G$ und x, x_0 zwei beliebige Werte des Intervalls sind. Da ferner $f(x, q)$ für ein bestn q, q', eine stetige Funktion von x im ganzen Intervall mit Einschluſs der Grenzen ist, so läf eine Gröfse δ angeben, so daſs

(c) $$\text{abs}\,(f(x, q') - f(x_0, q')) < \frac{\varepsilon}{3}$$

vorausgesetzt, daſs $q' > Q$ und

$$\text{abs}\,(x - x_0) < \delta.$$

Nimmt man nun q' auch $> G$ und in (a) und (b) q' für q, so folgt durch Kombinat drei Relationen (a), (b), (c)

---

*) Stolz, Allgemeine Arithmetik Bd. I, S. 200.

$$\text{abs}\,(\varphi(x) - \varphi(x_0)) < \varepsilon,$$

bs $(x - x_0) < \delta$.

Dies ist aber die Stetigkeitsbedingung.

Wollte man versuchen, aus der Stetigkeit der Funktionen auf die gleichmäfsige Konvergenz ıliefsen, so könnte man aus den dann stattfindenden Relationen:

$$\text{abs}\,(f(x, q') - \varphi(x)) < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{abs}\,(f(x, q') - f(x_0, q')) < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{abs}\,(\varphi(x) - \varphi(x_0)) < \tfrac{\varepsilon}{3},$$

e beide letzteren stattfinden, wenn abs $(x - x_0)$ kleiner als ein gewisses δ ist, schliefsen, dafs

$$\text{abs}\,(f(x_0, q') - \varphi(x_0)) < \varepsilon,$$

nur x_0 in der angegebenen Nähe von x liegt. Diese Ungleichung, welche sich nur auf ein ımtes q' bezieht, sagt aber durchaus nichts aus über die Gröfse der Differenz linker Hand für re Werte, als q'. Diese könnte sehr wohl für gröfsere Werte des Parameters wieder gröfser n. Nur wenn man anderweitig wüfste, dafs in der Umgebung der Stelle x die Differenz $- \varphi(x)$ mit gröfser werdendem q abnimmt, könnte man aus der Stetigkeit auf die gleich-ge Konvergenz in der Umgebung dieser Stelle schliefsen. Es werde aber ausdrücklich hervor-en, und Beispiele werden dies bestätigen, dafs im allgemeinen dieser Schlufs falsch wäre. —

Wir gehen nun an die Aufsuchung von Bedingungen, unter welchen der Satz gilt:

$$\lim_{q=+\infty} \int_a^b f(x, q)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Nach dem Begriff des Grenzwerts gilt diese Gleichung dann, wenn zu jeder beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ eine Zahl G gehört, welche bewirkt, dafs

$$\text{abs} \int_a^b (f(x, q) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon,$$

nur $q > G$. —

Wenn $f(x, q)$ in dem ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$ gleichmäfsig nach $\varphi(x)$ konvergiert, so se Relation sicher erfüllt; denn alsdann läfst sich eine Zahl G bestimmen, so dafs für das Intervall:

$$\text{abs}\,(f(x, q) - \varphi(x)) < \tfrac{\varepsilon}{b - a};$$

ıs folgt dann, dafs

$$\text{abs} \int_a^b (f(x, q) - \varphi(x))\,dx \leqq \int_a^b \text{abs}\,(f(x, q) - \varphi(x))\,dx < \tfrac{\varepsilon}{b - a}\,(b - a),$$

leiner als ε ist.

Geometrisch bedeutet dies folgendes. Nach der gemachten Voraussetzung verlaufen alle n $f(x, q)$ schliefslich zwischen den beiden Nachbarkurven $y = \varphi(x) + \varepsilon$ und $y = \varphi(x) - \varepsilon$. ntegral

$$\int_a^b \text{abs}\,(f(x, q) - \varphi(x))\,dx$$

tet alsdann einen Flächeninhalt, welcher kleiner ist, als ein endlicher Streifen von beliebig kleiner , kann also unter jede noch so kleine Zahl herabgedrückt werden. —

Wenn wir statt der Bedingung

$$\text{abs}\int_a^b (f(x,q)-\varphi(x))\,dx<\varepsilon$$

die andere

$$\int_a^b \text{abs}\,(f(x,q)-\varphi(x))\,dx<\varepsilon$$

aufstellen, so nehmen wir statt der notwendigen eine hinreichende Bedingung; denn, da

$$\text{abs}\int_a^b (f(x,q)-\varphi(x))\,dx \leqq \int_a^b \text{abs}\,(f(x,q)-\varphi(x))\,dx,$$

so ist es denkbar, dafs die erstere erfüllt sei, nicht aber die zweite. —

Um zu erfahren, unter welchen weiteren Voraussetzungen die Bedingung

$$\int_a^b \text{abs}\,(f(x,q)-\varphi(x))\,dx<\varepsilon$$

etwa noch erfüllbar sei, untersuchen wir, in welcher Weise Ausnahmen von der gleichmäfsi Konvergenz durch das ganze Intervall stattfinden können. Dafs eine Funktion $f(x,q)$ in dem gan Intervall gleichmäfsig gegen $\varphi(x)$ konvergiere mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punk etwa der Endpunkte, ist ausgeschlossen. Denn da einerseits zu jedem ausgenommenen Pun andrerseits zu der ganzen Strecke mit Ausschlufs dieser Punkte je eine Zahl gehört, welche, k gesagt, die verlangte Annäherung leistet, so erfüllt die gröfste unter diesen Zahlen für die ga Strecke ohne jede Ausnahme die obige Bedingung. Wenn Ausnahmen *punktuell* stattfinden, können sie also nur in einer unendlichen Anzahl von Punkten, in einer *Punktmenge* stattfin Andrerseits kann die gleichmäfsige Konvergenz stattfinden für die ganze Strecke von a bis b Ausschlufs der beliebig kleinen Umgebung eines bestimmten Punktes oder auch der Umgebun mehrerer Punkte oder einer Punktmenge. Unter den Punktmengen ist besonders bei Aufgaben Integralrechnung hervorzuheben die *diskrete Punktmenge* (Harnack) oder die *Punktmenge mit Intervallsumme Null* (Stolz). Diese wird in folgender Weise definiert: Nennt man das Intervall $x-\varepsilon$ bis $x+\varepsilon$ die Umgebung des Punktes x, wobei ε eine beliebig kleine Gröfse ist, so soll e unendliche Menge von Punkten eine diskrete Mannigfaltigkeit heifsen, wenn es möglich ist, sämtli Punkte dieser Menge in Umgebungen einzuschliefsen, deren Summe kleiner gemacht werden ka als eine beliebig kleine Zahl, während die Anzahl der Umgebungen dabei beliebig wachsen ka Die Benennung „diskrete Punktmenge“ ist von Harnack eingeführt worden, um auszudrücken, d eine solche Menge für die Probleme der Integralrechnung dieselbe Eigenschaft hat, wie eine e liche Anzahl diskreter Punkte. Durch die zweite Bezeichnung „Punktmenge mit der Intervallsum Null“ wird die eben definierte den *linearen* Punktmengen entgegengesetzt, bei denen die in gleic Weise gebildete Intervallsumme nicht gegen 0, wie hier, sondern gegen eine andere Zahl k vergiert, welche $\leq b-a$ sein kann, wenn $b-a$ das ganze in Rede stehende Intervall ist. D aber zu jeder definierten Mannigfaltigkeit von Punkten eine und nur eine bestimmte Intervallsum gehört, hat Herr O. Stolz bewiesen.*)

Soll nun

$$\int_a^b \text{abs}\,(f(x,q)-\varphi(x))\,dx<\varepsilon$$

dadurch werden, dafs q gröfser als eine Zahl G genommen wird, so müssen die Stellen, an de es nicht möglich ist, den Integrandus

*) Math. Ann. Bd. 23, S. 152.

$$\text{abs}\,(f(x,q)-\varphi(x))$$

Annahme einer hinlänglich grofsen unteren Grenze für q unter eine beliebig kleine Zahl udrücken, eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden. In diesem Falle nämlich läfst es sich ien, dafs in dem ganzen Intervall mit Ausnahme einer Intervallsumme s

$$\text{abs}\,(f(x,q)-\varphi(x))<\eta$$

dem übrigen Teil s

$$\text{abs}\,(f(x,q)-\varphi(x))\geqq\eta$$

n welchem letzteren aber durchweg wegen der Voraussetzung, dafs $f(x,q)$ unter einer endlichen D liegt,

$$\text{abs}\,(f(x,q)-\varphi(x))<2D$$

ls ist somit

$$\int_a^b \text{abs}\,(f(x,q)-\varphi(x))\,dx<\eta(b-a)+s\cdot 2D.$$

Nimmt man nun

$$\eta<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\qquad\text{und}\qquad s<\frac{\varepsilon}{4D},$$

urch Wahl eines hinlänglich grofsen G möglich ist, so wird

$$\int_a^b \text{abs}\,(f(x,q)-\varphi(x))\,dx<\varepsilon.$$

Wir wollen sagen, dafs in diesem Falle die Funktion $f(x,q)$ *im allgemeinen gleichmäfsig* gegen enzfunktion $\varphi(x)$ im Intervall $a\leqq x\leqq b$ konvergiert und können dann den Satz aussprechen: *Wenn $f(x,q)$ bei allen Werten von $q>Q$ im Intervall $a\leqq x\leqq b$ endlich und nach x inte-r ist, wenn ferner $f(x,q)$ bei $\lim q=+\infty$ zum Grenzwerte $\varphi(x)$ im allgemeinen gleichmäfsig e Werte von x in dem angegebenen Intervall konvergiert, wenn endlich $\varphi(x)$ ebenfalls in demselben rbar ist, so ist:*

$$\lim_{q=+\infty}\int_a^b f(x,q)\,dx=\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Wenn $f(x,q)$ nicht im allgemeinen gleichmäfsig zum Grenzwerte $\varphi(x)$ konvergiert, sondern lie Stellen, an denen

$$\text{abs}\,(f(x,q)-\varphi(x))$$

kleiner als eine beliebig kleine Zahl gemacht werden kann, eine lineare Punktmannigfaltigkeit so konvergiert

$$\int_a^b \text{abs}\,(f(x,q)-\varphi(x))\,dx$$

gegen 0. Trotzdem könnte

$$\text{abs}\int_a^b (f(x,q)-\varphi(x))\,dx$$

ohl gegen 0 konvergieren, dadurch nämlich, dafs sich positive und negative Teile zerstörten. aber $f(x,q)-\varphi(x)$ von einem bestimmten q ab im Intervall $a\leqq x\leqq b$ stets dasselbe Zeichen e, so würde beides auf dasselbe herauskommen; der obige Satz würde für solche Funktionen h die notwendige Bedingung angeben. Aber nicht nur in diesem Falle, sondern auch in einem

etwas allgemeineren würde dies zutreffen. Nehmen wir an, das Intervall a bis b lasse sich i Reihe von Strecken zerlegen, in deren jeder schliefslich die obige Differenz — die Restfu könnten wir sie nennen — einerlei Zeichen hat, nehmen wir ferner an, es werde verlangt, de solle auch *für jedes Teilintervall* gelten, so ist ebenfalls die in dem obigen Satze gestellte Bedi dafs die Ausnahmen von der gleichförmigen Konvergenz sich nur auf die Umgebungen dis Punkte beziehen, eine notwendige, — im entgegengesetzten Falle gilt dann der Satz nicht. Üb wird man zugeben, dafs, wenn von der Gültigkeit des Satzes die Rede ist, stillschweigend da auch die Gültigkeit für jedes Teilintervall verstanden wird.

Es möge wiederholt bemerkt werden, dafs der Grenzübergang $\lim q = +\infty$ durch andern ersetzt werden kann. Hängt die Funktion unter dem Integralzeichen von einem Par in der Weise ab, dafs zu jedem Werte desselben nicht ein Funktionswert, sondern unendlich gehören, so wird sich in den angestellten Betrachtungen nichts wesentlich ändern. In dieser hängt die Produktensumme

$$\sum_1^n{}^p \Delta\alpha_p \, F(x, \alpha_p),$$

welche gegen das bestimmte Integral

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\,\alpha F(x, \alpha)$$

konvergiert, von einer Gröfse δ ab. Alle Intervalle $\Delta\alpha_p$ nämlich sollen, während sie der Bedingung

$$\sum_1^n{}^p \Delta\alpha_p = \alpha_1 - \alpha_0$$

genügen, kleiner genommen werden, als eine gegen 0 konvergierende Gröfse δ. Da auch diese A Abhängigkeit die Anwendung unsres Satzes meiner Meinung nach nicht ausschliefst, so hal weiter unten dasjenige, was sich in diesem Falle ergiebt, anführen zu dürfen geglaubt. —

Wenn eine Integrationsgrenze ∞ wird, so treten, falls der Satz:

$$\lim \int_a^\infty f(x, q)dx = \int_a^\infty \lim f(x, q)dx = \int_a^\infty \varphi(x)dx$$

auch dann bestehen soll, noch weitere Bedingungen hinzu.*)

Teilt man das Integrationsintervall a bis ∞ in die beiden Teile a bis a' und a' bis ∞,

$$\int_a^\infty f(x, q)dx - \int_a^\infty \varphi(x)dx = \int_a^{a'} [f(x, q) - \varphi(x)]dx + \int_{a'}^\infty f(x, q)dx - \int_{a'}^\infty \varphi(x)dx.$$

Es mufs vorausgesetzt werden, dafs das Integral

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx$$

existiere, womit gesagt ist, dafs durch ein gehörig grofses a'

$$\int_{a'}^\infty \varphi(x)dx$$

beliebig klein wird. Auch soll der Satz für ein beliebiges endliches Intervall bestehen bleibe

*) Stolz, Math. Ann. Bd. 26, S. 84.

Wenn dann

$$\int_{a'}^{\infty} f(x, q)\,dx$$

lle q gröfser als eine gewisse Zahl gleichmäfsig für $\lim a' = +\infty$ zu Null konvergiert, so gilt atz; denn man kann dann a' so grofs annehmen, dafs

$$\text{abs} \int_{a'}^{\infty} f(x, q)\,dx < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\text{abs} \int_{a'}^{\infty} \varphi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3},$$

größere der Zahlen für a', die bei den beiden einzelnen Integralen die erforderliche Annäherung ergiebt, leistet dieselbe bei beiden gemeinschaftlich), endlich G so grofs, dafs für $q > G$

$$\text{abs} \int_{a}^{a'} [f(x, q)\,dx - \varphi(x)]\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

es geschehen, so ist auch

$$\text{abs} \int_{a}^{\infty} [f(x, q) - \varphi(x)]\,dx < \varepsilon$$

nan kann den Satz aussprechen:

Gilt der in Rede stehende Satz für jedes Intervall von a bis $a' > a$, konvergiert

$$\int_{a'}^{\infty} f(x, q)\,dx$$

n $a' = +\infty$ *gleichmäfsig zu* 0 *für alle q gröfser als eine gewisse Zahl und existiert auch:*

$$\int_{a}^{\infty} \varphi(x)\,dx,$$

man auch:

$$\lim_{q=+\infty} \int_{a}^{\infty} f(x, q)\,dx = \int_{a}^{\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Bei dem nun folgenden Beispiele werden wir einen Parameter zu $+0$ konvergieren lassen. ntegral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$$

xanntlich $= \frac{\pi}{2}$ für $\alpha > 0$, somit ist auch

$$\lim_{\alpha=+0} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

gen ist

$$\int_0^\infty \lim_{\alpha=+0} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = 0.$$

Für jede endliche obere Grenze h gilt:

$$\lim_{\alpha=+0} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \int_0^h \lim_{\alpha=+0} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = 0,$$

denn die Funktion $\frac{\sin \alpha x}{x}$, welche absolut genommen durchweg $< \alpha$ ist, konvergiert gleichmä
zu 0 in jedem endlichen Intervall. Für eine unendliche obere Grenze gilt also der Satz deswe
nicht, weil das Integral

$$\int_u^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

für lim $u = +\infty$ nicht gleichmäfsig zu 0 konvergiert. In der That ist, wie sich durch Einführ
einer neuen Variablen ergiebt:

$$\int_u^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \int_{\alpha u}^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Da nun das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ einen endlichen Wert hat, so läfst sich αu so grofs annehmen,

$$\operatorname{abs} \int_{\alpha u}^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx < \varepsilon$$

wird. Wenn αu in dieser Weise fixiert ist, so ergiebt sich, dafs das zugehörige u, während α gege
konvergiert, über alle Grenzen wächst.

§ 2. Über die Integration einer unendlichen Reihe.

Sei

$$f(x, q) = u_0 + u_1 + \cdots + u_q,$$

wo u_0, u_1 u. s. w. Funktionen von x seien, die wir als durchweg endlich und integrierbar in
betreffenden Intervall ansehen. Der Grenzwert dieser Summe für $q = \infty$ sei $\varphi(x)$. Soll die
endliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots,$$

also $\varphi(x)$ im Intervall von a bis b integriert werden, so entsteht die Frage, unter welchen
dingungen ist

$$\int_a^b \sum_0^\infty{}_h u_h\, dx = \sum_0^\infty{}_h \int_a^b u_h\, dx?$$

Es ist

$$\sum_0^\infty{}_h \int_a^b u_h\, dx = \lim_{q=+\infty} \sum_0^q{}_h \int_a^b u_h\, dx,$$

wie aus der Definition der Summe einer unendlichen Reihe folgt. Da nun für jeden endli
Wert von q

$$\sum_0^q{}_h \int_a^b u_h dx = \int_a^b \sum_0^q{}_h u_h dx,$$

$$\sum_0^\infty{}_h \int_a^b u_h dx = \lim_{q=+\infty} \int_a^b \sum_0^q{}_h u_h dx,$$

es frägt sich also, unter welchen Bedingungen die Gleichung gilt:

$$\lim_{q=+\infty} \int_a^b \sum_0^q{}_h u_h dx = \int_a^b \lim_{q=+\infty} \sum_0^q{}_h u_h dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

r Satz giebt, auf diesen Fall angewendet, folgende Antwort:

Wenn die Partialsummen $u_0 + u_1 + \cdots + u_q$ in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ im allgemeinen gleich- g gegen den Reihenwert $\varphi(x)$ konvergieren und wenn die Restfunktionen für beliebig grofse q unter endlichen Zahl bleiben, so erhält man, die Integrierbarkeit der betreffenden Funktionen vorausgesetzt, Integral der unendlichen Reihe in demselben Intervall durch Integration der einzelnen Glieder.

Es möge hervorgehoben werden, dafs aus der im allgemeinen gleichmäfsigen Konvergenz eihe gegen die endliche Funktion $\varphi(x)$ durchaus nicht folgt, dafs sämtliche Partialsummen und unktionen unter einer endlichen Zahl liegen, so dafs diese Voraussetzung weggelassen werden te. Wenn man *durchweg* gleichmäfsige Konvergenz voraussetzt, ist dieser Zusatz freilich über- g. Die Bedingung, dafs die Reihe im allgemeinen gleichmäfsig gegen den Grenzwert konvergiert, leichbedeutend mit der, dafs die Restfunktion im allgemeinen gleichmäfsig gegen 0 konvergiert. n die Partialsummen sämtlich unter einer endlichen Zahl liegen, so gilt dasselbe für die Rest- ionen, und umgekehrt, denn es ist

$$\varphi(x) - f(x, q)$$

Restfunktion und $\varphi(x)$ ist als endlich vorausgesetzt. Man kann sich also an die Untersuchung Restfunktion kalten.

Als Beispiel diene zunächst die Reihe*):

$$\frac{x}{x^2+1} = \sum_1^\infty{}_n \left(\frac{nx}{n^2x^2+1} - \frac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+1} \right).$$

Restfunktion ist hier $\frac{qx}{q^2x^2+1}$, da $\lim_{n=\infty} \frac{nx}{n^2x^2+1} = 0$. Diese konvergiert gegen 0, aber in Umgebung der Stelle $x = 0$ nicht gleichmäfsig. Die Funktion

$$R_q(x) = \frac{qx}{q^2x^2+1}$$

nämlich bei $x = \frac{1}{q}$ einen Maximalwert $= \frac{1}{2}$; sie ist $= 0$ für $x = 0$, auch für $x = \infty$. Eine e $R_q(x)$ steigt also von 0 an bis zu der Höhe $\frac{1}{2}$, welche sie bei $x = \frac{1}{q}$ erreicht, um dann er bis 0 zu fallen. Je gröfser q wird, desto mehr nähert sich der Maximalwert, dessen Gröfse ändert $= \frac{1}{2}$ bleibt, dem Werte $x = 0$, während sich alle übrigen Teile der Kurve der Abscissen- mehr und mehr anschmiegen. Da die Ausnahme von der gleichmäfsigen Konvergenz sich dem- nur auf die Umgebung eines Punktes bezieht, und da ferner die Werte von $R_q(x)$ die Zahl $\frac{1}{2}$ übersteigen, so gilt für jedes endliche Intervall der Satz von der Vertauschung der Summation

*) Harnack, Lehrbuch der Diff.- u. Integralrechnung S. 238.

und Integration. In der That erhält man durch Integration der einzelnen Glieder von 0 b folgende Reihe:

$$\sum_1^\infty{}_n \left[\frac{1}{2n} l\,(n^2x^2+1) - \frac{1}{2(n+1)} l\,((n+1)^2x^2+1)\right],$$

welche $= \frac{1}{2} l(x^2+1)$, also gleich

$$\int_0^x \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

ist. —

Die von Herrn Weierstraſs aufgestellte Reihe

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty{}_n b^n \cos(a^n x\pi)$$

konvergiert, wenn $0 < b < 1$. Dieselbe konvergiert gleichmäſsig, da die Reihe aus den numer gröſsten Werten der einzelnen Glieder $\sum_0^\infty{}_n b^n$ konvergiert. Sie ist also eine stetige Funktion vo als solche integrierbar. (Von dieser stetigen Funktion hat Herr Weierstraſs gezeigt, daſs sie, wen ungerade und $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, nirgends einen bestimmten Wert des Differentialquotienten hat.*)) Integration läſst sich durch Integration der einzelnen Glieder nach unserem Satz ausführen; in That konvergiert die dadurch entstehende Reihe:

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{b^n}{a^n\pi} \sin(a^n x\pi),$$

wenn $0 < b < 1$; wenn $a \geqq 1$, so ist dies von vornherein klar; wenn $a < 1$, so ist zu berücksichti daſs der Faktor $\frac{\sin(a^n x\pi)}{a^n\pi} < x$ ist.

Herr Darboux hat eine Reihe aufgestellt, welche für alle Werte von x konvergiert und stetige Funktion von x darstellt, bei welcher auch die Reihe der Integralfunktionen konverg welche aber doch nicht gliedweise integriert werden kann. Diese Reihe ist

$$\varphi(x) = xe^{-x^2} = \sum_1^\infty{}_n (nxe^{-nx^2} - (n+1)xe^{-(n+1)x^2}).$$

Es ist instruktiv, das Beispiel etwas allgemeiner zu fassen und die Art, wie die Restfunktion konvergiert, zu betrachten. Man hat auch:

$$xe^{-x^2} = \sum_1^\infty{}_n (n^\mu xe^{-nx^2} - (n+1)^\mu xe^{-(n+1)x^2}).$$

Wir wollen aufser dem Fall $\mu = 1$ auch den Fall $\mu < 1$ berücksichtigen. Die Restfunktion

$$R_q(x) = q^\mu xe^{-qx^2}.$$

Dieselbe hat ein Maximum bei $x = \frac{1}{\sqrt{2q}}$, dessen Wert ist $\frac{q^{\mu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2e}}$. Ist $\mu > \frac{1}{2}$, so wächst Maximum mit q über alle Grenzen, die Bedingung der Endlichkeit, welche in dem zu Gr gelegten Satz gemacht wurde, ist nicht erfüllt, und es fragt sich, ob trotzdem die Integration

*) Journal für Math. Bd. 79, S. 29.

he gliedweise ausgeführt werden darf. Die Restfunktion steigt von 0 bis $\frac{q^{\mu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2e}}$ und fällt wieder zu 0. Bei wachsendem q werden die Maxima, die bei $x = \frac{1}{\sqrt{2q}}$ stattfinden, immer näher an $= 0$ heranrücken; dabei werden die Erhebungen immer höher, steiler und schmäler, während der ige Teil der Kurve sich immer näher an die Abscissenaxe anschmiegt. Schliefslich ist das imum über jede Stelle hinweggeschritten und die Grenzkurve ist die Abscissenaxe selbst. Man t, die gleichmäfsige Konvergenz findet nur statt mit Ausschlufs der Umgebung des Punktes $x = 0$. die Maxima über alle Grenzen wachsen, so ist das Integral

$$\int_0^x (\varphi(x) - f(x, q))\, dx = \int_0^x R_q(x)\, dx$$

kt zu untersuchen. Es ist

$$\int_0^x R_q(x)\, dx = \int_0^x q^\mu x e^{-qx^2}\, dx = \frac{1}{2}\, q^{\mu-1}(1 - e^{-qx^2}).$$

ses Integral kann, wenn $\mu < 1$, beliebig klein gemacht werden, also darf in diesem Falle die he gliedweise integriert werden. Ist dagegen $\mu = 1$, so nähert sich das Integral bei gröfser dendem q der Grenze $\frac{1}{2}$, die Reihe darf nicht gliedweise integriert werden. In der That ist für $= 1$ die Reihe der Integralfunktionen:

$$\sum_1^\infty{}_n \left(\int_0^x n x e^{-nx^2} dx - \int_0^x (n+1) x e^{-(n+1)x^2} dx \right) = \sum_1^\infty{}_n \left(-\frac{1}{2}\, e^{-nx^2} + \frac{1}{2}\, e^{-(n+1)x^2} \right);$$

elbe ist $= -\frac{1}{2}\, e^{-x^2}$ im allgemeinen, für $x = 0$ dagegen 0, also unstetig. Das Integral der he dagegen ist:

$$\int_0^x x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\,(1 - e^{-x^2}).$$

lrerseits hat sich ergeben, dafs die Reihe:

$$x e^{-x^2} = \sum_1^\infty{}_n \left(n^\mu x e^{-nx^2} - (n+1)^\mu x e^{-(n+1)x^2} \right)$$

$1 > \mu > \frac{1}{2}$ gliedweise integriert werden darf, obgleich die Maxima der Restfunktion auch hier r jede Grenze wachsen. Die Reihe der Integralfunktionen ist hier:

$$\sum_1^\infty{}_n \left(\int_0^x n^\mu x e^{-nx^2} dx - \int_0^x (n+1)^\mu x e^{-(n+1)x^2} dx \right) = \sum_1^\infty{}_n \Big(-\frac{1}{2}\, n^{\mu-1} e^{-nx^2} + \frac{1}{2}\, n^{\mu-1} + \frac{1}{2}\,(n+1)^{\mu-1} e^{-(n+1)x^2} - \frac{1}{2}\,(n+1)^{\mu-1} \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\,(1 - e^{-x^2}),$$

sich die beiden Glieder $\frac{1}{2}\, n^{\mu-1}$ und $\frac{1}{2}\,(n+1)^{\mu-1}$ hier nicht wegheben, wie bei $\mu = 1$.

Ist $\mu = \frac{1}{2}$, so konvergiert die Reihe in der Umgebung von $x = 0$ zwar auch ungleich- sig, jedoch sind die Maxima der Restfunktion endlich. Für $\mu < \frac{1}{2}$ nehmen die Maxima, während

sie sich dem Punkte $x = 0$ nähern, über alle Grenzen ab; die Restfunktion konvergiert durchwe gleichmäfsig zu 0. In diesen Fällen ist das Integral der Reihe unmittelbar nach unserem Satz glei der Reihe der Integralfunktionen.

§ 3. Die Differentiation eines bestimmten Integrals nach einem Parameter.

Es handle sich um die Differentiation eines Integrals

$$\int_a^b f(x, \alpha)dx$$

nach α. Jedenfalls ist

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_a^b f(x, \alpha)dx = \lim_{\Delta\alpha=0}\int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\, dx.$$

Wenn zwischen dem vorwärts und rückwärts genommenen Differentialquotienten unterschieden werde soll, so ist die Grenze zu nehmen für $\lim \Delta\alpha = +0$ oder $\lim \Delta\alpha = -0$. Ist es gestattet, mit de Zeichen lim unter das Integralzeichen zu gehen, so wird der Differentialquotient des bestimmte Integrals nach dem Parameter durch Differentiation unter dem Integralzeichen gebildet. Hierfü ergiebt sich also folgender Satz:

Wenn der an der Stelle α und für das Inkrement $\Delta\alpha$ gebildete Differenzenquotient fü $0 < \Delta\alpha < \Delta$ und alle $a \leqq x \leqq b$ unter einer endlichen Zahl verbleibt und im allgemeinen gleichmäfs gegen den Differentialquotienten konvergiert, wenn aufserdem der letztere für den angenommenen We von α in dem Intervall integrierbar ist, so ist:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_a^b f(x, \alpha)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x}\, dx.$$

Ein Beispiel, in welchem die Differentiation unter dem Integralzeichen unzulässig ist, biet das Integral

$$\int_0^x x e^{-\frac{x^2}{\alpha}} dx = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$$

an der Stelle $\alpha = 0$. Es bedarf indessen gerade für $\alpha = 0$ eines erläuternden Zusatzes, weil d Funktion $e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$ hierfür die Bedeutung verliert. Da $\lim_{\alpha=+0} e^{-\frac{x^2}{\alpha}} = 0$ ist für beliebige von 0 ve schiedene Werte von x, so möge der Wert 0 als Funktionswert für $\alpha = 0$ gelten, auch dann, wen $x = 0$ ist. Wenngleich nun auch $e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$ an der Stelle $x = 0$, $\alpha = 0$ unstetig ist, — denn es ist a der x-Axe durchweg 0, auf der positiven α-Axe hingegen 1 —, so sind doch die Funktionen αe^{-} und $xe^{-\frac{x^2}{\alpha}}$ auf der positiven Halbebene $\alpha > 0$ inkl. der Begrenzung stetige Funktionen beid Variabeln. Die Gleichung gilt auch für $\alpha = 0$, während wir negative α von der Betrachtung au schliefsen, wie wir auch nur den vorwärts genommenen Differentialquotienten bilden wollen.

Der Differenzenquotient von $xe^{-\frac{x^2}{\alpha}}$ für $\alpha = 0$ ist

$$\frac{xe^{-\frac{x^2}{\Delta\alpha}}}{\Delta\alpha}.$$

selbe hat ein Maximum für $x = \sqrt{\frac{\Delta\alpha}{2}}$, dessen Wert ist $\frac{1}{\sqrt{2e\Delta\alpha}}$. Der Differentialquotient ist

nthalben 0, weil $e^{-\frac{x^2}{\Delta\alpha}}$ in höherer Ordnung für $\Delta\alpha = 0$ verschwindet, als eine beliebig hohe enz von $\Delta\alpha$. Die Betrachtungen aus dem vorigen Paragraphen wiederholen sich. Die Differentiation unter dem Integralzeichen ergiebt also 0, während das richtige Resultat $\frac{1}{2}$ ist, wie aus Differentiation der rechten Seite obiger Gleichung folgt.

Wenn das bestimmte Integral eine solche Funktion der oberen Grenze x und des Parameters α ist, für welche der Satz von der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Differentiationen teht, so ist jedenfalls die Differentiation unter dem Integralzeichen gestattet.*) Denn wenn für Funktion:

$$F(x, \alpha) = \int_a^x f(x, \alpha) dx$$

Gleichung gilt:

$$\frac{\partial^2 F(x, \alpha)}{\partial x \partial \alpha} = \frac{\partial^2 F(x, \alpha)}{\partial \alpha \partial x},$$

ist:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \alpha} \int_a^x f(x, \alpha) dx = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha},$$

l durch Integration ergiebt sich:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^x f(x, \alpha) dx = \int_a^x \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx.$$

Daraus geht hervor, dafs man überall da, wo die Differentiation unter dem Integralzeichen tatthaft ist, gleichzeitig das Beispiel einer Funktion hat, bei der die Reihenfolge der Differentiationen ht vertauscht werden darf. Um dies in dem vorstehenden Beispiel zu bestätigen, bemerke man, dafs

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial x} = \lim_{\Delta\alpha = 0} \lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x + \Delta x, \alpha + \Delta\alpha) - F(x + \Delta x, \alpha) - F(x, \alpha + \Delta\alpha) + F(x, \alpha)}{\Delta x \Delta\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \alpha} = \lim_{\Delta x = 0} \lim_{\Delta\alpha = 0} \frac{F(x + \Delta x, \alpha + \Delta\alpha) - F(x + \Delta x, \alpha) - F(x, \alpha + \Delta\alpha) + F(x, \alpha)}{\Delta x \Delta\alpha}.$$

Funktion, von der die zweiten Differentialquotienten gebildet werden sollen, ist $\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$;

berücksichtigen nur $\alpha e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$ und bilden den Quotienten für die Stelle $x = 0$, $\alpha = 0$, und zwar für positive $\Delta\alpha$. Der Differenzenquotient, in welchem $\Delta\alpha$ und Δx nacheinander in verschiedener henfolge zu 0 konvergieren sollen, ist

$$\frac{\Delta\alpha e^{-\frac{\Delta x^2}{\Delta\alpha}} - \Delta\alpha}{\Delta\alpha \Delta x} = \frac{e^{-\frac{\Delta x^2}{\Delta\alpha}} - 1}{\Delta x}.$$

zt man zuerst $\Delta\alpha = 0$, so ergiebt sich $-\frac{1}{\Delta x}$, welches mit verschwindendem Δx *unendlich* wird. st man dagegen zuerst Δx zu 0 konvergieren, so giebt die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$\frac{-\frac{\Delta x^2}{\Delta\alpha} + \frac{\Delta x^4}{2\Delta\alpha^2} - \text{etc.}}{\Delta x}$$

Resultat 0.

*) Harnack, Lehrbuch, S. 283.

In dem Harnack'schen Lehrbuch ist (S. 282) folgendes Beispiel gegeben, bei welchem Differenzenquotient ein etwas anderes Verhalten zeigt. Es sei:

$$\int_0^x f(x, \alpha)\,dx = x \sin\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x}\right),$$

so ist

$$f(x, \alpha) = \sin\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x}\right) - \frac{4\alpha x}{x^2 + \alpha^2} \cos\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x}\right).$$

$f(0, \alpha)$ soll 0 sein. Der Differenzenquotient ist für $\alpha = 0$:

$$\frac{\sin\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\Delta\alpha}{x}\right)}{\Delta\alpha} - \frac{4x}{x^2 + \Delta\alpha^2} \cos\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\Delta\alpha}{x}\right),$$

der Differentialquotient also 0. Sucht man die Maxima und Minima des Differenzenquotienten, findet sich ein Minimum zwischen $x = 0$ und $x = \Delta\alpha \operatorname{cotg} \frac{3\pi}{8}$, ein Maximum zwischen $x = \Delta\alpha$ u $x = \Delta\alpha \operatorname{cotg} \frac{\pi}{8}$. Das erstere wächst negativ, das zweite positiv mit abnehmendem $\Delta\alpha$ über a Grenzen, was hier nicht weiter ausgeführt werden möge. Die Differentiation unter dem Integ zeichen giebt 0, während

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(x \sin\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x}\right)\right)_{\alpha=0} = 4$$

ist. —

Wenn $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ bei jedem Werte von x eine stetige Funktion von α ist, so ist nach d Mittelwertsatz

$$\frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{\partial f(x, \alpha + \Theta\Delta\alpha)}{\partial \alpha},$$

wo Θ ein unbekannter echter Bruch ist. Läfst sich nun bei dem gegebenen Werte von α Intervall von α bis $\alpha + h$ angeben, so dafs im Gebiete von α bis $\alpha + h$ und von $x = a$ $x = b$ $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ eine im allgemeinen stetige Funktion*) von x und α ist, so konvergiert auch n einem bekannten Satz von den stetigen Funktionen

$$\frac{\partial f(x, \alpha + \Theta\Delta\alpha)}{\partial \alpha} \quad \text{gegen} \quad \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$$

im allgemeinen gleichmäfsig und die Differentiation unter dem Integralzeichen ist sicherlich gestattet.

Ist eine Integrationsgrenze unendlich, so ist von vornherein natürlich die Integrierbark des Differentialquotienten bis ∞ zur Gültigkeit des Satzes erforderlich. Hierauf wird man, um Satz S. 9 anwenden zu können, zu untersuchen haben, ob das Integral des Differenzenquotienten

$$\int_u^\infty \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx$$

für $\lim u = \infty$ *gleichmäfsig* zu 0 konvergiert. —

§ 4. Über die Integration nach einem Parameter.

Die Frage, ob ein Integral nach einem Parameter integriert wird, dadurch, dafs man Integrandus in Bezug auf denselben integriert, ist gleichbedeutend mit der Frage nach der V tauschbarkeit der Integrationen bei einem zweifachen Integral. Es ist also zu untersuchen, ur welchen Bedingungen bei einer stets endlichen Funktion $f(x, y)$ der Satz gilt

*) D. h. stetig mit Ausnahme allenfalls einer Reihe von Kurven, deren Anfangselemente eine disk Punktmenge bilden.

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b dx f(x,y) = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy f(x,y)?$$

Bekanntlich ist ein bestimmtes Integral in folgender Weise definiert:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha\, F(\alpha) = \lim \sum_1^n{}_p \Delta\alpha_p F(\alpha_p),$$

wo $\sum_1^n{}_p \Delta\alpha_p = \alpha_1 - \alpha_0$ und $F(\alpha_p)$ *irgend einen* Funktionswert in dem Intervall $\Delta\alpha_p$ vorstellt, falls man diesen Grenzwert so bildet, dafs man die Gröfse jedes Intervalls unter jede beliebig kleine Gröfse sinken und n dabei über jede Zahl hinaus wachsen läfst. — Hiernach ist

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b dx f(x,y) = \lim \sum_1^n{}_p \Delta y_p \int_a^b dx f(x, y_p),$$

wo $\sum_1^n{}_p \Delta y_p = \beta - \alpha$ ist und y_p irgend einen Wert im Intervall Δy_p bedeutet.

Nach derselben Definition ist:

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy f(x,y) = \int_a^b dx \lim \sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p).$$

Die an der Spitze dieses Paragraphen stehende Gleichung wird also gelten, wenn

$$\lim \sum_1^n{}_p \Delta y_p \int_a^b f(x, y_p)\, dx = \int_a^b dx \lim \sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p),$$

wobei der limes in obigem Sinne zu nehmen ist. Da n eine endliche Zahl bedeutet, welche man beliebig wachsen lassen will, so darf man links die Reihenfolge der Summation und Integration vertauschen und erhält folgende Bedingungsgleichung:

$$\lim \int_a^b dx \sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p) = \int_a^b dx \lim \sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p)$$

oder

$$\lim \int_a^b dx \sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p) = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy f(x,y),$$

welche nun in der Form des obigen Satzes erscheint. Dieser ergiebt also folgendes:

„Die Integration eines bestimmten Integrals nach einem Parameter ist durch Integration unter dem Integralzeichen gestattet, oder, was dasselbe ist, die Reihenfolge der Integrationen bei einem zweifachen Integral darf vertauscht werden, wenn aufser der Endlichkeit der zu integrierenden Funktion und der Integrationsgrenzen noch folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) $\sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p)$ konvergiert im allgemeinen gleichmäfsig gegen den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_\alpha^\beta dy f(x,y),$$

d. h. es existiert für sämtliche x im Intervall a bis b dieselbe obere Grenze für die Δy_p, so bis auf eine diskrete Mannigfaltigkeit von Punkten

$$\text{abs}\left(\sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p) - \int_\alpha^\beta dy f(x, y)\right) < \delta,$$

wenn nur jedes $\Delta y_p <$ jene obere Grenze ist;

2) dieses Integral $\int_\alpha^\beta dy f(x, y)$ ist als Funktion von x zwischen den Grenzen a u integrierbar;

3) $\sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p)$ ist für hinlänglich grofse n ebenfalls nach x zwischen den Grenz und b integrierbar.“ —

Dafs sowohl $\sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p)$ als $\int_\alpha^\beta dy f(x, y)$ zwischen endlichen Grenzen liegen, folgt der Endlichkeit der Funktion $f(x, y)$. —

Hierzu einige Bemerkungen. Die Bedingungen 2) und 3) besagen durchaus nicht, dafs

$$\int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy \qquad \text{oder} \qquad \sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p)$$

durchweg, d. h. für alle Werte von x bestimmte Werte seien. Zur Integrierbarkeit einer durch endlichen Funktion ist nur erforderlich, dafs die Stellen, an denen die Schwankungen derse gröfser sind, als eine beliebig kleine Zahl, eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden. Eine integrier Funktion kann also unter Umständen in unendlich vielen Punkten, welche nicht eine diskrete Man faltigkeit bilden, unstetig oder unbestimmt zwischen endlichen Grenzen sein oder sie kann an unend vielen Stellen in noch so kleinem Intervalle unendlich viele Maxima und Minima mit Schwankun von endlicher Gröfse besitzen, — solche Punkte können *pantachisch* (Du Bois-Reymond) oder *übe dicht* (Cantor) über das ganze Intervall verteilt sein*), — *wenn nur die Punkte, in welchen Schwankungen $> \sigma$ sind, die Intervallsumme Null haben.* Diese Bemerkungen werden wir zu beri sichtigen haben bei einem interessanten, von Du Bois-Reymond aufgestellten Beispiel.**)

Die zu integrierende Funktion $f(x, y)$ sei in dem Rechteck mit den Diagonalecken $x =$ $y = 0$ und $x = 1$, $y = 1$ allenthalben Null aufser für dyadische Werte von x und y. Für $x = \frac{2m}{2}$ $y = \frac{2n+1}{2^p}$ sei $f(x, y) = \frac{1}{2^p}$.

Verfolgt man also die Funktion auf einer der Abscissenaxe parallelen Geraden, so ist daselbst entweder allenthalben Null, wenn nämlich die zugehörige Ordinate kein dyadischer W d. h. also kein Wert von der Form $\frac{2n+1}{2^p}$ ist, oder sie hat, wenn $y = \frac{2n+1}{2^p}$, auf einer sol Linie in jedem beliebig kleinen Intervall Unstetigkeiten; sie ist für $x = \frac{1}{2}$ selbst $= \frac{1}{2}$, $x = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$, für $x = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right) = \frac{1}{8}$ u. s. w., — für alle nicht dyadische Werte gegen Null. Die Unstetigkeitssprünge werden also für dyadische Werte höherer Ordnung im kleiner und sinken unter jede noch so kleine Zahl, dergestalt, dafs die Stellen, an denen die Spri

---

*) D. h. in jedem beliebig kleinen Intervalle liegen Punkte der Mannigfaltigkeit, oder die Punkte h zur Intervallsumme die ganze Strecke.

**) Journal für Mathematik Bd. 94, S. 278.

beliebig kleine Zahl σ übertreffen, von endlicher Anzahl sind. Ebenso verhält sich die Funktion jeder anderen der Abscissenaxe parallelen Linie, sofern sie daselbst überhaupt Unstetigkeiten zt. — Verfolgen wir dagegen die Funktion auf einer der Ordinatenaxe parallelen Geraden, so ie daselbst entweder überall $= 0$, wenn nämlich das zugehörige x keine dyadische Zahl ist, oder esitzt für alle dyadischen Werte von y Unstetigkeitssprünge, welche jetzt aber im Gegensatze em Verhalten auf einer der Abscissenaxe parallelen Linie von derselben Gröfse sind, nämlich $\frac{1}{2^p}$, n das zugehörige x von der Form $\frac{2m+1}{2^p}$ ist. —

Nach dem Gesagten ist die Funktion auf jeder der x-Axe parallelen Geraden integrierbar, — die Anzahl der Stellen, an welchen die Schwankungen gröfser sind, als eine beliebig kleine σ, ist endlich. Dagegen ist die Funktion auf keiner Geraden integrierbar, welche der y-Axe llel ist und zu einem $x = \frac{2m+1}{2^p}$ gehört. Auf einer solchen Geraden sind die Unstetigkeitsnge sämtlich von derselben Gröfse, nämlich $\frac{1}{2^p}$; die Produktensumme, wie das Integral:

$$\sum_1^n{}_p f(x, y_p)\Delta y_p \qquad \text{und} \qquad \int_\alpha^\beta dy f(x, y)$$

unbestimmt zwischen den Grenzen $\frac{1}{2^p}$ und 0. Auf allen übrigen der Ordinatenaxe parallelen den ist Produktensumme wie Integral Null. In diesem Falle also wird man sagen können, dafs

$$\sum_1^n{}_p f(x, y_p)\Delta y_p \quad \text{gegen} \quad \int_\alpha^\beta dy f(x, y)$$

llgemeinen gleichmäfsig konvergiert; denn die Stellen, an welchen der Wert dieser Differenz $>$ in beliebig kleines σ bleibt, sind von endlicher Anzahl. Gleichzeitig sieht man, dafs Summe Integral als Funktionen von x nach x integrierbar sind. Die Reihenfolge der Integrationen ist Einfluſs auf den Wert des zweifachen Integrals. Bei

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy f(x, y)$$

er Wert des inneren Integrals für Werte von x der Form $\frac{2m+1}{2^p}$ unbestimmt zwischen den ezen 0 und $\frac{1}{2^p}$, im übrigen 0; das zweimalige Integral selbst ist daher 0. Bei

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b dx f(x, y)$$

as innere Integral 0, daher auch das zweifache.

§ 5. Über das eigentliche Doppelintegral.

Es besteht bekanntlich ein begrifflicher Unterschied zwischen einem eigentlichen Doppelral und einem zweimaligen Integral, bei welchem letzteren die Reihenfolge der Integrationen geben sein mufs; es ist also zu unterscheiden zwischen dem Doppelintegral

$$\int\int dx\, dy f(x, y),$$

welchem das Gebiet, auf welches es sich beziehen soll, angegeben sein mufs, und den successiven ralen

$$\int dx \int dy f(x,y) \quad \text{und} \quad \int dy \int dx f(x,y),$$

bei welchen die Angabe der Grenzen, zwischen denen die einzelnen Integrale genommen wer sollen, erforderlich ist. Von gröfster Wichtigkeit ist die Frage, ob und unter welchen Umstän das Doppelintegral durch ein zweimaliges ersetzt werden darf; beruht doch auf dieser Gleichsetz im wesentlichen die Auswertung der Doppelintegrale. — Während früher bei endlichen Funktio und endlichen Gebieten aus der Existenz des Doppelintegrals die Ersetzbarkeit desselben durch e der wiederholten Integrale geschlossen zu werden pflegte, — auf diese Weise wurde das Dop integral eben berechnet — sind in neuerer Zeit Bedenken dagegen geltend gemacht worden. erlaube mir, auf diesen so wichtigen Punkt einzugehen und will die Kontroverse zwischen He O. Stolz und A. Harnack*) hier besprechen. Hierzu bedarf es aber der Wiedergabe derjeni Definition des Doppelintegrals, welche unbestritten zu Recht besteht.

Damit eine überall endliche Funktion $f(x,y)$ ein eigentliches Doppelintegral in einem du eine gegebene Randkurve umgrenzten endlichen Gebiete zulasse, sind folgende Bedingungen, n wendig und hinreichend, zu erfüllen:

Es bedeuten $\tau_1, \tau_2, \cdots \tau^n$ ein System geradlinig begrenzter Flächenstücke, welche das Ge gänzlich überdecken, dergestalt, dafs eine Anzahl derselben durch die Randkurve zerschnitten $f(x_p, y_p)$ sei ein beliebiger innerhalb oder an der Grenze eines solchen Polygons, aber jedenf innerhalb des Gebietes gelegener Funktionswert. Diese Polygone denkt man sich nun fortwähr verkleinert, so dafs der gröfste Durchmesser eines jeden schliefslich unter eine beliebig kleine Z sinkt. Wenn dann

$$\sum_1^n{}_p f(x_p, y_p)\tau_p$$

bei unbegrenzter Abnahme sämtlicher Polygone in der angegebenen Weise einem endlichen Gr wert J zustrebt, dergestalt, dafs zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gehört, welche bewirkt,

$$\text{abs}\left(\sum_1^n{}_p f(x_p, y_p)\tau_p - J\right) < \varepsilon,$$

falls nur sämtliche gröfsten Durchmesser der Polygone $< \delta$ sind, so sagt man, die Funktion $f(x$ lasse ein Doppelintegral über das in Rede stehende Gebiet zu. Hierbei kommen die durch Randkurve zerschnittenen Polygone nur soweit in Anrechnung, als sie innerhalb des vorgeschriebe Gebietes liegen. Soll nun die Summe

$$\sum_1^n{}_p f(x_p, y_p)\tau_p,$$

wie auch die Einteilung gewählt sei, und wo auch die Funktionswerte in den einzelnen Polygo gelegen sein mögen, eine und nur eine Grenze haben, so mufs

$$\lim \sum_1^n{}_p (G^p - g_p)\tau_p = 0$$

sein, wobei G_p und g_p die obere und untere Grenze der Funktionswerte in den Polygonen bedeu Diese Bedingung, welche der alten von Riemann zuerst für das einfache Integral aufgestel Bedingung nachgebildet ist, ist notwendig und hinreichend.

Folgt nun aus der Existenz eines in der angegebenen Weise definierten Doppelintegrals einer in geeigneter Weise beschränkten Randkurve) *ohne weiteres* die Zurückführbarkeit desselben ein wiederholtes Integral, oder sind hierzu noch weitere Bedingungen zu erfüllen? Harnack ver den ersten Standpunkt (in seinem Lehrbuche der Differential- und Integralrechnung, seiner Bearbeit

*) Leipziger Math. Ann. Bd. 26, S. 93 und S. 566.

Serret'schen Werkes über denselben Gegenstand, sowie in einer Notiz im 26. Bd. der mathe-chen Annalen), während Herr Stolz an der angeführten Stelle folgenden Satz ausspricht beweist:

„Wenn die endliche Funktion $f(x, y)$ in dem Gebiete F (das eine konvexe Fläche mit den rsten Abscissen $a < a'$ und den äufsersten Ordinaten $b < b'$ sein möge) ein eigentliches Doppel-ral zuläfst *und* wenn $f(x, y)$ als Funktion von x auf jeder zur X-Axe parallelen Sehne von F i Ausnahme allenfalls der einem System von Werten Y, das im Intervalle (b, b') den Inhalt 0 t entsprechenden Sehnen) integrierbar ist, so ist die auf solche Weise erhaltene Funktion von y

$$\Phi(y) = \int_{x'}^{x''} f(x, y)dx,$$

$', x''$ die Abscissen der zur Ordinate y gehörigen Punkte des Randes von F bedeuten, im Inter-l (b, b') integrierbar und zwar hat man

$$\int_{b}^{b'} \Phi(y)dy = J.“$$

In dem Harnack'schen Lehrbuch findet sich (p. 313) die Behauptung, dafs, wenn die Funktion ein Doppelintegral zuläfst, dieselbe *im allgemeinen* (d. h. mit Ausnahme allenfalls eines eten Wertsystems von y) hinsichtlich x integrierbar sein müsse. Hieraus wird dann ge-ssen, dafs

$$\int\int dx\,dy\,f(x, y) = \int dx \int dy f(x, y) = \int dy \int dx f(x, y).$$

Herr Stolz widerlegt diese Behauptung mit dem Hinweis auf jenes (S. 19 dieser Abhandlung) Du Bois-Reymond gegebene Beispiel einer doppelt integrierbaren Funktion, welche trotzdem für ige dyadische, also nicht diskrete Werte von x in Bezug auf y nicht integrierbar ist.*) Diesem and begegnet alsbald Harnack mit der Richtigstellung seiner früheren nur inkorrekten Aus-sweise, welche durch folgende zu ersetzen sei:

Aus der Existenz des Doppelintegrals folgt, dafs nur für eine diskrete Mannigfaltigkeit von en der einen Variabeln das nach der andern Variabeln genommene Integral derart unbestimmt dafs die Differenz seiner Unbestimmtheitsgrenzen oberhalb irgend einer bestimmten, beliebig kleinen e liegt.

Mit dieser Behauptung ist das Du Bois-Reymond'sche Beispiel in völliger Übereinstimmung, war für alle dyadischen Werte von x das Integral

$$\int dy f(x, y)$$

stimmt zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2^p}$ ist, da aber andrerseits nur für eine endliche Zahl von en die Differenz dieser Unbestimmtheitsgrenzen gröfser ist, als eine beliebig kleine Zahl.

Nach dieser Richtigstellung ist der Satz ohne weitere Voraussetzung beweisbar, und ich will Beweis desselben mit dem Beweise dieses Hilfssatzes mitteilen.

Das Resultat dieser Kontroverse ist also ein sehr erwünschtes; der Satz von der Zurück-ng des Doppelintegrals auf wiederholte Integrale ist in seiner alten Einfachheit erhalten geblieben lautet:

Jedes Doppelintegral ist bei endlichen Werten der Funktion und bei hinreichend einfacher Gestalt Randkurve auf zwei successive Integrationen zurückführbar.

Das gegebene Gebiet sei ein Rechteck, gebildet von den Seiten $x = a$, $x = b$, $y = \alpha$, $y = \beta$. Beweis wird für ein anderes, konvexes, Gebiet umständlicher, bleibt aber im wesentlichen der-. Aus der Existenz des Doppelintegrals folgen die beiden Gleichungen:

*) x und y haben in diesem Beispiel die Rolle von y und x in der Darstellung des Textes.

$$J = \lim \Sigma\Sigma f(x, y)\Delta x\,\Delta y$$

und

$$0 = \lim \Sigma\Sigma(G - g)\Delta x\,\Delta y,$$

wobei wir uns das Rechteck durch Parallele zur Abscissen- und Ordinatenaxe in ein Netz kleinen Rechtecken geteilt denken. $f(x, y)$ sei ein beliebiger Funktionswert, G und g seien ob und untere Grenze sämtlicher Werte in einem solchen Rechtecke. Es wird für das ganze Ge ein Wert Δ, welchen die Δx, und ein Wert E, welchen die Δy nicht überschreiten dürfen, a reichen, damit die Doppelsumme von ihrem Grenzwerte einen beliebig kleinen Unterschied habe. Es gilt die Relation*)

(a) $$\Sigma g\Delta y \leqq \Sigma f(x, y)\Delta y \leqq \Sigma G\Delta y$$

auf jeder der y-Axe parallelen Geraden, wenn jetzt G und g obere und untere Grenze in ei Intervall Δy für dasselbe x, also Funktionen von x sind. Diese Relation bleibt bestehen, wenn im mittleren Gliede die Gröfsen Δy beliebig verkleinern, dagegen in den äufseren Gliedern die und dementsprechend auch G und g beibehalten. Der Grenzwert, welchem sich $\Sigma f(x, y)\Delta y$ beliebiger Verkleinerung von Δy nähert, mag derselbe ein bestimmter sein oder zwischen endlic Grenzen schwanken, werde mit

$$\int_\alpha^\beta f(x, y)dy$$

bezeichnet; er liegt jedenfalls zwischen den einmal fixierten Grenzen. Es ist also

(b) $$\Sigma g\Delta y \leqq \int_\alpha^\beta f(x, y)dy \leqq \Sigma G\Delta y.$$

Die beiden Grenzen können durch Verkleinerung von Δy einander bis zu einem gewissen Absta genähert werden, den wir mit U_x bezeichnen, um seine Abhängigkeit von x zu markieren. $U_x = 0$, so existiert das Integral für diesen Wert von x, andernfalls ist es unbestimmt und U_x Differenz seiner Unbestimmtheitsgrenzen. Es läfst sich nun zeigen**), *dafs die Stellen, an welc die Differenzen der Unbestimmtheitsgrenzen des Integrals*

$$\int_\alpha^\beta dy f(x, y)$$

gröfser sind, als eine beliebig kleine Zahl, eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden.

Wäre dieses nicht der Fall, so könnte $\Sigma U_x\Delta x$ nicht beliebig klein gemacht werden. D könnte aber auch

$$\Sigma\Delta x\Sigma(G - g)\Delta y$$

nicht beliebig klein werden; denn es ist

$$\Sigma(G - g)\Delta y \geqq U_x.$$

Auch folgt aus der Voraussetzung, dafs

$$\Sigma\Delta x\Sigma\Delta y(G - g)$$

durch Wahl einer oberen Grenze für sämtliche Δx und Δy beliebig klein gemacht werden kann,

$$\Sigma\Delta y(G - g)$$

nur für eine diskrete Mannigfaltigkeit von Punkten x gröfser bleiben kann, als eine beliebig kl Zahl, dafs also, weil aus (a) und (b) folgt:

---

*) Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung II., S. 282.
**) Math. Ann. Bd. 26, S. 568.

$$\text{abs}\left[\Sigma\Delta y f(x,y) - \int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right] \leqq \Sigma\Delta y\,(G-g),$$

Produktensumme im allgemeinen gleichmäfsig nach dem bestimmten Integral konvergiert. — Aus (c) folgt nun weiter

$$\text{abs}\left[\Sigma\Delta x\Sigma f(x,y)\Delta y - \Sigma\Delta x\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy\right] \leqq \Sigma\Delta x\,\Sigma\Delta y(G-g).$$

rechte Seite kann aber der Voraussetzung nach kleiner gemacht werden, als eine beliebig kleine ε; also kann auch für hinlänglich kleine Δx und Δy

$$\text{abs}\left[\Sigma\Delta x\Sigma f(x,y)\Delta y - \Sigma\Delta x\int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right] < \varepsilon$$

nicht werden. Läfst man hierin Δx und Δy gegen 0 konvergieren, so ergiebt sich:

$$\lim \Sigma\Delta x\,\Sigma f(x,y)\Delta y = \lim \Sigma\Delta x\int_\alpha^\beta f(x,y)dy,$$

$$J = \int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x,y)dy.$$

Während also, die Existenz des Doppelintegrals vorausgesetzt, das Integral nach y für endlich viele Punkte unbestimmt sein konnte, ist dann

$$\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x,y)dy$$

bestimmt und gleich dem Werte des Doppelintegrals. Natürlich durften die Integrationen auch in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt werden. —

§ 6. Unendliche Grenzen beim zweifachen Integral.

Es werde angenommen, dafs in dem von den Geraden $x=a$, $x=X$, $y=\alpha$, $y=\beta$ gebildeten Quadrat die Funktion $f(x,y)$ endlich sei und dafs man setzen dürfe:

$$\int_a^X dx\int_\alpha^\beta dy f(x,y) = \int_\alpha^\beta dy\int_a^X dx f(x,y);$$

es möge diese Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Integrationen bestehen bleiben, wie grofs auch die obere Grenze $X > a$ genommen werde. Hiermit ist gleichzeitig gesagt, dafs $\int_a^X dx f(x,y)$ nach y und $\int_\alpha^\beta dy f(x,y)$ nach x zwischen den angegebenen Grenzen integrierbar sei. Es handelt sich um die Aufstellung von Bedingungen, unter welchen man auch berechtigt ist, zu setzen:

$$\int_a^\infty dx\int_\alpha^\beta dy f(x,y) = \int_\alpha^\beta dy\int_a^\infty dx f(x,y).$$

Jedenfalls darf man auf Grund der bereits gemachten Voraussetzung die Gleichung bilden:

$$\lim_{X=+\infty} \int_\alpha^X dx \int_\alpha^\beta dy f(x,y) = \lim_{X=+\infty} \int_\alpha^\beta dy \int_\alpha^X dx f(x,y),$$

wenn sich überhaupt ein bestimmter Grenzwert ergiebt. Damit man den limes rechter Hand dad bilden könne, dafs man den limes der Funktion unter dem Integralzeichen nimmt, ist zuvörderst Voraussetzung notwendig, dafs

$$\int_\alpha^\infty dx f(x,y)$$

eine nach y zwischen den Grenzen α und β integrierbare Funktion sei, womit nicht gesagt ist, das genannte Integral für *jeden* Wert von y in dem Intervall $\alpha \leq y \leq \beta$ als bestimmter existieren müsse (vgl. die beiden vorhergehenden Paragraphen). Ferner aber werden wir, um un Satz anwenden zu können, annehmen müssen, dafs

$$\int_\alpha^X dx f(x,y)$$

für beliebig grofse X endlich sei und für das Intervall $\alpha \leq y \leq \beta$ im allgemeinen gleichmäfsig g

$$\int_\alpha^\infty dx f(x,y)$$

konvergiere. Hat man aber diese Annahmen gemacht, so ist dadurch die Existenz des limes rec Hand, — also auch des limes linker Hand — festgestellt und zugleich bewiesen, dafs man selben durch den entsprechenden Grenzübergang unter dem Integralzeichen bilden kann. Wir kö dann also beiderseits $X = \infty$ setzen und erhalten den Satz*):

Wenn in dem von den Geraden $x = a$, $x = X$ (wo X irgend ein endlicher Wert $>$ $y = \alpha$, $y = \beta$ gebildeten Rechteck die Funktion $f(x,y)$ endlich ist und die Vertauschung der Reihen der Integrationen gestattet, wenn ferner das Integral $\int_a^X dx f(x,y)$ für beliebig grofse X durchweg en bleibt und im allgemeinen gleichmäfsig für $\alpha \leq y \leq \beta$ gegen das Integral $\int_a^\infty dx f(x,y)$ konvergiert, endlich dies letztere Integral als Funktion von y in dem genannten Intervall integrierbar ist, so exi auch $\int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta dy f(x,y)$ und es ist:

$$\int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta dy f(x,y) = \int_\alpha^\beta dy \int_a^\infty dx f(x,y).$$

Man wird sich nun naturgemäfs die weitere Frage vorlegen, unter welchen Bedingung gestattet ist, auch die obere Grenze β beiderseits durch ∞ zu ersetzen. Hierfür ist der Satz dieser Abhandlung) mafsgebend, welcher Bedingungen angiebt, unter welchen man mit dem Zeh limes unter das Integralzeichen gehen kann, wenn eine Grenze ∞ ist. Ersetzt man die Grenze β durch Y, so möge zunächst vorausgesetzt werden, dafs für jedes beliebige $Y >$ Gleichung gelte

*) Vgl. Stolz, Math. Ann. Bd. 26, S. 89.

$$\int_\alpha^\infty dx \int_\alpha^Y dy f(x,y) = \int_\alpha^Y dy \int_a^\infty dx f(x,y),$$

r in dem obigen Satze, in welchem β durch Y zu ersetzen ist, hinreichende Bedingungen an-ben sind. Es handelt sich nun weiter darum, Bedingungen anzugeben, unter welchen

$$\lim_{Y=+\infty} \int_a^\infty dx \int_\alpha^Y dy f(x,y) = \int_a^\infty dx \lim_{Y=+\infty} \int_\alpha^Y dy f(x,y).$$

r denselben ist dann auch mit Zuhilfenahme der Gleichung (a)

$$\int_\alpha^\infty dy \int_a^\infty dx f(x,y) = \int_a^\infty dx \int_\alpha^\infty dy f(x,y).$$

: Satz setzt zuerst voraus, dafs für jedes $X > a$ die Vertauschung von lim und $\int$ vollzogen en darf, d. h. dafs für jedes $X > a$:

$$\lim_{Y=+\infty} \int_a^X dx \int_\alpha^Y dy f(x,y) = \int_a^X dx \lim_{Y=+\infty} \int_\alpha^Y dy f(x,y) = \int_a^X dx \int_\alpha^\infty dy f(x,y).$$

a) ist bereits angenommen (vgl. den vorigen Satz), dafs für jedes $X > a$ und $Y > \alpha$ die Reihen-der Integrationen vertauscht werden darf, dafs also

$$\int_a^X dx \int_\alpha^Y dy f(x,y) = \int_\alpha^Y dy \int_a^X dx f(x,y);$$

kann die letzte Gleichung auch so geschrieben werden:

$$\int_\alpha^\infty dy \int_a^X dx f(x,y) = \int_a^X dx \int_\alpha^\infty dy f(x,y).$$

Gleichung korrespondiert mit der Gleichung (a), und es gelten für dieselbe also auch die in obigen Satz aufgestellten Bedingungen, in denen nur x und y ihre Rolle vertauschen.

Weiter setzt jener Satz voraus, dafs

$$\int_u^\infty dx \int_\alpha^Y dy f(x,y)$$

m $u = +\infty$ gleichmäfsig für alle Y, welche gröfser sind, als eine bestimmte Zahl, gegen Null rgiert. Endlich ist noch vorauszusetzen, dafs

$$\int_a^\infty dx \int_\alpha^\infty dy f(x,y)$$

ert.

Sammelt man die nach einander gemachten Voraussetzungen (a), (b), (c), (d), so ergiebt sich atz:

Wenn in dem von den Geraden $x = a$, $x = X$, $y = \alpha$, $y = Y$ gebildeten Rechteck, wo $X > a$, irgend welche endliche Werte seien, die Funktion $f(x,y)$ endlich ist und die Vertauschung der folge der Integrationen gestattet, wenn das Integral $\int_a^X dx f(x,y)$ für beliebig grofse X durchweg bleibt und im allgemeinen gleichmäfsig für $\alpha \leqq y \leqq Y$ gegen das Integral $\int_a^\infty dx f(x,y)$ konvergiert,

wenn ebenso das Integral $\int_\alpha^Y dy f(x,y)$ *für beliebig groſse* Y *durchweg endlich bleibt und im allgem*

gleichmäſsig für $a \leqq x \leqq X$ *gegen das Integral* $\int_\alpha^\infty dy f(x,y)$ *konvergiert, wenn* $\int_a^\infty dx f(x,y)$ *als Fu*

von y *in dem Intervall von* α *bis* Y *integrierbar ist, desgleichen* $\int_\alpha^\infty dy f(x,y)$ *als Funktion von* x *i*

Intervall a *bis* X, *wenn ferner* $\int_u^\infty dx \int_\alpha^Y f(x,y)$ *bei* $\lim u = +\infty$ *gleichmäſsig für alle* Y, *die g*

sind, als eine bestimmte endliche Zahl, gegen 0 *konvergiert und* $\int_a^\infty dx \int_\alpha^\infty dy f(x,y)$ *existiert, so ex*

auch $\int_\alpha^\infty dy \int_a^\infty dx f(x,y)$ *und es ist:*

(e)
$$\int_a^\infty dx \int_\alpha^\infty dy f(x,y) = \int_\alpha^\infty dy \int_a^\infty dx f(x,y).$$

Dies sind freilich recht viele Bedingungen, welche zu erfüllen sind, indessen es ist z merken, daſs gewisse derselben sich eigentlich von selbst verstehen, da andernfalls die Behau keinen Sinn hätte. So ist es vor jeder Untersuchung über die Giltigkeit der Gleichung (e) daſs man anzunehmen hat, daſs die inneren Integrale bis zu beliebig groſsen, aber endlichen, o Grenzen integrierbar seien, dies muſs der Fall sein, damit der in der Integration bis ∞ lie Grenzübergang beiderseits an einem bestimmten Ausdruck vollzogen werde. Ebenso wird ma Bestehen der Gleichung

$$\int_a^X dx \int_\alpha^Y dy f(x,y) = \int_\alpha^Y dy \int_a^X dx f(x,y)$$

für jedes endliche $X > a$ und $Y > \alpha$ von vornherein annehmen. Die Bedingungen, welche noch übrig bleiben, sind zum Teil nicht symmetrisch in Bezug auf die beiden Integrationsvari Da der Satz nicht umkehrbar ist, werden diese Bedingungen für die eine Variable erfüllt sein k ohne daſs sie für die andere erfüllt sind. —

Macht man die entsprechenden Annahmen für eine Grenze $-\infty$, so erhält man durc sammenfassung und durch Addition der Integrale Sätze über die Giltigkeit der Gleichungen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_\alpha^{+\infty} dy f(x,y) = \int_\alpha^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x,y),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x,y).$$

In der Theorie der Fourier'schen Integralformel handelt es sich um folgende Gleichun

$$\int_0^q dq \int_a^\infty dx f(x) \cos q(x - x_1) = \lim_{X=+\infty} \int_0^q dq \int_a^X dx f(x) \cos q(x - x_1).$$

*) Vgl. C. Neumann: Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunktionen fortschreitenden Entwic (Leipzig 1881), pag. 54—70; ferner Serret-Harnack, Lehrbuch II, pag. 375.

die Giltigkeit derselben lassen sich gewisse hinreichende Bedingungen angeben. In dem von nack seiner Bearbeitung des Serret'schen Lehrbuchs hinzugefügten Abrifs finden sich folgende drei:

Erstens: Wenn $f(x)$ bei beliebig wachsenden Werten von x schliefslich keine Oscillationen ır macht, sondern von einem bestimmten Werte für x an entweder beständig wachsend oder beıdig abnehmend für $x = \infty$ *nach Null* konvergiert und dabei integrierbar ist;

Zweitens: Wenn $f(x)$ zwar für $x = \infty$ unendlich viele Maxima und Minima hat, dabei aber olut integrierbar ist;

Drittens: Wenn $f(x)$ eine stetige Funktion ist, die für $x = \infty$ nach Null konvergiert und en Ableitung absolut integrierbar ist. —

Ohne hierauf einzugehen, knüpfe ich nur hieran die Bemerkung, dafs der Stolz'sche Satz th. Ann. Bd. 26, S. 89 und diese Abhdlg. S. 24) in den beiden ersten Fällen direkt anwendbar weil das Integral

$$\int_a^X f(x) \cos q(x - x_1) dx$$

alle q zwischen 0 und einem bestimmten Werte gleichmäfsig gegen

$$\int_a^\infty f(x) \cos q(x - x_1) dx$$

vergiert. Anders im dritten Falle, in welchem die gleichmäfsige Konvergenz nur bis in beliebige e von $q = 0$ stattfindet, so dafs es einer direkten Untersuchung bedarf, wegen deren ich auf Serret-Harnack'sche Werk verweise. —

Programm

des

herzoglichen Realgymnasiums

zu

Saalfeld

für die Zeit

von Ostern 1883 bis Ostern 1884,

wodurch zu der öffentlichen Feier

des Höchsten Geburtsfestes Sr. Hoheit des Herzogs Georg,

welche am

Mittwoch, den 2. April, vormittags 11 Uhr,

im Saale der „Erholung" stattfindet,

sowie zur

öffentlichen Prüfung

am 31. März und 1. April

im Zeichensaale des Schulhauses

ehrerbietigst einladet

der Direktor

Prof. Dr. **Pinzger.**

Inhalt: **Exposé des principes du Calcul différentiel et intégral** von Prof. Höfrich.
Schulnachrichten vom Direktor.

Saalfeld, 1884.

Wiedemannsche Hofbuchdruckerei.

Progr. Nr. 641.

Exposé des principes du Calcul différentiel et intégral.

On peut dire avec fondement que le Calcul différentiel et intégral, ou bien le Calcul finitésimal (à cause de la notion d'infiniment petit) est la plus belle, la plus imposante des iences mathématiques, remarquable par sa merveilleuse fécondité et ses applications si variées si étendues. Cette science étant aussi hérissée de difficultés et de subtilités qui en rendent tude difficile aux étudiants, je pense n'avoir pas besoin d'excuse quand je me propose exposer ici d'une manière claire, simple et logique les principes de cette branche des mathématiques, et de donner plus de précision et d'exactitude à quelques notions essentielles que cela se fait ordinairement.

Avant de commencer l'étude du calcul infinitésimal, je juge indispensable de donner la finition de certains termes que l'on rencontre à chaque pas.

1. On appelle, en général, quantité variable une quantité qui est de nature à pouvoir endre successivement une infinité de valeurs différentes. Au contraire, on donne le nom de nstantes à ces quantités qui ont des valeurs déterminées pour chaque cas particulier. On signe les variables par les dernières lettres de l'alphabet, tandis que l'on réserve les premières tres aux constantes, qui peuvent avoir même des valeurs numériquement déterminées. Les tres a, b, $c \ldots x$, y, z expriment des nombres abstraits, ou des grandeurs concrètes; dans ce rnier cas il faut qu'on substitue à ces grandeurs, en les soumettant au calcul, les rapports elles ont avec des grandeurs de même espèce, prises pour unité.

2. On peut poser en fait que toute grandeur finie, quelle que soit sa valeur, peut être gmentée sans cesse, sans jamais arriver à un état que l'on ne puisse concevoir susceptible me augmentation ultérieure. Il s'ensuit qu'en mathématiques on ne doit pas identifier une antité infinie à une valeur maximum qui termine le territoire des grandeurs. Donc on peut étendre qu'une grandeur infiniment grande est celle dont la valeur absolue est comprise dans e augmentation illimitée. Or, il est clair que, le symbole ∞ désignant une quantité infiniment nde et a une grandeur finie quelconque, l'équation $\infty \pm a = \infty$ est rigoureusement exacte, isqu'il n'a plus de sens de vouloir augmenter ou diminuer d'une grandeur finie une grandeur e l'on conçoit se trouver dans une croissance au delà de toute limite. De plus, il est manifeste: 1 que la somme de deux quantités infinies reproduit une quantité infinie; 2° que la différence deux quantités infinies donne pour résultat encore une grandeur de même espèce, ou bien ro, supposé que leurs valeurs soient tout à fait égales. On conçoit aisément que l'on peut ssi soumettre des grandeurs infinies aux opérations de la multiplication et de la division. Si n multiplie une quantité infinie par une autre, il faut envisager le produit comme une quantité

infinie du second ordre. Les conséquences de cette manière de voir sont évidentes par elles mêmes. Puisque le mode de génération des grandeurs infinies ($\infty = ax$, x désignant une variable comprise dans une augmentation sans fin) est infiniment varié, il faut que la division d'une grandeur infinie par une autre ait tout rapport imaginable. Figurons-nous, par exemple, deux aires infinies comprises chacune entre deux parallèles prolongées à l'infini des deux côtés; alors il est vrai de dire, à la rigueur, que le rapport de ces deux aires est exprimé par $\frac{a}{b}$, a et b désignant les distances respectives des parallèles —. Il ne sera pas mal à propos d'ajouter ici une remarque sur la véritable valeur de tang 90^0. Les mathématiques élémentaires font voir: 1^0 que les valeurs successives et positives des tangentes d'un angle aigu variable x vont en croissant avec x, et qu'elles finissent par dépasser tout nombre fini, si grand qu'il soit; 2^0 que les valeurs négatives des tangentes d'un angle obtus variable vont en croissant pour des valeurs décroissantes de cette variable et qu'elles aussi finissent par croître au-dessus de tout nombre donné. Il résulte de là qu'il est peu exact de poser tang $90^0 = \pm \infty$ (au lieu de $\pm \frac{1}{0}$) comme on a coutume de le faire. De ce qui précède, il faut nécessairement tirer la conclusion que tang 90^0 n'est plus une grandeur, mais la limite de deux territoires de quantités opposées de signes. Conséquemment on n'est pas non plus fondé à regarder le symbole $\frac{a}{o}$ comme une quantité infiniment grande.

3. Après avoir fixé la notion d'une quantité infiniment grande, on n'éprouvera nulle difficulté à démêler l'acception du terme d'infiniment petit. On saisira bien le caractère des infiniment petits ou grandeurs infinitésimales en disant que ce sont des grandeurs dont la valeur absolue est comprise dans une diminution sans fin. Il suit de là qu'elles convergent vers zéro sans jamais l'atteindre. On nomme communément grandeur infinitésimale une grandeur qui tombe au-dessous de toute grandeur donnée, quelque petite qu'on la conçoive; ou bien, une grandeur qui disparaît; dans ce dernier cas il faut pourtant prendre garde de confondre la grandeur qui disparaît avec une grandeur qui a disparu, comme il est arrivé quelquefois. Sous le rapport logique, la définition qu'on a donnée ci-dessus de l'infiniment petit, a décidément l'avantage sur ces deux dernières. Pour représenter le mode de génération des quantités infiniment petites $\left(\frac{a}{\infty}, \frac{b}{\infty}\right)$, on peut se servir d'expressions telles que $\frac{a}{x}, \frac{b}{y} \ldots, x, y \ldots$ désignant des quantités qui croissent au delà de toute grandeur finie. On comprendra facilement que l'équation $a + \frac{b}{\infty} =$ ou $a + \frac{b}{x} =$ est rigoureusement exacte quand il s'agit d'indiquer la valeur finie de $a + \frac{b}{\infty}$, quoiqu'il faille se mettre que a, augmenté ou diminué d'un infiniment petit, est certainement autre chose que seul. En ce sens on est parfaitement en droit de dire que, dans une addition ou une soustraction, les infiments petits disparaissent vis-à-vis d'une grandeur finie. Examinons maintenant les autres propositions que l'on peut énoncer sur les grandeurs infinitésimales. Puisque $a = x \cdot \frac{a}{x}$, $b = y \cdot \frac{b}{y} \ldots$, il est manifeste que toute grandeur finie peut être considérée comme une somme infiniment grande de parties infiniment petites et égales. Ainsi, pour remonter des parties infiniment petites d'une grandeur à cette grandeur même, il ne suffit pas d'en prendre un nombre fini, si grand qu'on le conçoive; c'est seulement par la réunion d'une infinité de parties qu'on y parviendra. Les observations que nous venons de rattacher à

rmule $a = x \cdot \frac{a}{x}$ sont de même applicables à $\frac{a}{x} = x \cdot \frac{a}{x^2}$, $\frac{a}{x^2} = x \cdot \frac{a}{x^3}$ et ainsi de ite. Nous voyons par là qu'il faut faire la distinction d'infiniment petits de divers ordres. n ne s'appuyant que sur l'équation $a + \frac{b}{\infty} = a$, on démontrera sans peine que les infiniment tits d'ordre supérieur sont destinés à disparaître vis-à-vis d'infiniment petits d'ordre inférieur. ien ne nous empêche, pour le dire en passant, de soumettre les grandeurs infinitésimales au isonnement et au calcul: les rapports d'infiniment petits d'un même ordre présentent un sens n nette. Un exemple suffira pour fixer les idées sur les grandeurs infinitésimales des trois emiers ordres: quand un solide a ses trois dimensions infiniment petites, son volume sera un iniment petit du troisième ordre: ce volume sera un infiniment petit du second ou du premier dre, selon que le solide a deux dimensions ou bien une seule infiniment petites —.

4. Nous avons donné plus haut (n^0 1er) la définition des quantités variables. Il nous it ajouter ici l'observation qu'on les appelle variables continues quand, en passant d'une valeur elle à une autre valeur réelle, elles parcourent successivement toutes les valeurs intermédiaires. après cette manière de voir il est impossible de concevoir entre deux états consécutifs de andeur un troisième qui les sépare. Les variables qui ne jouissent pas de la propriété de ntinuité dans leurs variations, sont dites discontinues. On comprend facilement qu'il faut ncevoir aussi un nombre variable de nature à parcourir successivement et sans discontinuité nsemble des nombres réels imaginables, car sans cela on ne pourrait faire l'application de rithmétique aux grandeurs continues de l'espace et du temps.

5. Toute expression analytique qui renferme une variable continue, est appelée fonction cette variable. Les variations d'une fonction d'une variable étant toujours sous la dépendance celles de cette dernière, qui est entièrement indépendante, on est amené à distinguer des iables indépendantes et des variables dépendantes. D'après la definition ci-dessus les pressions mathématiques

$$ax + b,\ \sqrt{4 - x^2},\ \sqrt{px},\ \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right),\ a^x,\ \log x,\ \sin x,\ \text{etc.}$$

t des fonctions de x. Dans la composition d'une fonction entrent ordinairement des con- ntes, comme les exemples cités le font voir. Pour indiquer que y est une fonction de x, on ploie simplement des symboles tels que

$$y = F(x),\ y = f(x),\ y = \varphi(x),\ y = \psi(x) \ldots,$$

lettres $F, f, \varphi, \psi \ldots$ désignant non des grandeurs, mais des indices d'opérations arith- tiques. En se servant de lettres différentes, on donne à entendre par là que les fonctions question sont d'une nature différente; au contraire, on désigne par la même lettre deux ctions qui ne diffèrent qu'en ce qu'il y a permutation des variables indépendantes x et y. nsi, si l'on écrivait $\sqrt{a^2 - x^2} = f(x)$, il faudrait représenter la fonction $\sqrt{a^2 - y^2}$ par la me lettre, partant $\sqrt{a^2 - y^2} = f(y)$. —

6. On distingue les fonctions en fonctions algébriques et en fonctions transcendantes. e fonction est dite algébrique quand la variable indépendante qui y figure n'est soumis qu'aux érations fondamentales de l'arithmétique, ou enfin quand cette variable est la base de puis- ces à exposants de valeurs déterminées, par exemple $y = x^n$, $y = \sqrt[3]{ax^2 + bx + c}$. Les ctions qui n'appartiennent pas à cette catégorie sont appelées transcendantes, par exemple $\log x$, $\sin x$, arc $\sin x$. Nous passerons sous silence les autres espèces de fonctions que l'on outume de distinguer, leurs diverses dénominations étant faciles à expliquer.

7. Une équation indéterminée étant donnée entre les variables x et y, on est libre, da un sens purement analytique, de prendre arbitrairement x ou y pour variable indépendan puisqu'on peut concevoir l'équation résolue tant par rapport à y que par rapport à x. M cet arbitraire cesse de subsister, quand on se trouve en présence de problèmes spéciaux où se présente deux grandeurs variables manifestement liées entre elles par une loi inconnue qu s'agit de découvrir. Alors on est contraint d'envisager les variations de l'une des variabl comme subordonnées à celles de l'autre variable, et le choix de la variable indépendante prescrit par la nature des choses. Par la suite nous choisirons x pour variable indépendan

8. Nous avons considéré jusqu'ici les fonctions d'une seule variable. Cependant il arri assez fréquemment qu'une grandeur variable dépend simultanément de plusieurs autres variabl censées être indépendantes. On exprime cette dépendance brièvement par des notations telles q

$$z = F(x, y),\ z = f(x, y),\ z = \varphi(x, y) \ldots,\ y = F(u, v, w) \text{ etc.}$$

9. Nous ferons remarquer que l'on considère naturellement les variables indépendan comme continues. Pour constater que des fonctions proposées sont ou ne sont pas continu il faut les discuter au moyen du calcul.

Examinons quelques fonctions sous ce rapport.

1°
$$y = \sqrt{(x - 1) \cdot (x - 3)}\ .$$

On voit d'un coup d'oeil que la fonction y devient imaginaire pour $1 < x < 3$; elle éprouv donc une solution de continuité pour toutes les valeurs de x renfermées dans l'intervalle indiq

2°
$$y = \frac{a}{x - b}\ .$$

Cette fonction reste continue pour toutes les valeurs de x qui sont plus grandes ou plus peti que la valeur b; pour $x = b$, on obtient pour y l'expression $\frac{a}{o}$, qui n'est plus une grande comme nous l'avons démontré ci-dessus; pour les valeurs de x qui précèdent et qui suiv immédiatement la valeur b, y devient $+\infty$ ou $-\infty$, partant la fonction passe brusquem de l'infini positif à l'infini négatif.

3°
$$y = (-a)^x,$$

a désignant un nombre fixe et positif. On reconnaîtra facilement que cette fonction ne joi pas du tout de la propriété de continuité. Les fonctions que l'on soumet au calcul infinitésim sont du nombre de celles qui restent continues dans toute l'étendue de leur cours, ou au mo entre certaines limites qu'il importe de déterminer exactement.

10. Afin de rendre sensibles et de mettre, pour ainsi dire, en relief tous les détails ce peut offrir le cours d'une fonction censée être continue et ne dépendre que d'une seule variab on a conçu l'idée ingénieuse bien que naturelle de recourir à la représentation graphiq Nous ne croyons pas inutile d'indiquer la marche à suivre à cet égard. — On fixe la posit d'un point P, par exemple, sur un plan au moyen des distances PQ, PR de ce point à de droites rectangulaires XX^1, YY^1 qui se coupent sur ce plan au point O, et qui sont d'u longueur indéfinie. On donne le nom d'axes à ces droites fixes. La distance PR ou son égle OQ s'appelle l'abscisse du point P, et la distance PQ est dite l'ordonnée du même point. n comprend l'abscisse et l'ordonnée sous la dénomination commune de coordonnées. Pour écar toute indétermination, supposons positives les abscisses prises sur OX à partir du point O, et négatives celles qui s'étendent, sur OX^1, dans un sens opposé; regardons, de plus, comme positives les ordonnées au-dessus de l'axe des x dans les espaces angulaires XOY ou X^1O

comme négatives celles qui sont situées au-dessous. Or les coordonnées d'un point quelconque nt données dans un tel système d'axes rectangulaires, la position en sera parfaitement fixée. n considérant maintenant, dans un système de coordonnées rectangulaires ou orthogonales, les ux variables x et y de toute équation indéterminée comme les coordonnées d'un point variable, variable continue x étant l'abscisse et la fonction y qui en dépend l'ordonnée, il est évident e, lorsqu'on fait varier x d'une valeur réelle à une autre valeur réelle, les valeurs correspon- ntes de y, tirées de l'équation même, détermineront une succession de points. Si la fonction uit continue, ces points viendraient se grouper de façon à former un continu; en d'autres mes, ils formeraient une ligne droite, ou une courbe. L'image géométrique d'une fonction continue est représentée par des courbes séparées; il peut même arriver, comme le fait voir discussion de la fonction $y = (-a)^x$, dont il a été question plus haut, qu'à une fonction correspondent, comme signe graphique, que des points isolés. Il faut avouer que la représen- ion géométrique de fonctions connues d'une seule variable, réputées continues entre certaines ites, fournit un moyen précieux d'embrasser d'un coup d'oeil la marche et les propriétés lividuelles de ces fonctions. On se sert encore avec avantage du tracé géométrique pour s fonctions que l'on ne sait pas définir mathématiquement, et que l'on nomme empiriques. ns ces cas, il est indispensable que l'on ait des tableaux où se trouvent dressées, telles qu'on a évaluées moyennant des observations exactes, les valeurs numériques, assez nombreuses assez voisines les unes des autres, de deux variables dont l'une est manifestement sous la pendance de l'autre. A l'aide de ces données, on construira des points isolés, dont la position pective fera sentir celle des points intermédiaires. Il est clair qu'on suppose ici continues pareilles fonctions dont la loi analytique est inconnue. Quant aux fonctions continues de ux variables, on peut leur supposer également une signification géométrique: on est toujours torisé à considérer la fonction continue $z = f(x, y)$ comme l'ordonnée d'une surface courbe portée à trois axes rectangulaires. Les fonctions de plus de deux variables ne permettent ts d'être interprétées par voie graphique, l'espace n'ayant que trois dimensions.

11. Si $y = f(x)$ est une fonction continue de x, on peut poser la question quelle est variation élémentaire que la fonction subit, quand x passe d'une valeur quelconque à celle la suit immédiatement ou qui en est la plus proche. La solution générale de cette question, est des plus importantes, est indiquée par l'équation

$$dy \text{ ou } d \,.\, f(x) = f(x + dx) - f(x),$$

et dy ou $d \,.\, f(x)$ désignant les variations élémentaires respectives des deux variables: la re d est donc un simple symbole ou un indice d'opération, mais non pas une grandeur. Ces iations ou incréments élémentaires des deux variables sont dites leurs différentielles. pération par laquelle on passe d'une fonction à sa différentielle, s'appelle différentiation. donne le nom de calcul différentiel au corps de doctrine qui a pour objet la différentiation fonctions. — Si l'on divise par dx l'équation ci-dessus, qui est le fondement du calcul érentiel, il vient

$$\frac{dy}{dx} \text{ ou } \frac{d \,.\, f(x)}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

On nomme le rapport $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{d \,.\, f(x)}{dx}$ le coefficient différentiel de la fonction y. Pour déterminer pour chaque cas particulier, il faut développer le second membre de l'équation en rappelant surtout qu'une puissance supérieure de l'élément différentiel dx doit s'évanouir ément vis-à-vis d'une puissance inférieure de ce même élément.

Afin de fixer les idées à cet égard, prenons deux exemples

1^0 $$y = ax + b.$$

Puisque $y + dy = a\,(x + dx) + b,$

il viendra $$\frac{dy}{dx} = a.$$

2^0 $$y = ax^2 + bx + c.$$

En soustrayant cette équation de

$$y + dy = a\,(x + dx)^2 + b\,(x + dx) + c,$$

on aura simplement

$$\frac{dy}{dx} = 2\,ax + b.$$

En examinant ces deux exemples, on est amené à reconnaître

1^0 que le coefficient différentiel de la fonction $y = ax + b$, que l'on peut considé comme l'ordonnée d'une ligne droite, a une valeur constante, quelles que soient les valeurs de

2^0 que le coefficient différentiel de toute fonction $y = f(x)$ d'une nature différente une fonction de x, que l'on désigne par $f'(x)$; elle est nommée la fonction dérivée de fonction primitive $f(x)$. —

12. Outre la méthode dite infinitésimale que nous avons esquissée au numéro précéde on a imaginé une autre pour déterminer le coefficient différentiel d'une fonction; c'est la métho des limites, qui est actuellement en vogue. Nous en ferons ressortir l'essence, en repren la fonction

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Quand on fait croître subitement la variable indépendante x d'une quantité finie $\triangle x$, fonction y éprouvera également une variation finie $\triangle y$. En conséquence, on aura

$$y + \triangle y = a\,.\,(x + \triangle x)^2 + b\,.\,(x + \triangle x) + c.$$

En soustrayant l'état inital de grandeur de la fonction du nouvel état, il viendra

$$\triangle y = (2\,ax + b)\,\triangle x + a\,\triangle x^2$$

$$\text{ou } \frac{\triangle y}{\triangle x} = 2ax + b + a\,\triangle x.$$

Si l'on fait converger $\triangle x$ vers zéro, le terme $a\,\triangle x$ diminuera en même temps indéfi ment et s'évanouira à la limite; donc il viendra

$$\text{lim. } \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{0}{0} = 2\,ax + b,$$

$$\text{ou, en posant lim. } \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b.$$

On ne peut disconvenir que cette méthode ne conduise toujours à des résultats exa cependant elle n'est pas tout à fait exempte d'objection. Quand on passe à la limite, il plus de sens de substituer à lim. $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ le quotient $\frac{dy}{dx}$, puisque les deux différentielles seran alors égales à zéro. Si l'on supposait la limite être dx au lieu de zéro, on retomberait su la méthode infinitésimale par un chemin détourné. En somme, la méthode des limites ne satisf pas pleinement aux exigences de la logique. Au contraire, la méthode infinitésimale peut pro quer la critique la plus sévère. Elle est, en outre, l'expression naturelle de la manière don se

)duisent les quantités continues du temps et de l'espace, qui toutes peuvent être conçues en-ndrées par des accroissements élémentaires. Voilà la raison de la merveilleuse fécondité de :te méthode.

13. Nous entrerons maintenant dans quelques détails sur l'essence des différentielles. rsqu'on fait croître d'une manière continue l'abscisse d'une courbe plane quelconque dont la ction continue $y = f(x)$ représente l'ordonnée, de sorte qu'elle passe d'une valeur finie une autre valeur finie, elle parcourra successivement une infinité d'états de grandeur. La 'érence de n'importe quels deux états consécutifs est ce que nous appelons la différentielle l'abscisse courante x. Il est manifeste qu'une telle différentielle est une quantité constante ne jouit plus de la propriété de divisibilité, propriété qui appartient à toute grandeur. Les réments successifs que la variable x reçoit dans son mouvement fluent, sont donc des quantités)arfaites, des éléments absolus. Quant aux incréments dy de la fonction $y = f(x)$, ce sont si des éléments, non absolus à la vérité, mais relatifs et d'ailleurs variables. La différence ordonnées correspondant aux abscisses x et $x + dx$ se détermine moyennant l'équation $= f'(x)\,dx$, d'où l'on peut déduire sans aucune difficulté la vérité de l'assertion ci-dessus considérant en même temps qu'en vertu de la loi analytique qui lie les variables x et y entre s, la différentielle dy ne peut être conçue plus petite que l'indique l'équation $dy = f'(x)\,dx$. dans cette équation, $f'(x)$ venait à être une fraction, on serait amené à regarder la multi-ation de la différentielle dx par une fraction comme une opération seulement indiquée, qui rait s'effectuer si dx était encore divisible. — Nous ferons remarquer ici qu'une portion de rbe plane, comprise entre les ordonnées consécutives y et $y + dy$ doit être forcément un nent droit, puisqu'elle n'a pas de point intermédiaire entre ses extrémités.

En se rappelant ce que nous avons dit plus haut sur l'infiniment petit, on n'hésitera pas dmettre que les incréments élémentaires sont plus petits encore que les quantités infiniment ites. Ceci explique l'énoncé, paradoxal en apparence, qu'à côté de l'indivisibilité des éléments peut concevoir la divisibilité infinie des grandeurs. Si donc on tient à faire croître les ndeurs variables avec continuité, il faut leur faire subir des variations élémentaires, et non des variations infiniment petites, comme cela arrive communément.

14. Une fonction continue $y = f(x)$ étant donnée, on peut en tirer avec facilité l'equation $= f(x + dx) - f(x) = f'(x)$. Cette expression du coefficient différentiel fait voir la de la variation continue de y relativement à la variable x, que l'on cense croître uniformément éléments; conséquemment elle doit apprendre l'ensemble des particularités de la marche de fonction. On peut lui donner une signification géométrique: c'est qu'elle est la tangente onométrique de l'angle que la tangente menée par un point (x, y) de la courbe dont l'ordonnée $y = f(x)$, forme avec l'axe des abscisses, du côté des x positifs. Nous ferons remarquer qu'il faut entendre par tangente d'une courbe une ligne droite qui a un élément linéaire de mun avec la courbe. Il va sans dire que la tangente marque la direction de la courbe dans élément tangent. La tangente trigonométrique étant une fonction de x, elle variera d'un nt à l'autre de la courbe; pour chaque valeur déterminée de x, elle aura une valeur fixe. nd la fonction dérivée devient nulle, la tangente géométrique est parallèle à l'axe des x: est perpendiculaire à l'axe des x, quand $f'(x)$ acquiert l'expression $\frac{a}{o}$. Tant que la tangente a courbe forme un angle aigu avec l'axe des x, les ordonnées sont croissantes avec x; au raire, elles sont décroissantes pour des valeurs croissantes de x quand cet angle est obtus. premier cas correspond à une montée, le second à une descente de la courbe. L'ordonnée

*

atteint une valeur maximum ou minimum par la valeur de x pour laquelle $f'(x)$ s'éva
en passant du positif au négatif, ou en passant du négatif au positif. Toutes les fois q
partir d'un point déterminé de la courbe, les différentielles dy sont croissantes avec x, la c
tourne sa convexité en bas; au contraire, quand les différentielles dy sont décroissantes po
valeurs croissantes de x, la courbe tourne sa concavité en bas. La courbe subit une inf
en un point où il y *a* un passage brusque de la convexité à la concavité, ou inversement.

15. La circonstance que l'on est toujours à même de passer d'une fonction à sa fo
dérivée, portera à croire que, réciproquement, on peut remonter d'une fonction dérivée
lorsqu'elle est donnée, à la fonction primitive et inconnue qui a pour dérivée $f'(x)$. Pour
tuer une pareille opération, il ne suffit pas de connaître $f'(x)$, puisque $f(x)$ et $f(x)$
C désignant une constante quelconque, ont pour fonction dérivée la même expression.
déterminer complètement la fonction primitive, il faut en outre qu'on en connaisse la
pour une valeur particulière x_0 de la variable indépendante x; car lorsqu'on fait croî
variable x, dans l'équation

$$dy = d\,.\,f(x) = f(x + dx) - f(x) = f'(x)\,dx,$$

de la valeur déterminée x_0 à la valeur variable x, et que l'on pose $x - x_0 = ndx$, n dés
un nombre plus grand que tout nombre imaginable, les différentielles successives de la fo
$f(x)$ seront

$$\begin{aligned}
f(x_0 + dx) - f(x_0) &= f'(x_0)\,dx,\\
f(x_0 + 2dx) - f(x_0 + dx) &= f'(x_0 + dx)\,dx,\\
f(x_0 + 3dx) - f(x_0 + 2dx) &= f'(x_0 + 2dx)\,dx,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f(x_0 + ndx) - f[x_0 + (n-1)\,dx] &= f'[x_0 + (n-1)\,dx]\,dx.
\end{aligned}$$

En additionnant ces équations membre à membre, on obtient

$$f(x) - f(x_0) = \left\{f'(x_0) + f'(x_0 + dx) + f'(x_0 + 2dx) + \ldots + f'[x_0 + (n-1)\,dx]\right\}$$

En désignant par $\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx$ la somme des termes du second membre de cette éq
il vient

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx.$$

On voit par là que l'on obtient la variation totale d'une fonction inconnue $y =$
lorsqu'on fait croître x de la valeur déterminée x_0 à la valeur variable x, en faisant la
des différentielles successives $dy = f'(x)\,dx$ entre les mêmes limites.

On dit que

$$\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx$$

est l'intégrale de la différentielle $f'(x)\,dx$ entre les limites x, x_0; le symbole $\int$ signifie som

N'ayant pas eu assez de loisir, je n'ai pu achever malgré moi la présente dissertatio

SAALFELD, le 23 mars 1884.

A. HŒSSRICH.

Schulnachrichten.

Abſolvierte Penſen von Oſtern 1883 bis Oſtern 1884.

Prima. Ordinarius: Der Direktor.

Religion: 2 Stunden. Diakonus Scheler.

Kirchengeſchichte von der Reformation an bis auf die neueſte Zeit. Repetition des Katechismus d der Bibelkunde. Lektüre des 1. Corintherbriefes.

Deutſch: 3 St. Der Direktor.

Lektüre: Leſſing: Hamburgiſche Dramaturgie, ausgewählte Abſchnitte; als Einleitung wurde das ben Leſſings in größerer Ausführlichkeit vorangeſchickt. Goethe: Fauſt, 1. Teil mit Auswahl. ſſing: Nathan der Weiſe. — Poetik: Die lyriſchen Dichtungsgattungen. — Proſaiſche Vorträge und ſputationsübungen über geſtellte Themata. — Vierwöchentliche deutſche Aufſätze, 10 an der Zahl, von 3 Klaſſenarbeiten.

Latein: 5 St. Prof. Keller.

Lektüre: Liv. lib. XXII. Cic. Catil. or. I., II., 1—6. Verg. Aen. I., II., 1—401. Gramtik nach Ellendt-Seiffert; Verslehre nach Anhang I. Repetition der geſamten Syntax, insbeſondere deutung der Tempora, Tempora in Nebenſätzen, Modi, der abhängige Konjunktiv, die Konjunktionen, vom Relativum abhängige Konjunktiv, Imperativ, Infinitiv, Frageſätze, Oratio obliqua, Partium; Gerundium und Gerundivum, Supina. Schriftliche darauf bezügliche Uebungen in wöchentlich er Stunde. 8 Exercitien, 11 Extemporalien reſp. Klaſſenarbeiten.

Franzöſiſch: 4 St. Prof. Hößrich.

Lektüre: Histoire de la République d'Angleterre et de Cromwell par Guizot, pag. 1—115; Cid par Corneille, Athalie par Racine. — Grammatik: Wiederholung des ganzen Gebietes und gehende Behandlung einzelner Partien (Gebrauch des Passé défini und des Imparfait; Lehre vom bjonctif; Folge der Zeiten des Subjonctif; Infinitiv ohne und mit Präpoſitionen; Participes; ntax des Artikels). Phraſeologie. Memorieren einzelner Gedichte. — 6 Exercitien, 2 Aufſätze lexandre le Grand, la guerre de Troie), 11 Klaſſenarbeiten.

Englisch: 3 St. Prof. Höfrich.

Lektüre: History of England by Macaulay, pag. 1—240; Macbeth by Shakespeare, pag 1—60. Repetitionen aus der Grammatik und Erweiterungen im Anschlusse an die Lektüre. Phraseologi Memoriren von Gedichten. — 10 Exercitien; 11 Klassenarbeiten.

Mathematik: 5 St. Prof. Höfrich.

Lehre von den Kegelschnitten in synthetischer Behandlung; Differentialrechnung; Reihenentwick lungen; Übungen im Lösen von Konstruktionsaufgaben; Repetition des Klassenpensums. — 8 häuslich und 7 Klassenarbeiten.

Physik: 3 St. Der Direktor.

Optik, gelegentliche Repetitionen einzelner Kapitel der in früheren Klassen behandelten physik lischen Disziplinen. — Vierwöchentliche Arbeiten, 10 an der Zahl, 3 davon Klassenarbeiten.

Chemie: 2 St. Realgymnasiallehrer Dr. Griesmann.

Seltenere Elemente und ihre wichtigsten Verbindungen. Schwierigere stöchiometrische Rechnunge Vierwöchentliche, namentlich häusliche Arbeiten.

Praktische Arbeiten im chem. Laboratorium: 2 St. Derselbe. Vorbereitende Übungen un synthetische Arbeiten mit neueingetretenen, qualitativ analytische Übungen in systematischem Fortschreite mit den geübteren Schülern.

Geschichte: 2 St. Prof. Keller.

Geschichte des Mittelalters und neuere Geschichte. Repetitionen aus dem ganzen Gebiete der Geschicht

Secunda. Ordinarius: Professor Keller.

Religion: 2 St. Diakonus Scheler.

Repetition und Erweiterung der beiden ersten Hauptstücke des lutherischen Katechismus na Dr. Weidemann. Einleitung in die Schriften n. T.'s. Lektüre des Evangeliums St. Lucä. Repetitio früher gelernter Kirchenlieder und Psalmen.

Deutsch: 3 St. Realgymnasiallehrer Heller.

Lektüre: Lessing, Minna v. Barnhelm. Goethe, Götz von Berlichingen. Schiller, Maria Stua Einzelne prosaische Abschnitte von Lessing aus Hopf und Paulsieck, Lesebuch für Secunda. — Biograph Lessing's und Göthe's. — Disponierübungen. — Prosaische Vorträge. — 11 Aufsätze, davon 3 Klassenarbeite

Latein: 5 St. Prof. Keller.

Lektüre: Caesar de bello gallico I., II., de bello civili I. 1—24. Ovid. Metamorphos. 1—7. Grammatik nach Ellendt-Seiffert. Verslehre nach Anhang I. Repetition der Kasuslehre. B deutung und Gebrauch der Tempora und Modi; Konjunktionen; Imperativ; Infinitiv; Accusativ u Nominativ mit dem Infinitiv; Participium; Gerundium und Gerundivum; Supinum. Schriftli darauf bezügliche Übungen in wöchentlich einer Stunde. — 8 Exercitien, 12 Extemporalien re Klassenarbeiten.

Französisch: 4 St. Realgymnasiallehrer Dr. Müller I.

Lektüre: Le verre d'eau par Scribe. — Histoire de Napoléon en 1812 par Ségur (pa 1—80, 149 bis Ende). Grammatik: Repetition der gesamten Formenlehre und Syntax, mit besonde Berücksichtigung der Gallicismen. Übungen im mündlichen Gebrauche der französischen Sprache un Benutzung des Inhalts der Lektüre; Memorieren von Gedichten. — 9 Exercitien, 11 Extemporali

Englisch: 3 St. Prof. Hößrich.

Lektüre: Lord Clive by Macaulay. Grammatik: Gebrauch des Artikels; unregelmäßige Pluralung; sächs. Genetiv; Adjektiva; Pronomina; unregelmäßige Verba; Hilfsverba; Modus des Verbs; tion der Verba; Präpositionen. Phraseologie. Memorieren einiger Gedichte. — 9 Exercitien, Klassenarbeiten.

Mathematik: IIa: 5 St. Prof. Hößrich.

Ebene Trigonometrie; kubische Gleichungen; Übungen im Lösen von Konstruktionsaufgaben; arithische und geometrische Progressionen nebst Anwendung auf Zinseszins- und Rentenrechnung; Synik; Wahrscheinlichkeitsrechnung; Kettenbrüche; Repetition des Klassenpensums. — 9 häusliche und Klassenarbeiten.

Mathematik: IIb: 5 St. Realgymnasiallehrer Bandke:

Geom.: Ebene Trigonometrie. Elemente der neueren Geometrie. Konstruktionsaufgaben.
Arith.: Recipr., diophantische und togarithmische Gleichungen, sowie quadratische mit 2 Unbekannten. thmetische und geometrische Progressionen. — 9 häusliche, 10 Klassenarbeiten.

Physik: 3 St. Der Direktor.

Lehre vom Magnetismus und der Elektrizität. — Vierwöchentliche schriftliche Arbeiten, 10 an der l, davon 3 in der Klasse gefertigt.

Chemie: IIa: 2 St. Realgymnasiallehrer Dr. Griesmann.

Chemische Eigenschaften der wichtigsten Elemente, sowie deren Verbindungen untereinander. — wöchentliche Ausarbeitungen, besonders auch Übungen in leichteren stöchiometrischen Rechnungen.

Naturgeschichte IIb: 2 St. Realgymnasiallehrer Dr. Griesmann.

Im Sommer: Mineralogie: Krystallographie. Steine und Erden. Die wichtigsten Gesteinsarten den den nächstgelegenen Mineralien bei ihrer oryktognostischen Behandlung gleich angeschlossen. ursionen.

Im Winter: Anatomie und Physiologie des menschlichen Körpers. Repetionen aus dem Gebiete Zoologie in monatlich einer Stunde.

Geschichte: 2 St. Realgymnasiallehrer Wehner.

Griechische Geschichte von 338 bis zur Auflösung der aus Alexander's Monarchie hervorgegangenen he. Römische Geschichte bis zum Beginn des Kaiserreichs.

Geographie: 2 St. Im Sommer Realgymnasiallehrer Bandke, im Winter Realgymnasiallehrer Dr. Griesmann.

Im Sommer: Allgemeine Geographie.
Im Winter: Repetition von Asien, Afrika und Amerika in übersichtlich zusammenfassender Form.

Obertertia. Ordinarius: Realgymnasiallehrer Dr. Griesmann.

Religion: 2 St., kombiniert mit IIIb. Diakonus Scheler.

Erklärung des 3.—6. Hauptstückes des lutherischen Katechismus. Memorieren von Sprüchen, enliedern und Psalmen. — Bibelkunde n. T.'s. Lektüre des 2. Teiles der Apostelgeschichte (cp. 9; is Ende).

*

Deutsch: 3 St. Der Direktor.

Lektüre: Hopf und Paulsieck, deutsches Lesebuch, T. II, für Tertia: Goethe: Der Sänger, Erlkönig. Apel: Simonides. Schiller: Der Graf von Habsburg. Herder: Epigramme. Schill Epigramme. Bercht: Preußische Heldenschau. Kinkel: Petrus. Anast. Grün: Zwei Heimgeke Schnezler: Mummelsees Rache. Schiller: Die Glocke; die vier Weltalter; das Siegesfest; die Göt Griechenlands; das Ideal und das Leben; der Spaziergang. Prosaische Abschnitte von Ranke, Fors Mügge und Jacobs aus dem Lesebuch. — Memorieren und deklamieren hervorragender Dichtung Das Allgemeinste über Vers- und Strophenbau; der Hexameter, das Distichon. — Dreiwöchentl deutsche Aufsätze, 13 an der Zahl, davon 4 in der Klasse angefertigt. — Uebungen im Disponieren

Latein: 6 St. Realgymnasiallehrer Heller.

Lektüre: Weller, lat. Lesebuch aus Livius, Abschnitt XVI—XX. Grammatik: Syntaxis c venientiae. Kasuslehre. Orts-, Zeit- und Raumbestimmungen. Verwendung der Modi in Ha sätzen. Gebrauch der Konjunktionen ut, ne, quo, quominus, quin. Fragesätze. Acc. c. inf. ausfü lich (nom. c. inf.), ebenso ablat. absol., d. einfache Form der oratio obliqua (nach Ellendt-Seiff Schulgrammatik). — 11 Exercitien, 17 Extemporalien, schriftl. Übungen im Diarium.

Französisch: 4 St. Realgymnasiallehrer Dr. Müller I.

Lektüre: Histoire de Guillaume le Conquérant par Thierry, pag. 17—53, 101—131, 152—1 Grammatik nach Plötz, Schulgrammatik: Repetition des ganzen Pensums der Formenlehre. Die T pora und ihr Gebrauch; der Artikel in syntaktischer Beziehung; Wortstellung und Inversion; Syn des Adjektivs und Adverbs; Konstruktion der Verba; Eigentümlichkeiten im Gebrauch der Präpositio — 9 Exercitien, 11 Extemporalien, sowie Übungen im Diarium.

Englisch: 4 St. Realgymnasiallehrer Dr. Müller I.

Lektüre: Washington Irving, Columbus, chapt. 1 u. 10—18. Grammatik: Repetition der Form lehre; Wortstellung; Gebrauch des bestimmten und unbestimmten Artikels; Syntax des Substant Adjektivs, Zahlworts und Adverbs; Gebrauch der Hilfszeitwörter; Tempuslehre (Gräser's Sc grammatik. §§ 169—350). — 9 Exercitien, 11 Extemporalien, sowie Übungen im Diarium.

Mathematik: 5 St. Realgymnasiallehrer Bandke.

Geom.: Aehnlichkeit; Proportionalität am Kreis; Ausmessung der Polygone und des Kre Konstruktion algebraischer Ausdrücke; Konstruktionsaufgaben.

Arithm.: Potenzierung, Radizierung, Logarithmierung; Übung im Radizieren und Gebrauch logarithm. Tafeln. Gleichungen eines Grades mit mehreren, zweiten Grades mit einer Unbekann — 13 häusliche, 8 Klassenarbeiten.

Naturgeschichte: 2 St. Realgymnasiallehrer Dr. Griesmann.

Im Sommer: Botanik. Anatomie und Physiologie der Pflanzen, mit Hilfe des Mikroskopes läutert. Kryptogamenkunde. Fortgesetzte Pflanzenbestimmungen. Exkursionen.

Im Winter: Mineralogie: Allgemeine Eigenschaften der Mineralien. Gediegene Metalle. fidische, oxydische und salinische Erze. Phytogenide.

Geschichte: 2 St. Realgymnasiallehrer Wehner.

Deutsche Geschichte vom Beginn der Reformation bis zum Jahre 1815.

Geographie: 2 St. Realgymnasiallehrer Dr. Griesmann.

Die außereuropäischen Erdteile nach Seydlitz, größere Schulgeographie.

Untertertia. Ordinarius: Realgymnasiallehrer **Bandke.**

Religion: Kombiniert mit IIIa. Vergl. das.

Deutsch: 3 St. Realgymnasiallehrer Wehner.

Lektüre poetischer und prosaischer Stücke aus dem Lesebuch von Hopf und Paulsieck für Tertia. Memorieren mehrerer Gedichte. Repetition aus der Grammatik. Dispositionsübungen nach Musterstücken. — wöchentl. Aufsätze (13) über Themata erzählenden Inhalts und Schilderungen, außerdem 3 Clausurarbeiten.

Latein: 6 St. Realgymnasiallehrer Heller.

Lektüre: Weller, lat. Lesebuch aus Livius, Abschnitt V—X. Grammatik: Syntaxis convenientiae. asuslehre. Orts-, Raum- und Zeitbestimmungen. Gebrauch der Konjunktionen ut, ne, quo, quominus, ain. Verwendung der Modi in Hauptsätzen. Acc. c. inf. ausführlich (nom. c. inf.); ebenso abl. osol. — Schriftliche Übungen im Diarium. — 11 Exercitien, 16 Extemporalien.

Französisch: 4 St. Realgymnasiallehrer Dr. Müller I.

Lektüre: Charles XII par Voltaire, pag. 9—67, 153—172. Grammatik: Repetition des üheren Pensums. Unregelmäßige Zeitwörter, Defektiva, Gebrauch von avoir und être, Vervollständigung der Regeln über die Femininbildung der Adjektiva, Gebrauch des Indikativ und Konjunktiv; r Konjunktiv nach que und den zusammengesetzten Konjunktionen, Ersatz des Konjunktiv durch Infinitivkonstruktionen. — 9 Exercitien, 11 Extemporalien, schriftliche Übungen im Diarium.

Englisch: 4 St. Realgymnasiallehrer Dr. Müller I.

Lektüre der in Fölsing's Lehrbuch enthaltenen Stücke. Leseübungen. Formenlehre des Substans, Adjektivs, der Hilfszeitwörter, regelmäßigen Zeitwörter, Pronomina, Zahlwörter. Bildung des ural, der Komparation, unregelmäßige Konjugation. Hauptregeln der Syntax. — 9 Exercitien, Extemporalien.

Mathematik: 5 St. Realgymnasiallehrer Bandke.

Geom.: Polygone, Kreis, Gleichheit und Ausmessung der gradlinigen Figuren. Konstruktionsfgaben.

Arithm.: 4 Spezies in allgemeinen Zahlen; negative Zahlen. Gleichungen ersten Grades mit einer d zwei Unbekannten. — 12 häusliche, 9 Klassenarbeiten.

Naturgeschichte: 2 St. Realgymnasiallehrer Dr. Griesmann.

Im Sommer: Botanik: Übungen im Bestimmen auch schwieriger Pflanzen. Ausführliche Durchnahme s natürlichen Systems unter Benutzung früher erworbenen Wissensmaterials. Besprechungen der wichsten exotischen Gewächse in systematischer Ordnung, unter Hinweis auf verwandte oder gleichen ecken dienende einheimische Arten. Selbständige Bestimmung von zwei Pflanzen für jede Unterrichtsnde. Exkursionen.

Im Winter: Zoologie: Insekten (spec. Coleopteren), Spinnen, Tausendfüßer, Krebse, Würmer.

Geschichte: 2 St. Realgymnasiallehrer Wehner.

Deutsche Geschichte bis zum Beginn der Reformation.

Geographie: 2 St. Realgymnasiallehrer Bandke.

Europa excl. Deutschland.

Quarta. Ordinarius: Realgymnasiallehrer **Wehner.**

Religion: 2 St. Realgymnasiallehrer Schwesinger.

Repetition des 1. und 2. Hauptstücks. Das 3. Hauptstück nach Weidemann's Katechismus nebst zugehörigen Sprüchen. Das Kirchenjahr, seine Bedeutung, Einteilung und die Bezeichnungen der Fest- und Sonntage. Memorieren von 4 Psalmen und 6 Kirchenliedern. Das Leben des Herrn nach ausgewählten Abschnitten aus den 3 Synoptikern.

Deutsch: 3 St. Realgymnasiallehrer Wehner.

Grammatik: Unterordnende und beiordnende Konjunktionen; Nebensätze; Übung der schwierigeren Interpunktionszeichen. Lektüre hauptsächlich poetischer sowie einiger prosaischer Stücke aus Hopf und Paulsieck für Quarta; Memorieren mehrerer Gedichte. 18 Aufsätze erzählenden und beschreibenden Inhalts, darunter 6 Klassenarbeiten.

Latein: 7 St. Prof. Keller.

Lektüre: Herodot v. Weller, pag. 1—95. Grammatik: Wiederholte Repetition der Formenlehre. Syntaxis convenientiae. Kasuslehre. Orts-, Raum-, Zeitbestimmungen. Schriftliche, darauf bezüglich Übungen. — 16 Exercitien, 22 Extemporalien resp. Klassenarbeiten.

Französisch: 5 St. Wissensch. Hilfslehrer Dr. Müller II.

Lektüre: Lesestücke aus dem Anhang zu Plötz, Elementar-Grammatik. Grammatik: 4 St. Repetition des Pensums für Quinta. Regelmäßige Konjugation; Pron. conj.; Article part.; Adverb. Komparation; Quantitätsbegriffe; en, y; unregelm. Plural; Apposition; Pronom. absolu; Participe passé; die wichtigsten unregelmäßigen Zeitwörter. — 13 Exercitien, 18 Extemporalien.

Mathematik: 2 St. Realgymnasiallehrer Bandke.

Geometrische Propädeutik. Geometrie bis zur Kongruenz der Dreiecke, Parallelogramm und Trapez.

Rechnen: 3 St. Wissensch. Hilfslehrer Dr. Müller II.

Abgekürztes Rechnen mit Dezimalen. Schwierigere Zins- und Prozentrechnungen. Gewinn- und Verlustrechnung. Gesellschaftsrechnung. Course und Wertpapiere. — 11 Exercitien, 11 Extemporalien.

Naturgeschichte: 2 St. Wissensch. Hilfslehrer Dr. Müller II.

Im Sommer: Botanik: Linné's System; das natürliche System im Umriß; Relationen zwischen beiden Systemen. Übungen im Bestimmen von einfacher gebauten Pflanzen. Einleitung in die Kryptogamenkunde. Fortsetzung des Herbars.

Im Winter: Zoologie: Reptilien, Amphibien, Fische. Allgemeine Naturgeschichte der Insekten.

Geschichte: 2 St. Realgymnasiallehrer Wehner.

Geographie und Geschichte Griechenlands; desgl. Roms bis zu den punischen Kriegen.

Geographie: 2 St. Realgymnasiallehrer Dr. Müller I.

Deutschland, speziell Thüringen und S.-Meiningen; Schweiz, Niederlande, Belgien, Dänemark, Österreich-Ungarn.

Quinta. Ordinarius: Realgymnasiallehrer Heller.

Religion: 2 St. Realgymnasiallehrer Schwesinger.

Katechismus nach Dr. Weidemann: Das 1. und 2. Hauptstück; Memorieren der zugehörigen ibelsprüche, ebenso von 7 Kirchenliedern; die Reihenfolge der Bücher der Bibel. — Biblische Ge- ichte des n. T.'s nach Köhler.

Deutsch: 3 St. Wissensch. Hilfslehrer Dr. Müller II.

Grammatik: Der erweiterte Satz, (Objekt, Attribut, Adverbiale), Haupt- und Nebensatz, der zu- nmengezogene Satz. Interpunktionslehre. — Lektüre: Prosaische und poetische Stücke aus Hopf und ulsieck, deutsches Lesebuch, Kursus für Quinta; Memorieren einer Anzahl geeigneter Gedichte; Übungen Vortrag. — 13 häusliche und 5 Klassenarbeiten, teils Wiedererzählungen und gedrängte Dar- lungen, teils Schilderungen und Beschreibungen.

Latein: 7 St. Realgymnasiallehrer Heller.

Grammatik: Regelmäßige und unregelmäßige Deklination des Substantivs und Adjektivs, unregel- ßige Komparation der Adjektiva; Pronomina, Numeralia (incl. distrib. und multipl.); Adverb; Präpo- onen. Regelmäßige und unregelmäßige Konjugation. (Erlernen der wichtigsten Verba nach ihren Stamm- men mit den hauptsächlichsten Kompositis; verba anomala und defectiva.) Das Notwendigste r die Konjunktionen ut, ne, quum, postquam; die elementarste Form des acc. c. inf. und des ablat. sol. Lektüre: Fabeln und Erzählungen aus Henneberger, lat. Übungsbuch. Vokabeln gelernt nach ggert. — 17 Exercitien, 22 Extemporalien.

Französisch: 5 St. Wissensch. Hilfslehrer Dr. Müller II.

Formenlehre nach Plötz's Elementargrammatik, Lektion 1—60; Artikel, Adjekt., Pronom démonstr. und ssess.; Deklination; Adjektiva, adject. numéraux; avoir und être; Construction interrogative: die e Konjugation. — 14 Exercitien, 18 Extemporalien.

Rechnen: 4 St. Realgymnasiallehrer Schwesinger.

Repetition der Bruchrechnung; Decimalbruchrechnung bei 10- und 100teiligen Maßen; einfache geldetri-, Zins-, Prozentrechnung und Anfänge der zusammengesetzten Regeldetri. — 12 häusliche, Klassenarbeiten. Wöchentlich 1 St. Kopfrechnen.

Naturgeschichte: 2 St. Realgymnasiallehrer Dr. Griesmann.

Im Sommer: Beschreibung von Pflanzen, auch solcher, welche die Organe weniger deutlich zeigen; sammenstellung derselben zu Gattungen; Hinweis auf Zugehörigkeit zu den Klassen des Linnéschen stems und den Familien des natürlichen Systems. Anlegung eines Herbars. Exkursionen.

Im Winter: Vervollständigung der Naturgeschichte der Säugetiere und Vögel.

Geschichte: 1 St. Wissensch. Hilfslehrer Dr. Müller II.

Sagengeschichte des deutschen Altertums: Nibelungen; Gudrun. — Biographieen aus dem Gebiet Weltgeschichte.

Geographie: 2 St. Wissensch. Hilfslehrer Dr. Müller II.

Physische und politische Geographie von Asien, Afrika, Amerika und Australien nach Seydlitz, undzüge. Grundbegriffe der mathematischen Geographie. Anleitung zum Kartenzeichnen.

*

Sexta. Ordinarius: Realgymnasiallehrer Schwesinger.

Religion: 3 St. Realgymnasiallehrer Schwesinger.

Das 1. Hauptstück, Memorieren der zugehörigen, wichtigsten Sprüche; desgl. 1. Artikel des 2. Hau stücks nach dem Katechismus von Dr. Weidemann. Memorieren von 6 Gesangbuchsliedern. — B lische Geschichte des a. T.'s nach Köhler.

Deutsch: 3 St. Realgymnasiallehrer Schwesinger.

Grammatik: Substantivum, Adjektivum, Verbum; der nackte Satz, einfach und erweitert. Pro mina, Zahlwörter, Adverbien und Präpositionen. Lektüre: Deutsches Lesebuch von Hopf und Paulsi I. Teil, viele prosaische und poetische Stücke. Memorieren und Übungen im Vortrage an einzeln derselben. — 14 häusliche deutsche Arbeiten und 17 Klassenarbeiten, teils Diktate, teils Wiedererz lungen und Beschreibungen.

Latein: 8 St. Realgymnasiallehrer Wehner.

Regelmäßige Formenlehre; Pronomina; Präpositionen; numeralia cardinalia und ordinal Verba der 3. Konjugation auf io; Deponentia der 1. Konjugation. Lektüre aus Henneberger's Element buch. Wöchentliche Exercitien oder Extemporalien.

Rechnen: 5 St. Realgymnasiallehrer Schwesinger.

Die 4 Spezies mit gleichbenannten und ungleichbenannten Zahlen. — Zeitberechnung; das E fachste von den Decimalbrüchen, sowie die 4 Spezies der gemeinen Brüche. 15 häusliche und 9 Klassenarbeiten. Wöchentlich 1 St. Kopfrechnen.

Naturgeschichte: 2 St. Realgymnasiallehrer Dr. Griesmann.

Im Sommer: Einübung der Terminologie an Pflanzen, welche die einzelnen Organe recht deutl zeigen. Anleitung zum Pressen und Trocknen der Pflanzen.

Im Winter: Beschreibung von Repräsentanten aus allen Ordnungen der Säugetiere und Vö

Geschichte: 1 St. Wissensch. Hilfslehrer Dr. Müller II.

Sagengeschichte des klassischen Altertums: Prometheus, Deukalion, Perseus, Phaëton, Herku Theseus, Jason und die Argonauten, der trojanische Krieg, Odysseus. — Erzählungen aus der deutsc Sagenwelt: Siegfried, Gudrun.

Geographie: 2 St. Realgymnasiallehrer Bandke.

Allgemeine Geographie; geograph. Grundbegriffe, Kartenlesen. Übersicht der Weltteile u Oceane. Europa.

Zeichnen.

Der Zeichenunterricht wurde in allen Klassen von dem akademischen Maler, Realgymnasialle Hasselbring erteilt.

Prima. Zeichnen nach plastischen Vorlagen und Büsten mit Schattierung in 2 Kreiden; sie Anwendung perspektivischer Lehrsätze und der Schattenlehre im Zeichnen nach Modellgruppen. 2 St.

Secunda. Zeichnen nach plastischen Vorlagen. Freie Anwendung perspektivischer Lehrsätze, sie der Schattenlehre im Zeichnen nach Modellgruppen. 2 St.

Obertertia. Zeichnen nach Vorlagen ornamentalen Charakters in vergrößertem Maßstabe und nach Modellgruppen mit Schattierung in 2 Kreiden. Erläuterungen über Horizont, Augenpunkt und Verschwindungspunkte, verschwindende Linien und Flächen; freie Anwendung perspektivischer Regeln. 2 St.

Untertertia. Siehe Obertertia. 2 St.

Quarta. Repetition des Pensums der Quinta. Zeichnen nach Vorlagen ornamentalen Charakters in vergrößertem Maßstabe in Umrissen und mit leichter Schattenangabe. Zeichnen nach Körperformen (Modellen) mit leichter Schattenangabe und Erläuterung über verkürzte Linien und Flächen. 2 St.

Quinta. Repetition und Erweiterung des Pensums der Sexta. Zeichnen nach Vorlagen ornamentalen Charakters in Umrissen in vergrößertem Maßstabe. Erläuterungen über Linien, Flächen und Körper, sowie über Maßverhältnisse. 2 St.

Sexta. Haltung des Körpers, Haltung und Führung des Bleistifts. Form und Lage von Linien; Zeichnen von geraden und gebogenen Linien. Zeichnen nach Vorlagen leichter ornamentaler Formen in Umrissen. 2 St.

Schreiben.

Der Schreibunterricht wurde vom Realgymnasialelementarlehrer Schwesinger in Sexta, Quinta und Quarta erteilt und zwar in je 2 Stunden.

Sexta. Elementarübungen in deutscher und lateinischer Schrift nach Vorschrift an der Wandtafel.

Quinta. Deutsche und lateinische Schrift. Taktschreiben.

Quarta. Übungen im Schnellschreiben, zuerst nach Vorschrift an der Wandtafel, dann nach Diktaten. Mit den besten Schreibern wurde von Michaelis an ein Kursus in der Rundschrift nach F. Soennecken durchgenommen.

Gesang.

Der Gesangunterricht wurde vom ord. Lehrer der Bürgerschule Herrn Franke erteilt.

Die Schüler sind nach ihren Leistungen in 3 Abteilungen geteilt und werden in wöchentlich 6 Stunden, — jede Abteilung 2 St., — unterrichtet. 1. Abteilung: Mehrstimmige Lieder und Choräle. 2. Abteilung: Zwei- und dreistimmige Lieder und Choräle. 3. Abteilung: Notenkenntnis, Tonleiter, Treffübungen, ein- und zweistimmige Lieder, Kanons und Choräle.

Turnen.

Der Turnunterricht wurde vom ord. Lehrer der Bürgerschule Herrn Franke erteilt.

Die in 3 Turnklassen eingeteilten Schüler wurden in wöchentlich 6 Stunden unterrichtet. Die Vorturner erhielten wöchentlich eine besondere Stunde. Gerät- und Rüstübungen von allmählich steigender Schwierigkeit, sowie Freiübungen, Marschbewegungen und Turnspiele bildeten den Unterrichtsgegenstand.

Allgemeiner Lektions

Wo doppelte Ziffern angegeben sind, gelten die oberen für den Beginn des So

Lehrfächer	Stundenzahl in								Summa	Lektion											
										Pinzger, Dir. Ord. von I		Keller Ord. v. II.		Hößrich		Griesmann Ord. v. IIIa				
	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IV	V	VI		Zahl	Klasse	Zahl	Klasse	Zahl	Klasse	Zahl	Klasse	Zahl			
Religion . . .	2	2		2		2	2	3	13	2 —	IV —										
Deutsch . . .	3	3		3	3	3	3	3	21	3 6	I I IIIa										
Latein	5	5		6	6	7	7	8	44			17	I II IV								
Französisch . .	4	4		4	4	5	5	—	26					4	I						
Englisch . . .	3	3		4	4	—	—	—	14					6	I II						
Mathematik .	5	5	5	5	5	2	—	—	27					10	I IIa				17		
Rechnen . . .	—	—	—	—	—	3	4	5	12												
Physik	3	3		—	—	—	—	—	6	6	I II										
Chemie theor.	2	2														4	I IIa				
Chemie prakt.	2	—	—	—	—	—	—	—	6							2	I				
Naturgeschichte	—	—	2	2	2	2	2	2								12	IIb — VI				
Exkursionen					2				14							2	Exkursionen				
Exkursionen																10	IIb-IIIb V VI				
																—	—				
Geographie . .	—	1		2	2	2	2	2	11							2	i. S. IIIa	5			
																3	i. W. II IIIa	4	i.		
Geschichte . .	3	2		2	2	2	1	1	13			3	I								
Zeichnen . . .	2	2		2	2	2	2	2	14												
Schreiben . .	—	—	—	—	—	2	2	2	6												
Singen . . .	6 in 3 subordinierten Abteilungen zu je 2 Stunden								6												
Turnen . . .	7 1 Stunde Vorturnerstunde. — Turnen in 3 Abteilungen zu je 2 Stunden.								7												
Summa . .									240	11 12		20		20		22 19		2 2			

das Schuljahr 1883/84.

ide April, die unteren für den Rest desselben und das Winterhalbjahr 1883/84.

r Lehrer

er IV	Müller I.		Heller Ord. v. V		Schwesinger Ord. v. VI		Scheler		Müller II.*		Müller III.**		Hasselbring		Franke	
sse	Zahl	Klasse	Zahl	Klasse	Zahl	Klasse	Zahl	Klasse	Zahl	Klasse	Zahl	Klasse	Zahl	Klasse	Zahl	Klasse
					5 7	V VI IV V VI	6	I II III								
I IV			3	II	3	VI			6 —	III^a V —	— 3	— V				
I			19	III^a III^b V												
	18 12	II III^b IV V II III^a III^b							4 —	III^a —	— 10	— IV V				
	— 8	— III^a III^b							8 —	III^a III^b —						
					12 9	IV V VI V VI					— 3	— IV				
											— 2	— IV				
	4 2	IV V IV									— 2	— V				
I III^b IV									2 —	V VI —	— 2	— V VI				
													14	I II III^a III^b IV V VI		
					6	IV V VI										
															6	I—VI
															7	I—VI
	22 22		22		26 25		6		20 —		— 22		14		13	

* bis Ende April 1883.

** vom Mai 83 an Müller II.

Chronik.

Das laufende Schuljahr wurde, nachdem am 2. April die Feier des Geburtsfestes Sr. Hoheit des Herzogs stattgefunden hatte, am 3. April morgens 7 Uhr eröffnet.

Zur Feier des Höchsten Geburtstages war der gesamte Cötus bereits anwesend und beging dieselbe durch festlichen Aktus im Saale der Zapfe'schen Restauration. Die Festrede hielt Herr Professor Keller, welchem am selben Tage eine für ihn wie für die Schule höchst ehrenvolle Auszeichnung zu teil geworden war, indem er durch die Gnade Sr. Hoheit des Herzogs mit dem Ritterkreuze II. Klasse des Herzoglich-Sachsen-Ernestinischen Hausordens dekoriert worden war. Die Festrede behandelte die Bedeutung des Geschichtsunterrichts für höhere Lehranstalten.

Die Beschäftigung des Herrn Dr. Ernst Müller III aus Saalfeld als Candidatus probandus am Herzoglichen Realgymnasium vermehrte das Lehrerkollegium um ein Glied, welches im Laufe des Jahres, durch das seine Thätigkeit an der Anstalt sich erstreckte, sich recht wohl in den Organismus derselben hineinzuleben verstand. Seine Beschäftigung sollte schon nach kürzester Frist eine umfangreichere, als es die eines Probanden der Regel nach ist, werden; denn schon am 10. April wurde auf den dringenden Wunsch des bisherigen wissenschaftlichen Hilfslehrers an unserer Anstalt, Herrn Ernst Müller II aus Gräfenthal, derselbe aus seinem hiesigen Amte entlassen, um einem höchst ehrenvollen Rufe an die Klosterschule zu Roßleben als Lehrer der neueren Sprachen zu folgen. In die Unterrichtsstunden des ausgeschiedenen Collegen trat einesteils Herr Dr. Ernst Müller III (von da an II) ein, anderenteils wurden dieselben durch eine völlige Umarbeitung des Lektionsplans derartig [illegible]ergebracht, daß den erreichten Unterrichts-Befähigungen des neu eintretenden Herrn wenigstens in etwa Rechnung getragen werden konnte. Indes verzögerte sich die Genehmigung der neuen Arrangements durch manche erst zu beseitigenden Bedenken so lange, daß erst am 6. Mai der vorstehend abgedruckte allgemeine Lektionsplan in Kraft treten konnte, und eine vierwöchentliche Vertretung durch das Lehrerkollegium stattfinden mußte, wofür demselben von seiten Eines Hohen Herzogl. Staatministeriums die Summe von 100 Mark als Remuneration zur Verteilung hochgeneigtest überwiesen wurde.

Der gemeinsame Schulspaziergang wurde auch diesesmal entsprechend den verschiedenen Kräften der Schüler derartig eingerichtet, daß die Primaner und Sekundaner unter Führung des Direktors, der Herren Professoren Keller und Hößrich stromaufwärts durch das herrliche Saalthal zogen, sodann seitlich den Gipfel des Laasener Culm bestiegen, von dort zurück über Eichicht und durch das obere Saalthal, zuweilen auf völlig ungebahnten Wegen, endlich nach Günthersheil gelangten und von da den gemeinsamen Zielpunkt der ganzen Schule, das waldumrahmte Bucha, erreichten. Die Quartaner und Tertianer, welche Herr Bandke, die Herren Doktoren Müller I und II, und Herr Diakonus Scheler unter ihre Obhut genommen hatten, hatten den Weg zur Katze und über die Haide gewählt,

m wo sie über Könitz nach Bucha gelangten, während die Schaar der kleinen Quintaner und Sexner unter Führung der Herren Dr. Griesmann, Heller, Hasselbring und Schwesinger den rzen Weg über den roten Berg nach Bucha einschlug. Auch auf diesen zum Teil unbekannten Wegen aren Freunde der Schule und des Kollegiums so gütig, die liebenswürdigen Führer zu machen. Bei öhlichem Gesang und Spielen, zu denen die Opferwilligkeit der Eltern, einer Anzahl von Freunden r Schule, ebenso der Herren Kollegen reichliche Beisteuer an Gerätschaften, Scheiben, Bolzenbüchsen, wie eine prächtige Scheibe für Ballwurf, nicht minder auch an auszusetzenden Preisen geliefert hatte, i der Musik unsrer Stadtkapelle verging der Nachmittag in ungetrübter Heiterkeit. Ein herrliches ergnügen bereitete die Freundlichkeit des Direktors der Maxhütte zu Unterwellenborn Herrn Chelius iseren Schülern noch dadurch, daß er dieselben mit einem Extrazuge der Grubenbahn aus der Nähe n Bucha bis zum Hüttenwerke fahren ließ, wofür demselben hierdurch noch besonderer Dank ausgerochen sei. Unter den Klängen der Musik wurde der weitere Heimmarsch rüstig vollendet und die chüler vom Marktplatze aus mit einem Hoch auf den gnädigsten Patron unsrer Schule nach Hause tlassen, während bengalische Beleuchtung die Ecken des Platzes erhellte. Auch an diesem Feste haben ; unsrer großen Freude die Eltern unserer lieben Jugend von nah und fern sich zahlreich und freundlich lteiligt, und haben dadurch die Feststimmung zu erhöhen nicht wenig beigetragen, wofür ihnen hiermit rzlicher Dank gesagt sei.

An der Feier des Sedantages nahm unsere Schule diesesmal, da die Ferien bereits beendet iren, insgesamt teil. Der Festzug nach der Friedenshöhe, die Festansprache, welche der unterzeichnete irektor auf eine an ihn ergangene Bitte übernommen hatte, die folgenden Spiele und Gesänge fanden l herrlichstem Wetter statt.

Auf Anordnung des Hohen Herzoglichen Staatsministerii wurde der 400jährige Gedenktag der Lutherfeier auch vom Realgymnasium durch einen Festaktus begangen. Die Festrede hatte Herr Lakonus Scheler, der Religionslehrer der Anstalt, gütigst übernommen. Die gemeinsame Feier der Stadt Saalfeld am Nachmittage bestand in einem mit Einbruch der Dunkelheit von den verschiedensten Versammlungspunkten her sich nach dem Marktplatze bewegenden imposanten Lampionzug sämtlicher Schulen, der unter Glockengeläut und dem Klange der gewaltigen Töne des ‚Ein' feste Burg ist unser Gott' die vier Seiten des Platzes in mächtigem Viereck einnahm. Von einer an einer Langseite errichteten bekränzten und sinnig mit Reformationsemblemen geschmückten Tribüne sprach der unterzeichnete Direktor, wiederholter Aufforderung Folge leistend, über Luther als Mann aus dem Volke und darum Mann für das Volk. Leider begünstigte das Wetter die letzte Hälfte der Festlichkeit nicht in gleicher Weise wie die erste. Gemeinsame Teilnahme an dem Festgottesdienst des 11. November durch Lehrer und Schüler gab der Feier die kirchliche Weihe.

Am 30. November feierte die Schule gemeinschaftlich das heilige Abendmahl, wozu auch diesesmal seitens der beiden hiesigen Herren Geistlichen die Wahl eines Tages innerhalb der Woche uns freundlich gestattet worden war, wofür besten Dank zu sagen ich nicht unterlassen möchte. Die Vorbereitungsrede am Nachmittage des vorhergehenden Tages hielt der Direktor.

Am 22. Februar lud das Herzogliche Realgymnasium die Eltern und Anverwandten seiner Schüler, die Freunde und Gönner der Schule zu einer musikalisch-deklamatorischen Abendunterhaltung in den Zapfe'schen Saal ein. Der zur Bestreitung der entstandenen Kosten bestimmte geringe Beitrag, welcher für etwa gewünschte Programme erhoben wurde, wurde freiwillig durch die Güte unserer Gäste so weit überschritten, daß die eingegangene Summe 173 M. 60 ₰ betrug, sodaß nach Abzug der Kosten der Betrag von 108 M. 84 ₰ den Zwecken der Schüler-Unterstützungs-Bibliothek zugewendet werden konnte. Wir sagen im Namen unsrer bedürftigen Schüler besten Dank. Besonders hervorgehoben muß noch werden, daß die Direktion und Intendanz des Herzoglichen Hoftheaters zu Meiningen in freundlichster und gütigster Weise unser Unternehmen dadurch ganz besonders gefördert und unter-

stützt hat, daß dieselbe für die dramatischen Darstellungen einer Scene aus ‚Faust' und zweier Sce aus ‚Nathan der Weise' die nötigen Kostüme mit der dankenswertesten Bereitwilligkeit geliehen hat.

Die Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers Wilhelm wurde am 22. März d Festaktus in dem zu diesem Zwecke seitens des Vorstandes wieder gütigst zur Benutzung überlasse Saale der ‚Erholung' begangen. Herr Dr. Griesmann hielt die warm von patriotischem Ha durchwehte Festrede über den Entwickelungsgang der deutsch-preußischen Geschichte von 1840 bis Besonderen Dank von seiten der Schule hat sich auch Herr Kantor Köhler erworben, der trotz se ohnehin und besonders in jetziger Zeit stark in Anspruch genommenen Zeit für den erkrankten He Kollegen Franke die für die Feier erforderlichen Gesänge mit unseren Schülern übte und die führung am Festtage selbst leitete.

Das Höchste Geburtsfest Sr. Hoheit des Herzogs wird das Realgymnasium am 2. April d feierlichen Aktus, bei welchem der unterzeichnete Direktor die Festrede halten wird, begehen. Zug wird mit dieser Feierlichkeit die Entlassung der Abiturienten verbunden werden.

Der Schulunterricht wurde außer an den vorgedachten Festtagen noch am 4. und 29. Juni, so am 3. und 5. Juli wegen großer Hitze ausgesetzt. Am 23. Oktober machte die Quinta für den N mittag unter Führung ihres Herrn Ordinarius und des Herrn Dr. Müller II einen kleinen Aus in die in ihrem Herbstgewande prangenden Berge der nächsten Umgebung.

Der Gesundheitszustand unsrer Schüler hat erfreulicherweise, trotz der aus den verschieden Richtungen zu uns dringenden Nachrichten von herrschenden Masern-, Scharlach- und selbst Diphtheri Epidemien unter den Kindern an näheren und ferner gelegenen Orten, keinen Grund zur Klage boten. Kurze Zeit hindurch nur waren einzelne Schüler wegen in ihrer Familie erfolgter Masern Erkrankungen vom Schulbesuche fern gehalten worden.

Auch das Lehrerkollegium hat nur vereinzelte Fälle von Erkrankung zu beklagen gehabt, die n von sehr geringer Dauer waren, so daß der Unterricht kaum eine nennenswerthe Einbuße erli hat; nur die gegenwärtig noch währende Krankheit unsres Gesang- und Turnlehrers, des Herrn Kolle Franke wird, wie es scheint, denselben noch längere Zeit von der Ausübung seines Berufes fern hal

---

Dem Oberprimaner Gedicke wurde an Michaelis, nachdem er der Prima 2½ Jahre ange hatte, durch das Hohe Herzogliche Staatsministerium gestattet, der Abiturientenprüfung sich zu unterzie Die Höchsten Orts ernannte Prüfungskommission bestand aus den Herren Regierungs- und Schu Prof. Eggeling, Landrat Hofrat Schneider, dem Direktor und Herrn Prof. Keller. mündliche Examen fand am 8. Oktober statt, und erhielt der Examinand das Zeugnis der Reife.

Unter Geltung des neuen Prüfungsreglements, (welches im ‚Regierungsblatt für das Herzog Sachsen Meiningen' Nr. 44 vom 19. März 1884 seinem ganzen Wortlaute nach veröffentlicht wo ist), unterzogen sich am 17. März die weiter unten verzeichneten vier Abiturienten der mündl Prüfung, infolge deren allen das Zeugnis der Reife zuerkannt werden konnte.

Es verließen hiernach mit dem Zeugnis der Reife:

an Michaelis 1883

Zu- und Vorname	Geburtsort	Besuchte die Schule	Besuchte die Prima	Erwählter Beruf
Gedicke, Harry	Neustadt a/Orla	6½ J.	2½	Stud. d. neueren Sprache in Leipzig

Ostern 1884

Zu- und Vorname	Geburtsort	Besuchte die Schule	Besuchte die Prima	Erwählter Beruf
Voit, Eduard	Saalfeld	9 J.	2	Stud. d. Mathematik u. Naturwissensch., Greifswald
Korn, Hermann	Schmiedefeld	8 J.	2	Rechnungsfach
Wölfel, Ludwig	Gräfenthal	12 J.	2	Rechnungsfach (noch unbestimmt)
Krauß, Konstantin	Eisfeld	7 J.	2	Stud. d. Naturwissenschaft, Greifswald.

Der Zinsertrag der Richter-Stiftung wurde auf Vorschlag des Lehrerkollegiums seitens des Herrn ...llators für das laufende Jahr den Primanern Voit, Korn und Engelmann als Stipendium zu ...ichen Teilen verliehen.

Da die Stiftungsurkunde des Stauß'schen Legates es frei läßt, ob den Benefiziaten der Betrag ... Legates baar ausgehändigt wird, oder ob ihnen für den Betrag desselben Schulbücher übergeben ...den, so hat sich das Lehrerkollegium entschlossen, für dieses Mal von dem seitherigen Usus abzu...chen. Es sind demgemäß im Sinne der Stifterin an den Primaner Engelmann

Herbst, Historisches Hilfsbuch für obere Klassen, T. 1, 2 und 3, gebunden, Halbfranz, und Lessings Werke in 3 Bänden, Halbleinenband,

...ie an den Sekundaner Seidel

Herbst, Historisches Hilfsbuch für obere Klassen, T. 1, 2 u. 3, gebunden, Halbfranz, und Koerners Werke in 1 Band, Halbfranzband,

...tatt des betreffenden Geldbetrags durch den Direktor vor versammeltem Coetus ausgehändigt worden.

Der hochgeneigtest aus dem Edukationsfonds dem hiesigen Realgymnasium für Schüler desselben ...ch das Herzogliche Staatsministerium überwiesene Betrag von 170 Mark, über dessen Verteilung ...r vorigen Programme nicht berichtet werden konnte, ist an sechs Schüler zur Verteilung gekommen ... zwar haben die Primaner Korn und Engelmann je 40 Mark, die Sekundaner Seidel und ...eitung je 25 Mark und die Sekundaner Diez und Schwesinger je 20 Mark erhalten. — Der ...) im neuen Jahre 1884 hochgeneigtest verwilligte Betrag von gleicher Höhe harrt noch seiner Verteilung.

Die Erhöhung der Schulgeldsätze für die einzelnen Klassen, wie dieselbe im folgenden (Min.-Reskr. ...l. 26. Novbr. und Sammlung d. Landesherrl. Verordn., pg. 385, No. 78) angegeben ist, hat vor...ig eine Einwirkung auf die Höhe der Frequenz der Anstalt noch nicht ausgeübt.

Für die Sammlungen und deren Vervollständigung resp. Erhaltung wurden die etatsmäßigen ...tel verwendet.

An Geschenken sind eine Zuwendung von Büchern an die Lehrerbibliothek des Realgymnasiums ...h Herrn Oberförster Brandt in Gräfenthal, sowie einer Steinsammlung, leider unbestimmt und ...le Fundorte, durch Fräulein Lemmerzahl hier dankbar zu erwähnen. Herr Direktor Chelius ...Unterwellenborn hat durch eine reichhaltige Kollektion von Mineralien, besonders aus den Groß...sdorfer Bergwerken, sowie von Hüttenprodukten interessanter und seltnerer oder hervorragend ...akteristischer Beschaffenheit sein der Schule schon oft bewiesenes warmes Interesse in äußerst dankens...ter Weise aufs neue wieder bethätigt. In gleicher Weise sind von Herrn Dr. Heubel einige der ...ogischen Sammlung einverleibte Naturalien aus Brasilien, von einem früheren Schüler der Anstalt, ... Seemann Herrn Fritz Schreiber, eine größere Anzahl von Naturalien von den Molukken,

aus Bengalen, sowie hauptsächlich Mineralien von Elba und Sardinien der Schule übergeben wo
Herr Dr. Griesmann hat ferner 9 Stück neue Figurentafeln, für den chemischen Unterrich
stimmt, als Geschenk der Schule zugewandt. Einzelne Geschenke verdanken wir ferner den Herren Tie
Lau, Dr. Müller II, Dr. Griesmann, Realgymnasiallehrer Schwesinger, sowie den Sch
Diez, Schmidt und Wenzel in II, Brandt und Heubel in IIIa, Schenk, Cramer, De
Heumann, Reichenbächer, Koch in IIIb, endlich Balke II und Rothe in V. — An Beisteuern
Schulbüchern für die Schüler-Unterstützungs-Bibliothek überließen uns Schenk aus IIIb, W
Livius und Fils aus IV, Seydlitz, Leitfaden. In gleicher Weise wurden an Geldbeträgen zwe
je 1 Mark der Schüler-Unterstützungs-Bibliothek überwiesen.

Allen gütigen Gebern sagt die Direktion im Namen der Schule ihren verbindlichsten Dank.

Mit besonderem Danke wendet sich die Direktion ferner an den Landtag, welcher auf den An
der Hohen Herzoglichen Staatsregierung die Mittel für die Ausstattung des physikalischen Kabi
der Anstalt gewährt hat, in der Hoffnung, daß die gütige Fürsorge, welche die Hohe Herzogliche St
regierung nie aufgehört hat, unsrer Anstalt zuzuwenden, und welche in dem vorliegenden Falle,
auch früher bereits, der Landtag des Herzogtums derselben zu beweisen gewiß gern Veranlassun
nommen hat, nicht ermatten möge. Möchten reiche Früchte einer gediegenen Schulbildung an un
Zöglingen den Dank für die der Anstalt gebrachten Opfer aussprechen.

Das Lehrerkollegium besteht z. Z. aus folgenden Lehrern:

Direktor Professor Dr. Pinzger,
Professor Keller,
Professor Hoeßrich,
Realgymnasiallehrer Dr. Griesmann,
" Bandke,
" Wehner,
" (prov.) Dr. Müller I,
" Heller,
Realgymnasialelementarlehrer Schwesinger,
Wissenschaftlicher Hilfslehrer Diakonus Scheler,
" " Dr. Müller II*),
Zeichenlehrer Hasselbring, akad. Maler,
Gesang- und Turnlehrer Franke, ord. Lehrer an der städtischen Bürgerschule.

---

*) Dr. Friedrich Ernst Müller, geb. am 30. Juni 1859 zu Saalfeld, besuchte bis zum Jahr 1869 die Elem
schule seiner Geburtsstadt, von da bis Ostern 1878 die Realschule I. Ord. daselbst, die er mit dem Zeugnis der
verließ, um sich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität Leipzig zuzuwenden.
Leitung von Lindner, Kolbe, Wiedemann und Zirkel beschäftigte er sich hier hauptsächlich mit Chemie und Geologi
promovierte im März 1882 auf Grund einer petrographischen Arbeit über thüringische Kontaktgesteine, (die Kc
erscheinungen an dem Granite des Henebergs bei Weitisberga; Neues Jahrbuch für Mineralogie ꝛc. 1882). Im J
1883 legte er vor der wissenschaftlichen Prüfungskommission der Universität Leipzig das Examen pro facultate do
ab, nachdem er noch ein Jahr lang an den von Hofmann und Masius geleiteten pädagogischen Seminarien T
nommen hatte. Seit Ostern 1883 ist er unter gleichzeitiger Ableistung seines Probejahres als wissenschaftlicher Hilfsl
an dem Herzoglichen Realgymnasium hier thätig gewesen.

Reskripte und Verfügungen der Hohen Oberbehörde.

2. Februar 1883. Mitteilung über Erfolg angestellter Recherchen nach dem Verbleib von Bibliotheksbüchern wird gemacht.

27. März. Gebrauch des Anhangs zum Saalfelder Gesangbuch wird in Erwartung der Genehmigung der Einführung desselben in der Gemeinde durch die Synode gestattet.

4. April. Bestimmung über Zusammensetzung der Prüfungskommission und die Gebühren für die Prüfung eines Extraneers auf Reife für Obersekunda wird getroffen.

10. April. Auf sein Gesuch wird dem wissenschaftlichen Hilfslehrer und Cand. prob. Herrn Müller II die Entlassung aus dem Herzoglichen Staatsdienste erteilt.

11. April. An Stelle des wissenschaftlichen Hilfslehrers Herrn Ernst Müller II aus Gräfenthal wird dem Realgymnasium der Cand. prob. Dr. Ernst Müller III aus Saalfeld, und zwar von Ostern ab als wissenschaftlicher Hilfslehrer, überwiesen.

17. April. Zur Deckung der Mehrausgaben für Anschaffungen zur Bibliothek wird die Summe von 392 Mark 59 Pfg. von Seiten des Herzoglichen Staatsministeriums hochgeneigtest nachverwilligt.

26. April. Remuneration für den wissenschaftlichen Hilfslehrer Herrn Dr. E. Müller aus Saalfeld wird zugesichert.

30. April. Ein Erlaß des Herzogl. Staatsministeriums genehmigt die Befreiung von 24 Schülern des Realgymnasiums vom ganzen, die von 5 derselben vom halben Schulgelde.

4. Mai. Urlaub zum Zwecke der Ableistung einer militärischen Übung wird dem Unterzeichneten vom 15. Juli ab erteilt.

11. Mai. Der zur Genehmigung eingereichte, methodische Lehrplan wird bestätigt unter Beifügung einiger zur Nachachtung mitgeteilten Bemerkungen, welche sich besonders auf die Lektüre in Deutsch, Latein und Französisch beziehen.

15. Mai. Erhöhung des Schulgeldes für die Schüler der Untertertia auf den bisher für Untertertia erhobenen Satz wird verfügt.

21. Mai. Mitteilung von der Verlegung der Zeit der Dienstleistung, zu welcher der Realgymnasiallehrer, Sekonde-Lieutenant der Landwehr-Infanterie, Wehner einbeordert war, wird gemacht.

4. Juni. Remuneration für die Vertretung des nach Roßleben versetzten Herrn E. Müller II aus Gräfenthal wird bewilligt, sowie eine Erhöhung des Honorars für Religionsstunden gewährt.

9. Juni. Anträge betreffend in den Etat 1884/86 aufzunehmende Positionen für den Realaufwand werden eingefordert.

19. Juni. Beginn der diesjährigen Sommerferien wird auf den 22. Juli festgesetzt.

27. Juni. Bericht über die Frequenz der einzelnen Klassen des Realgymnasiums wird erfordert.

30. Juni. Urlaub zum Zwecke der Ableistung einer militärischen Übung wird dem Realgymnasiallehrer Wehner erteilt.

9. Juli. Auf sein Gesuch wird dem Oberprimaner Gedicke gestattet, an Michaelis 1883 die Abiturientenprüfung bei dem Herzoglichen Realgymnasium abzulegen, und die Prüfungskommission, aus den Herren Regierungs- und Schulrat Eggeling, Landrat des Saalfelder Kreises Hofrat Schneider, dem Direktor und Herrn Professor Keller bestehend, ernannt.

25. Juli. Für Ausstellung von Duplikat-Zeugnissen sind bis auf weiteres je 50 Pfg. Copialien zu erheben.

27. Juli. Auf den Jahresbericht des Herzoglichen Realgymnasiums erfolgt eine eingehende Erwider

3. August. Visitationsbericht über die seitens des Herrn Referenten für Schulensachen erf Revision des Herzoglichen Realgymnasiums wird zur Kenntnisnahme und Beseitigung etwa noch vortretender Mängel oder Unzuträglichkeiten unter Anerkennung des günstigen Gesamteindrucks un mehreren Disziplinen recht befriedigender Leistungen mitgeteilt. Abhaltung von Probelektionen anempfohlen.

4. August. Vorschriften über die Begehung der 400jährigen Gedächtnisfeier des Geburtst Dr. Martin Luther durch die Schule werden gegeben, sowie die Teilnahme an der für den 11. No festgesetzten kirchlichen Feier angeordnet.

8. September. Ein Plan für die Verwendung der im neuen Realgymnasialgebäude vorhand Räumlichkeiten ist von der Direktion auszuarbeiten und einzureichen.

17. September. Verfügung über Preismaxima der zu verwendenden Sorten von Papie Couverts und Siegellack wird getroffen.

18. September. Rechnung über Einnahme und Ausgabe bei der Richterstiftung pro 1882 eingefordert.

2. Oktober. Die Einführung von Censurheften für die Schüler des Herzoglichen Realgymnasi wird genehmigt; der Selbstkostenpreis derselben ist mit 20 Pfg. pro Stück von den Schülern zu tra

2. Oktober. Dem Realgymnasiallehrer Wehner wird auf sein Ansuchen ein achttägiger Ur vom 7. bis 14. Oktober erteilt.

12. Oktober. Der von Heinrich Hoffmann, (Anleitung zur Erteilung eines methodi Schreibunterrichts, 3. Aufl., Leipzig 1882), angegebene Ductus ist bei Erteilung des Schreibunterri unverändert zur Einführung zu bringen.

20. Oktober. Die von Dr. F. Müller I pr. term. 1. April 1884 nachgesuchte Dienstentlas wird genehmigt.

2. November. Eine Offerte der Verlagsbuchhandlung J. J. Weber in Leipzig, die Lu nummer der Illustrierten Zeitung als Festgabe zum Luthertage zu ermäßigtem Preise an die Sch der Anstalt liefern zu wollen, wird mitgeteilt und Angabe der Zahl bestellter Exemplare eingefor

7. November. Befreiung von Zahlung des ganzen Schulgeldes wird an 16 Schüler, Befre vom halben an 8 Schüler verliehen.

7. November. Vorschläge für Wiederbesetzung der durch Austritt der Herren Dr. F. Müll und Dr. E. Müller II aus dem Lehrerkollegium vakant werdenden Lehrerstellen sollen eingereicht wer

8. November. Umgehende Einsendung einer Zusammenstellung der in den letzten drei Ja erfolgten Schulgeldbefreiungen und der Verteilung dieser Beneficien zwischen Angehörigen der E Saalfeld und des Meininger Landes wird befohlen.

9. November. Einführung von Herbst, Historisches Hilfsbuch, Teil I, Ausgabe für Realsch Teil II und Teil III für die Secunda und Prima, von Eckertz, Hilfsbuch für den ersten Unterr in der deutschen Geschichte für Ober- und Unter-Tertia, von O. Jäger, Hilfsbuch für den ersten Unterr in alter Geschichte für Quarta, sowie von W. Köhler, die gebräuchlichsten Choralmelodieen in urspr licher Form für den ganzen Gesangunterricht an der Schule wird genehmigt.

23. November. Schulgeldbefreiung für die Söhne der Lehrer des hiesigen Realgymnasi wird für das laufende Semester gewährt. Für späterhin werden bezügliche Bestimmungen getro

26. November. Benutzung der Anding'schen Männergesänge, Hildburghausen, Verlag Gadow & Sohn, wird gestattet.

28. November. Das Schulgeld wird von Neujahr 1884 an für Prima auf jährlich 80 M für Secunda auf jährlich 72 Mk., für Tertia auf jährlich 60 Mk., für Quarta, Quinta und Se auf jährlich 48 Mk. festgesetzt.

9. December. Verfügung betreffend die Mobiliarausstattung des neuen Realgymnasialgebäudes ird getroffen.

13. December. Die Bewilligung von 5000 Mark zur Anschaffung physikalischer und chemischer pparate durch den Landtag des Herzogtums wird kundgegeben, und die Aufstellung eines Anschaffungs- anes verlangt.

15. December. Circularerlaß über erfolgte Normierung des Etats pro 1884/86 wird übersandt, ter Beifügung des Auszugs aus dem Staatshaushaltsetat derselben Periode betreffend das Herzogliche ealgymnasium.

22. December. Beglaubigte Abschriften der Zeugnisse sämtlicher an der Schule beschäftigten, ademisch gebildeten Lehrer über ihre Prüfung für das höhere Schulfach sollen eingereicht werden.

24. December. Für die Verwaltung der Bibliothek wird dem Direktor eine jährliche Remuneration n 100 Mark bis auf weiteres ausgesetzt. Für das Jahr 1883 wird dieselbe in Form einmaliger ratifikation gewährt.

3. Januar 1884. Herr Dr. Joh. Wuttig wird zunächst provisorisch in die zur Erledigung mmende Lehrerstelle vom 1. April an berufen.

15. Januar. Dem Professor Keller wird eine einmalige Remuneration von 200 Mark bewilligt.

22. Januar. Das Thema der dem Osterprogramme beizugebenden Abhandlung des Professor ößrich ist zur Kenntniß genommen worden. Über Reihenfolge der Lehrer höherer Unterrichts- stalten in der Heranziehung zur Abfassung des Programms wird Verfügung getroffen werden.

28. Januar. Eine neue Ordnung der Entlassungsprüfungen bei den Herzoglichen Realgymnasien rd mit Höchster Genehmigung Seiner Hoheit des Herzogs eingeführt und der Direktion zur Nach- htung zugefertigt.

30. Januar. Bestimmungen über Zulassung der diesjährigen Abiturienten zur Reifeprüfung an stern 1884 werden getroffen, sowie die Einreichung der vorzuschlagenden Aufgaben für das schriftliche camen nach der Kgl. Preußischen Prüfungsordnung befohlen.

13. Februar. Berichte des Direktors der Kaiserlichen Normal-Aichungs-Kommission vom 6. und r Direktion der deutschen Seewarte in Hamburg vom 22. Januar über gewisse Wirkungen der vul- nischen Katastrophe in der Sundastraße werden der Direktion zur Kenntnisnahme zugefertigt.

18. Februar. Herr Dr. Ahlburg wird in eine am Herzoglichen Realgymnasium an Ostern zur edigung kommende Lehrerstelle zunächst provisorisch vom 15. April ab berufen.

23. Februar. Dem Kandidaten des Höheren Schulamts Herrn Otto Hornbogen z. Z. in aalfeld wird die Ableistung des Probejahrs am Herzoglichen Realgymnasium daselbst von Ostern 1884 gestattet.

24. Februar. Verfügung betreffs der Ausstattung des physikalischen Kabinetts mit Apparaten, wie der etwa von der Summe für Mobiliarausstattung zum obengenannten Zwecke noch verfüglich eibenden Restbeträge.

25. Februar. Die Direktion wird darauf hingewiesen, daß der in der Gymnasialordnung, bschnitt VIII B, § 4 ff. festgesetzte Prozentsatz für Schulgeldbefreiungen von 10 % für ganze und 5 % r halbe Freistellen nicht nur nicht überschritten, sondern in der Regel nicht erreicht rden dürfe.

27. Februar. Aus der Edukationskasse werden vom Hohen Herzoglichen Staatsministerium an chüler des Realgymnasiums 170 Mark zu Stipendien verwilligt.

5. März. Direktiven über die Art der Beschäftigung der wissenschaftlichen Hilfslehrer, Probe- ndidaten 2c. werden gegeben, auch einige Bestimmungen in betreff der Verteilung der Unterrichtsfächer ter die Lehrer der Anstalt getroffen.

*

Am Schlusse des vorigen und im Laufe des gegenwärtigen Schuljahres gingen folgende Schüler

Nr.	Name des Schülers	Geburtsort	Erwählter Beruf oder Schule, auf welche dieselbe übergegangen sind
	Aus **Prima:**		
1	Albin Vollhardt I.	Reichenbrand, K. Österreich	Stud. d. Bergfachs.
2	William Vollhardt II.	Reichenbrand, K. Österreich	Stud. der neueren Sprachen.
3	Wilhelm Abt	Markneukirchen, K. Sachsen	Studium der Naturwissenschaften
4	Richard Greiner	Lehesten	Rechnungsfach.
5	Adolf Schilling	Pößneck	Studium der neueren Sprachen.
6	Hugo Rüdiger	St. Gangloff, Hzgt. Altenburg	Fürstl. Reußischer Forstdienst.
7	Harry Gedicke	Neustadt a/Orla, Ghzgt. Weimar	Studium der neueren Sprachen.
	Aus **Secunda:**		
8	Arthur Hilpert	Katharinau	Einjährig-Freiwilliger.
9	Hermann Fuchs	Wurzbach, Reuß j. L.	Einjährig-Freiwilliger.
10	Hermann Gürtler	Ohrdruf, Cob.-Gotha	Einjährig-Freiwilliger.
11	Johannes Rosenbusch	Teichroda, Schwarzb.-Rudolst.	Kaufmann.
12	Hans Cramer	Saalfeld	Musikus.
13	Theodor Bianchi	Hockeroda, Schwarzb.-Rudolst.	Kaufmann.
14	Otto Escher	Unterköditz, Schwarzb.-Rudolst.	Zahntechniker.
	Aus **Obertertia:**		
15	Max Klett	Ilmenau, Großhzgt. Weimar	Kaufmann.
16	Wilhelm Cramer	Saalfeld	Seemann.
	Aus **Untertertia:**		
17	Max Lemmerzahl	Saalfeld	Gymnasium Gera.
18	Emil Fischer	Pößneck	Kaufmann.
19	Gustav Heumann	Saalfeld	Kaufmann.
20	Ernst Hartmann	Hockeroda, Schwarzb.-Rudolst.	Realgymn. Meiningen.
21	Eduard Rüger	Saalfeld	Lithograph.
22	Paul Jürgensen	Mühlhausen i/Th., Preußen	Kaufmann.
23	Robert Hagenmüller	Pößneck	Färber.
24	Edmund Peetz	Lehesten	Kaufmann.
25	Hermann Hertwig	Saalfeld	Kaufmann.
26	Erwin Rosenbaum	Katzhütte, Schwarzb.-Rudolst.	Brauer.
27	Eduard Dehler	Saalfeld	Zimmermann.
28	Fritz Marlier	Saalfeld	Kupferschmied.
29	Paul Schenk	Jüdewein	Technikum Hildburghausen.
30	Alfred Schmidt	Saalfeld	Glaser.
	Aus **Quarta:**		
31	August Senf	Arnstadt, Schwarzb.-Sondersh.	Conditor.
32	Hugo Keilbar	Saalfeld	Zinngießer.
33	Ernst Kohlitz	Saalfeld	Schneider.
34	Max Blümer	Saalfeld	Kaufmann.
35	Max Böhme	Gotha, Hrzgt. Coburg-Gotha	Lebküchner.
36	Oskar Eilhauer	Beulwitz	Kaufmann.
37	Max Demmler	Saalfeld	Kaufmann.
38	Karl Fils	Saalfeld	Müller.

Nr.	Name des Schülers	Geburtsort	Erwählter Beruf oder Schule, auf welche dieselben übergegangen sind
39	Hugo Könitzer	Saalfeld	Kaufmann.
40	Otto Zetzsche	Schleiz, Fürstent. Reuß j. L.	Lithograph.
41	Richard Lehmann	Seifersdorf, Kgr. Preußen	Kaufmann.
42	Rudolf Patzert	Saalfeld	Kaufmann.
	Aus **Quinta:**		
43	Karl Schlözer	Saalfeld	Schlosser.
44	Paul Hickethier	Saalfeld	Schuhmacher.
45	Adolf Buschbaum	Wallendorf	Handelsschule in Gera.
46	Max Koch	Sonneberg	Kaufmann.
47	Albert Lautenschläger	Saalfeld	Posamentier.
48	Hermann Petzoldt	Dobian, Kgr. Preußen	Landwirt.
49	Paul Weidenhammer	Schlettwein	höhere Bürgerschule in Neustadt a/O.
50	Hermann Meiß	Saalfeld	Bäcker.
51	Ernst Freitag	Meiningen	Gymnasium in Meiningen.
52	Josef Hoyer	Schönbach b/Eger, K. Österr.	besucht e. höhere Schule in Prag.
53	Maurizio Brocca	Lugano, Cant. Tessin, Schweiz	Gastwirt.
54	Hugo Böttger	Königsee, Schwarzb.-Rudolst.	Schulanstalt in Keilhau.

Die Gesamtzahl der Schüler am Schlusse des Schuljahres ist 162; dieselben sitzen in folgender rdnung (vor der Oster-Versetzung) in den einzelnen Klassen:

Nr.	Name des Schülers	Alter	Geburtsort und Land	Stand des Vaters
	Prima:			
1	Eduard Voit	18 J. 11 M.	Saalfeld	Arzt. †
2	Hermann Korn	21 J. 4 M.	Schmiedefeld	Glashändler.
3	Ludwig Woelfel	21 J. 5 M.	Gräfenthal	Kreisgerichts-Registrator a. D.
4	Constantin Krauß	19 J. 10 M.	Eisfeld	Kaufmann. †
5	Richard Engelmann	21 J. 4 M.	Langenschade	Tischlermeister.
6	Ernst Haertel	18 J. 10 M.	Pößneck	Bürgermeister.
7	Hugo Frosch	18 J. 7 M.	Altsaalfeld	Ökonom.
8	Paul Hebenstreit	18 J. 9 M.	Saalfeld	Amtsanwalt.
9	Fritz Diez	19 J. 1 M.	Sonneberg	Kaufmann.
	Secunda:			
10	Ernst Seidel	18 J. 5 M.	Saalfeld	Schuhmacher.
11	Edmund Diez	17 J. 9 M.	St. Graba	Lehrer.
12	Max Breitung	16 J. 3 M.	Kranichfeld	Diakonus. †
13	Günther Macheleidt	17 J. 7 M.	Volkstädt, Schwarzb.-Rudolst.	Fabrikbesitzer. †
14	Max Schmidt	17 J. 1 M.	Saalfeld	Kaufmann.
15	Max Langbein	17 J. 3 M.	Gräfenthal	Kaufmann.
16	Reinhold Walther	17 J. 2 M.	Sonneberg	Kaufmann.
17	Max Schwesinger	16 J. 6 M.	Saalfeld	Realgymnasiallehrer.
18	Karl Engelhardt	17 J. 8 M.	Sonneberg	Kaufmann.
19	Veit Preß	17 J. 2 M.	Reitzenstein in Bayern	Schieferspediteur.
20	Paul Brandt	16 J. 9 M.	Schwarzenbrunn	Oberförster.

Nr.	Name des Schülers	Alter	Geburtsort und Land	Stand des Vaters
21	Alexander Wenzel	16 J. 7 M.	Saalfeld	Schlossermeister.
22	Richard Wagner I.	17 J. 5 M.	Saalfeld	Schmied.
23	Max Rühm	16 J. 11 M.	Scheibe, Schwarzb.-Rudolst.	Revierförster.
24	Arno Wagner II.	15 J. 7 M.	Saalfeld	Schmied.
	Obertertia:			
25	Rudolf Gebenroth	14 J. 9 M.	Ichtershausen, S.-Cob.-Gotha	Buchhalter.
26	Hermann Dietzel	16 J. 11 M.	Kaulsdorf, K. Preußen	Ökonom.
27	Max König	15 J. 6 M.	Saalfeld	Gerbermeister.
28	Max Hölbing	16 J. 7 M.	Milda	Gutsbesitzer.
29	Richard Kämmer	17 J. 1 M.	Birkenheide	Ökonom.
30	Otto Winter	14 J. 10 M.	Saalfeld	Registrator.
31	Alfred Scheler	18 J. 7 M.	Saalfeld	Kaufmann.
32	Otto Nippold	16 J. 5 M.	Eisfeld	Amtsassistent.
33	Louis Heinz	15 J. 3 M.	Neuhaus, Schwarzb.-Rudolst.	Perlenfabrikant.
34	Otto Brandt	15 J. 6 M.	Salzungen	Amtsverwalter.
35	Albert Wagner	16 J. 8 M.	Lichtentanne	Schieferbruchsbesitzer.
36	Karl Hofmann	16 J. 2 M.	Königsee, Schwarzb.-Rudolst.	Färbereibesitzer.
37	Heinrich Heubel	14 J. 7 M.	Stadtilm, Schwarzb.-Rudolst.	Arzt.
38	Karl Fischer	16 J. 1 M.	Kleindembach, Großh. S.-W.	Ökonom.
39	August Gundermann	17 J. 1 M.	Wallendorf	Postverwalter.
	Untertertia:			
40	Paul Keilbar	14 J. 6 M.	Graba	Nähmaschinenhändler.
41	Robert Martius	18 J. 3 M.	Klettigshammer, Reuß j. L.	Gastwirt.
42	Otto Füßlein	13 J. 9 M.	Saalfeld	Superintendent.
43	Otto Seifert	14 J. 3 M.	Crösten	Kantor.
44	Willy Franke I.	15 J. 9 M.	Saalfeld	Lehrer.
45	Otto Gernhardt	15 J. 7 M.	Saalfeld	Gerbermeister.
46	August Rischpler	15 J. 6 M.	Gräfenthal	Kaufmann.
47	Alexander Fuchs	14 J.	Saalfeld	Weißgerbermeister.
48	Eugen Anschütz	16 J. 5 M.	Saalfeld	Hutmacher.
49	Hermann Dietmann	14 J. 9 M.	Roßla, K. Preußen	Stadtkassenrendant.
50	Ernst Luthardt	14 J. 3 M.	Steinach	Kaufmann.
51	Oskar Reichenbächer	15 J. 9 M.	Herrschdorf	Rittergutspächter.
52	Paul Nippold	14 J. 6 M.	Eisfeld	Amtsassistent.
53	Ernst Hickmann	16 J.	Leutenberg, Schwarzb.-Rudlst.	Forstassistent.
54	Arthur Rothe	16 J.	Pößneck	Kaufmann. †
55	Karl Koch	14 J. 3 M.	Saalfeld	Postschaffner. †
56	Fritz Rüger	15 J.	Erfurt, K. Preußen	Bahnhofsinspektor.
57	Willy Franke II.	14 J. 9 M.	Saalfeld	Klempner.
58	Max Preß	16 J.	Lehesten	Schieferbruchsverwalter.
	Quarta:			
59	Max Fischer	15 J. 9 M.	Pößneck	Fabrikbesitzer.
60	Johannes Füßlein	12 J. 6 M.	Saalfeld	Superintendent.
61	Paul Balke I.	12 J. 9 M.	Saalfeld	Werkführer.
62	Oskar Siebert	14 J. 3 M.	Scheibe, Schwarzb.-Rudolst.	Cantor.
63	Karl Wiegand	14 J. 7 M.	Igelshieb	Kaufmann. †
64	Adolf Schwesinger	14 J. 2 M.	Saalfeld	Lehrer.
65	Gustav Birkigt	14 J. 9 M.	Saalfeld	Schneider.
66	Karl Grebehahn	14 J.	Reichmannsdorf	Kaufmann. †

Name des Schülers	Alter	Geburtsort und Land	Stand des Vaters
Hugo Engelmann	13 J. 8 M.	Graba	Maurermeister.
Ernst Biedermann	14 J. 2 M.	Saalfeld	Schornsteinfegermeister.
Max Keller	14 J. 4 M.	Saalfeld	Professor.
Max Müller	14 J.	Crösten	Ökonom.
Rudolf Walch	15 J. 6 M.	Salzungen	Rechtsanwalt. †
Oskar Voigtmann	14 J.	Lichte, Schwarzb.-Rudolst.	Kaufmann.
Max Engelhardt I.	14 J. 7 M.	Saalfeld	Strumpfwirker.
Wilhelm Hutschenreuther I.	13 J. 2 M.	Saalfeld	Hotelbesitzer. †
Friedrich Hopf	13 J. 7 M.	Themar	Lehrer.
Hermann Fuchs	14 J.	Saalfeld	Zeugarbeiter.
Otto Möller	15 J. 3 M.	Liebenstein	Gärtner. †
Hermann Sontag	13 J. 9 M.	Saalfeld	Restaurateur.
Max Lippold	13 J. 6 M.	Saalfeld	Maler.
Fritz Hutschenreuther II.	12 J. 1 M.	Saalfeld	Hotelbesitzer. †
Robert Beer	13 J. 9 M.	Saalfeld	Kaufmann.
Otto Schlick	13 J.	Saalfeld	Fabrikbesitzer.
Karl Schreider	14 J.	Falkenstein, Bayern	Gutsbesitzer.
Otto Liebmann	15 J.	Saalfeld	Restaurateur.
Karl Chelius	13 J. 3 M.	Maxhütte b. Regensbg., Bayern	Ober-Ingenieur.
Richard Scheidig	13 J. 5 M.	Saalfeld	Postkondukteur.
Karl Zapfe	12 J. 8 M.	Rickersdorf, Sachsen	Restaurateur.
Fritz Schwesinger	12 J.	Saalfeld	Lehrer.
Hermann Engelhardt II.	15 J. 1 M.	Saalfeld	Justierer.
Georg Schnädelbach	15 J. 2 M.	Saalfeld	Kaufmann.
Wilhelm Bickel	14 J.	Saalfeld	Seilermeister.
Albert Balke II.	14 J. 2 M.	Saalfeld	Werkführer.
Arno Busch	14 J. 2 M.	Kranichfeld	Maurermeister.
Richard Lange	14 J. 8 M.	Saalfeld	Lehrer. †
Quinta:			
Louis Pantzer	15 J. 6 M.	Lehesten	Ökonom.
Bernhard Wiesel	13 J.	Beulwitz	Ökonom.
Karl Heußinger	13 J. 11 M.	Birkigt	Lehrer.
Wilhelm Schreider	13 J. 4 M.	Gabegottes	Schieferbruchs-Direktor.
Hermann Hopf	12 J. 3 M.	Themar	Lehrer.
Paul Schäller	13 T. 2 M.	Pößneck	Fabrikbesitzer.
Paul Später	14 J. 6 M.	Hohe Sonne bei Eisenach	Bahninspektor. †
Otto Müller II.	14 J.	Meura, Schwarzb.-Rudolst.	Handelsmann.
Paul Griesmann	12 J. 3 M.	Jena	Realgymnasiallehrer.
Heinrich Franz	15 J. 3 M.	Rodacherbrunn, Reuß j. L.	Forstaufseher.
Hans Brandt	12 J.	Elsterberg, K. Preußen	Ober-Bürgermeister.
Arthur Keilbar	13 J. 4 M.	Saalfeld	Schlossermeister.
Hermann Eckardt	13 J.	Saalfeld	Handarbeiter.
August Trautwein	14 J. 11 M.	Alsbach, Schwarzb.-Rudolst.	Postverwalter.
Hugo Bickel	12 J. 1 M.	Steinach	Revisionsassistent.
Gustav Zapfe	11 J. 4 M.	Rickersdorf, Sachsen	Restaurateur.
Eduard Lerche	14 J. 11 M.	Saalfeld	Bäckermeister.
Ludwig Tittel	12 J. 10 M.	Saalfeld	Fabrikbesitzer.
Karl Mentzel	12 J.	Saalfeld	Zeugschmied. †
Wilhelm Knoch	12 J.	Saalfeld	Fabrikbesitzer.
Albert Hene	12 J.	Saalfeld	Lebküchner.

Nr.	Name des Schülers	Alter	Geburtsort und Land	Stand des Vaters
116	Otto Sauermilch	12 J. 6 M.	Lichtenhain bei Gräfenthal	Lehrer.
117	Reinhardt Rothe	13 J. 8 M.	Pößneck	Fabrikbesitzer. †
118	Lothar Dehler	15 J. 1 M.	Saalfeld	Fabrikbesitzer.
119	Carlo Lieblein	11 J. 2 M.	Saalfeld	Kaufmann.
120	Otto Lange	12 J. 4 M.	Saalfeld	Lehrer. †
121	Otto Könitzer	12 J. 1 M.	Saalfeld	Fabrikbesitzer.
122	Richard Müller I.	13 J. 9 M.	Saalfeld	Bäckermeister.
123	Max Jahn	13 J. 6 M.	Saalfeld	Brauereibesitzer. †
124	Hans Gerste	12 J. 4 M.	Saalfeld	Apotheker.
125	Karl Stier	14 J. 3 M.	Sonneberg	Puppenfabrikant.
126	Ewald Lehmann	11 J. 4 M.	Seifersdorf bei Sorau K. Pr.	Bleichereibesitzer. †
127	Karl Biedermann	11 J. 10 M.	Saalfeld	Schornsteinfegermeister.
128	Max Tiller	14 J.	Saalfeld	Bäckermeister.
129	Hugo Nöthlich	12 J.	Saalfeld	Hufschmiedemeister.
130	Alonzo Heyder	13 J. 7 M.	Saalfeld	Kaufmann.
	Sexta:			
131	Ludwig Engelmann	13 J. 4 M.	Garnsdorf	Ökonom.
132	Max Schau	11 J. 4 M.	Graba	Restaurateur.
133	Richard Fricke	11 J. 4 M.	Bremen	Marmorwarenfabrikant.
134	Berthold Heinze	11 J. 11 M.	Langenorla, Großh. S.-W.-E.	Fleischer.
135	Max Pflänzel	11 J. 3 M.	Saalfeld	Bäcker.
136	Adolf Häckel	13 J. 11 M.	Kaulsdorf, K. Preußen	Mühlenbesitzer.
137	Ludwig Kahle	10 J. 5 M.	Hildburghausen	Kaufmann. †
138	Franz Müller	10 J.	Graba	Brauereibesitzer.
139	Hermann Hickethier	11 J. 8 M.	Eichicht, Schwarzb.-Rudolst.	Holzhändler.
140	Clemens Fischer	12 J. 2 M.	Kleindembach, Großh. S.-W.-E.	Mühlenbesitzer.
141	Hermann Schulze	13 J.	Eisenberg, Herzogt. Altenb.	Kaufmann. †
142	Paul Vogel I.	12 J. 8 M.	Saalfeld	Fabrikbesitzer.
143	Otto Streitberger	11 J. 9 M.	Saalfeld	Stellmacher.
144	Karl Dehler	12 J 6 M.	Saalfeld	Fabrikbesitzer. †
145	Karl Spindler	11 J.	Dortmund, K. Preußen	Kaufmann.
146	Hugo Rühlmann	12 J. 3 M.	Saalfeld	Nähmaschinenfabrikant.
147	Karl Braun	11 J.	Pößneck	Amtsassistent.
148	Otto Zeitschel	11 J. 2 M.	Erfurt, K. Preußen	Kaufmann.
149	Max Ortloff	13 J. 1 M.	Beulwitz	Ökonom.
150	Rudolf Fehse	12 J. 4 M.	Könitz, Schwarzb.-Rudolst.	Bahnmeister.
151	Otto Demmler	11 J. 5 M.	Saalfeld	Schuhmachermeister.
152	Hilmar Bähring	11 J. 4 M.	Unterwirbach	Gastwirt.
153	Armin Fils	11 J. 9 M.	Altsaalfeld	Mühlenbesitzer. †
154	Fritz Hercher	11 J. 5 M.	Saalfeld	Kaufmann. †
155	Otto Frosch	11 J. 7 M.	Saalfeld	Zimmermeister.
156	Albert Beschnidt I.	12 J. 5 M.	Weißensee, K. Preußen	Droguist.
157	Hugo Lendewig	11 J. 10 M.	Saalfeld	Postschaffner.
158	Johannes Beschnidt II.	11 J. 6 M.	Weißensee, K. Preußen	Droguist.
159	Paul Rüger	11 J.	Gotha, Herzogt. Cob.-Gotha	Bahnhofsinspektor.
160	Max Vogel II.	11 J. 4 M.	Saalfeld	Fabrikbesitzer.
161	Albert Uhlendorf	11 J. 2 M.	Saalfeld	Heilgehilfe und Zahntechni-
162	Ernst Geske	10 J. 9 M.	Saalfeld	Kistenmacher. †

Zu der am **Montag** den **31. März** und **Dienstag** den **1. April,** von 9—12 und 2—3 Uhr, indenden **öffentlichen Prüfung** werden die Hohen Staats- und städtischen Behörden, die geehrten n unsrer Schüler, sowie alle, welche an der Anstalt freundliches Interesse nehmen, hierdurch er- ist eingeladen.

Die Reihenfolge der Prüfungsgegenstände wird folgende sein:

Montag den 31. März:

9—10 Uhr	I.	Religion, Herr Diakonus Scheler. Französisch, Herr Professor Hößrich.
10—11 „	II^a.	Mathematik, Herr Professor Hößrich. Chemie, Herr Realgymnasiallehrer Dr. Griesmann.
11—12 „	$II^{a\,u.\,b}$.	Physik, der Direktor.
	II^b.	Mathematik, Herr Realgymnasiallehrer Bandke.
2—3 „	III^a.	Latein, Herr Realgymnasiallehrer Heller. Geschichte, Herr Realgymnasiallehrer Wehner.

Dienstag den 1. April:

9—10 Uhr	III^b.	Englisch, Herr Realgymnasiallehrer Dr. Müller I. Geographie, Herr Realgymnasiallehrer Bandke.
10—11 „	IV.	Deutsch, Herr Realgymnasiallehrer Wehner. Latein, Herr Professor Keller.
11—12 „	V.	Französisch, Herr Dr. Müller II. Kopfrechnen, Herr Realgymnasiallehrer Schwesinger.
2—3 „	VI.	Deutsch, Herr Realgymnasiallehrer Schwesinger. Geschichte, Herr Dr. Müller II.

Zwischen den einzelnen Teilen des Examens werden deutsche und fremdsprachliche Vorträge ein- altet werden.

Die am **2. April** festlich zu begehende **Feier des höchsten Geburtstages Sr. Hoheit des ogs** wird vormittags 11 Uhr ihren Anfang nehmen und im Saale der Erholung stattfinden. verden hierzu die obengenannten hochverehrlichen Behörden, die Eltern und Angehörigen unserer ler, wie auch alle Freunde und Gönner der Schule überhaupt freundlichst und ergebenst hierdurch aden.

Der Beginn des neuen Schuljahrs des Herzoglichen Realgymnasiums fällt auf den **21. April,** il **7 Uhr.** Die Prüfung der neu aufzunehmenden Schüler findet am **Sonnabend den 19. April,** rittags **9 Uhr** statt. Die Recipienden haben Taufscheine und Impfatteste vorzulegen. Wohnungen r n nur mit Genehmigung des Direktors genommen werden.

Der Direktor des Herzoglichen Realgymnasiums.

Prof. Dr. Pinzger.

61420

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

8. Juni. **№ 10.** 1893.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Mai.

Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes.

Von

Friedrich Hultsch.

In der Kreismessung des Archimedes und in den Ueberresten der Heronischen Geometrie und Stereometrie finden sich ziemlich viele, fertig ausgerechnete Quadratwurzeln, ohne daß über die Methode der Ausrechnung irgend etwas überliefert wäre. Von vorn herein konnte als wahrscheinlich gelten, daß die Alten, wie sie überhaupt Brüche auf möglichst bequeme Abrundungen zu bringen pflegten, auch für den Ausdruck der irrationalen Wurzeln immer den kleinsten Näherungswert wählten, der nur passender Weise sich darbot. Indes hat sich bei den Nachrechnungen gezeigt, daß bisweilen eine minder genaue Abrundung statt der genaueren und leicht zu ermittelnden gewählt worden ist.

Es ist daher nicht zu verwundern, daß neuere Gelehrte verschiedene Wege eingeschlagen haben, um die Methoden wieder aufzufinden, nach denen einst Archimedes und Heron zu den uns überlieferten Wurzelwerten gelangt sind. Was bis zum J. 1882

über diese Frage erschienen war, ist von S. Günther[1]) eingehend besprochen und durch eigene Erklärungsvorschläge ergänzt worden. Später sind Untersuchungen von Weißenborn, Hunrath und Schoenborn hinzugekommen[2]).

In dem Schlußworte zu seinem Berichte über alle diese Schriften bemerkt Günther[3]), daß der Nachweis, die Alten hätten sich mit Sicherheit des einen oder andern Hülfsmittels bei der näherungsweisen Berechnung ihrer Quadratwurzeln bedient, weder bisher geführt worden ist, noch auch jemals ohne Beibringung neuer Originaldocumente wird geführt werden können. Neue Originalzeugnisse vermag nun zwar der Verfasser dieser Zeilen nicht beizubringen; aber er ist durch eine Reihe von Untersuchungen zur Geschichte der griechischen Arithmetik zu einigen Gesichtspunkten geführt worden, welche, in ihrem historischen Zusammenhange mit einander verknüpft, zur Klärung der noch schwebenden Frage verwendet werden konnten. Außerdem ergaben sich wesentliche Aufschlüsse aus einer streng analytischen Behandlung der Archimedischen Begrenzungen der Wurzel aus 3 und des Verhältnisses des Kreisumfanges zum Durchmesser.

I.

Es ist mit den Näherungswerten für $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ zu beginnen, denn diese sind zuerst von griechischen Mathematikern behandelt worden. Für $\sqrt{2}$ treten als Gewährsmänner Pythagoras, Platon und Aristarchos von Samos auf; $\sqrt{3}$ wurde zuerst berechnet von dem Mathematiker Theodoros, dem Lehrer Platons, dann von Archimedes; endlich erscheint bei Heron von A-

1) Die quadratischen Irrationalitäten der Alten. Abhandl. zur Geschichte der Mathematik, IV. Heft, Leipzig 1882.

2) H. Weißenborn, Bemerkungen zu den Archimedischen Näherungswerten der irrationalen Quadratwurzeln in Zeitschr. für Mathem. und Phys., hist.-lit. Abteil., XXVIII (1883) S. 81 ff.; ders., Die irrationalen Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron, Berlin 1883. K. Hunrath, Ueber das Ausziehen der Quadratwurzel bei Griechen und Indern, Progr. Hadersleben 1883; ders., Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Decimalbrüche, Kiel 1884. W. Schoenborn, Ueber die Methode, nach der die alten Griechen (insbesondere Archimedes und Heron) Quadratwurzeln berechnet haben in Zeitschr. für Mathem. und Phys., hist.-liter. Abteil., XXVIII (1883) S. 1 ff. Vgl. auch Heiberg in Philol. XLIII S. 485 f., Günther Quadrat. Irrational. S. 1 f., dens. Geschichte der antiken Naturwiss., Nördlingen 1888, S. 14—17.

3) Geschichte der antiken Naturwiss. S. 17.

dreia ein Näherungswert, welcher an Genauigkeit weit hinter Archimedischen Ausrechnung zurücksteht, gewiß aber als eine der schärferen Bestimmung führende Zwischenstufe schon von himedes benutzt worden ist.

Daß die Theorie des Irrationalen (ἡ τῶν ἀλόγων πραγμα-ε:) von Pythagoras erfunden worden ist, meldet das aus lemos entlehnte Mathematikerverzeichnis bei Proklos[1]), eine elle, die als durchaus zuverlässig sich erwiesen hat. In Ver-ilung mit der Angabe Platons, daß Theodoros die Irrationalität Wurzeln aus 3 bis 17 nachgewiesen habe, schloß M. Cantor Recht, daß die Wurzel aus 2 es gewesen sei, welche von hagoras geometrisch dargestellt und als incommensurabel zur hete des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes, mithin als eine irrationale Zahl nachgewiesen wurde[2]). Auf wel-n Wege aber Pythagoras der Bestimmung von $\sqrt{2}$ sich ge-ert hat, dafür ist ein Fingerzeig bei Platon an der Stelle er-en, wo er im engsten Anschluß an die Pythagoreische Zahlen-e über die sogenannte geometrische Zahl handelt[3]). Denn n hier eine ῥητή und eine ἄρρητος διάμετρος τῆς πεμπάδος nder gegenübergestellt werden, so ist damit auf die Diago-e eines Quadrates, dessen Seite zu 5 Längeneinheiten gesetzt il, hingewiesen. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatze ist diese igonale $= \sqrt{50}$, und dies ist die ἄρρητος διάμετρος Platons; nächste rationale Wert aber ist $\sqrt{50-1}$, d. i. die ῥητὴ διάμε-[4]). Wenn also Platon nach dem Vorbilde des Pythagoras den tionalen Werth $\sqrt{50}$ auf die Fünfzahl zurückführte, so ist mit zugleich auf des letzteren Untersuchungen über die Diago-des Quadrates über 1, d. i. auf $\sqrt{2}$ hingewiesen. Ja est ist durch die πεμπάς Platons zugleich der Weg angedeutet, auf hem Pythagoras die erste, leicht verständliche Näherung für gefunden haben muß, und zwar gilt dies sowohl für die geo-ische als für die arithmetische Darstellung. Statt des Radi-rus 2 mußte zunächst ein gleichwertiger Bruch derart gesucht len, daß der Nenner jedenfalls eine rationale Wurzel hatte, in die annähernde Wurzelberechnung sich nur auf den Zähler

[1]) Procli in I. Euclidis elem. libr. commentarii rec. G. Friedlein p. 65, 19.
[2]) Plat. Theaet. 147 D. Cantor Vorles. über Gesch. der Mathem. I S. 154. auch Günther Quadrat. Irration. S. 6.
[3]) Plat. de rep. VIII 546 B. C.
[4]) Cantor Vorles. I S. 191, und vgl. Hultsch in Zeitschr. für Mathem. und hist.-liter. Abteil., XXVII (1882) S. 48 mit Anm. 11, Hunrath Die Be-ung usw. S. 19.

erstreckte. Pythagoras wählte $\frac{5}{2}\frac{0}{5}$, und somit war $\frac{7}{5}$ die e
Annäherung für $\sqrt{2}$.

Damit war nun freilich noch bei weitem nicht nachgewie
daß $\sqrt{2}$ irrational ist, aber wir können mit einiger Wahrsch
lichkeit die Methode, nach welcher Pythagoras diesen Nach
führte, in den Hauptzügen wiederherstellen. Wieder erinnert
die Platonische ἄρρητος διάμετρος τῆς πεμπάδος daran, daß
Wert $\frac{7}{5}$ für $\sqrt{2}$ nicht bloß als Annäherung, sondern zugleich
eine erste Begrenzung, nämlich $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$, in Betracht kommen so
Die andere Begrenzung aber ging nicht minder sicher aus ei
Lehrsatze hervor, den wir in den Elementen des Euklid al
Proposition des II. Buches vorfinden und der in der arithmetis
Form bekanntlich $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ lautet. Der Euklidi
Beweis dieses Theorems fußt lediglich auf solchen Sätzen, we
im I. Buche der Elemente vor Propos. 47, d. i. vor dem Pyt
goreischen Lehrsatze, sich finden; alles aber, was bei Eu
die Voraussetzung für den Pythagoreischen Lehrsatz bildet
schon dem Pythagoras, sei es auch in anderer als der Euk
schen Form, bekannt gewesen, und es erscheint demnach ganz
bedenklich dem Pythagoras auch die Kenntnis des Satzes $(a+b$
$a^2+2ab+b^2$ zuzusprechen. An diesen schloß sich, wie gleich
zu bemerken ist, durch eine leichte Modification des geometris
Beweises die Differenzformel $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, welche
thagoras wohl ebenso wie die Formel der Summe gekannt
Sicherlich sind beide Formeln von Theodoros bei seinen Wu
bestimmungen angewendet worden.

Wenn nun Pythagoras zu der irrationalen $\sqrt{50}$ durch
ῥητὴ διάμετρος als erste Annäherung $\sqrt{50-1}$ setzte, so k
ihm nicht verborgen bleiben, daß nach der eben erwähnten
menformel eine weit genauere Annäherung durch $7+\frac{1}{14}$ darge
wird. Denn das Quadrat dieser Summe ist nur um $\frac{1}{14^2}$
Wir dürfen also gewiß mit Recht dem Pythagoras die erst
grenzung

$$7\tfrac{1}{14} > \sqrt{50} > 7$$

zuschreiben. Wie er dann weiter verfahren ist, darüber läßt
bei dem Mangel aller Ueberlieferung nichts sagen. Verschi
Wege standen ihm offen um zu erweisen, daß es unmöglich
zwischen den Grenzen $7\frac{1}{14}$ und 7 irgend eine aussprechbare
zu finden, deren Quadrat = 50 ist [1]).

1) Vielleicht hat Eutokios zu Archim. de dimens. circuli (Archim. op

Den arithmetischen Erwägungen über $\sqrt{50}$ haben gewiß auch ometrische Darstellungen zur Seite gestanden. Nachdem $\sqrt{50}$ Diagonale des Quadrates über 5 construiert war, lag es nahe, ch über dieser Diagonale ein Quadrat zu errichten und darin s Quadrat über 7 so einzuzeichnen, daß ein sogenannter Gnomon den Ueberschuß des größeren Quadrates über das kleinere rstellte. Da bei dem Pythagoreer Philolaos ein solcher *γνώμων* reits als üblicher terminus technicus erscheint, so dürfen wir ssen Erfindung wohl auf Pythagoras selbst zurückführen[1]). Ob d wie etwa diese geometrische Darstellung weiter geführt worn ist, um in Anlehnung an den arithmetischen Beweis zu zeign, daß die Diagonale des Quadrates über 5 weder zu der Gelen von 7 Längeneinheiten noch zu irgend einer andern Gerazahl von rationalem Zahlenwerte commensurabel ist, muß bei dem ngel jeglicher Ueberlieferung dahingestellt bleiben[2]). Doch ist

---

berg III p. 268. 270) eine Spur ältester Tradition aufbewahrt, indem er unter Berufung auf Heron und andere, welche die annähernde Berechnung von dratwurzeln gelehrt haben, feststellt: *ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιτόμεθα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν. τοῦτο δὲ ἁπλῶς μὲν εὑρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου ἀδύνατον. ἀριθμὲν γὰρ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος ποιεῖ τινα τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ θμὸς δὲ καὶ μόριον ἐφ' ἑαυτὰ γενόμενα οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ ιον.* Hier bedeutet, wie aus dem Zusammenhange hervorgeht, *ἀριθμὸς* althalben die ganze Zahl (*ἀριθμὸς πλήρης*). Wollte man, so argumentiert okios, von ganzen Zahlen, welche nicht Quadratzahlen sind, die rzel ausrechnen, so müßte das entweder eine ganze oder eine gebrochene l sein. Die ganzen Zahlen aber ergeben, mit sich selbst multipliciert, Quatzahlen, die gebrochenen Zahlen Brüche: mithin giebt es keine (aussprechbe) Zahl, welche, mit sich selbst multipliciert, eine ganze Zahl ergäbe, die ht Quadratzahl ist. Auch zwischen den oben gesetzten Grenzen $7\frac{1}{14}$ und 7 offenbar keine Zahl denkbar, welche, mit sich selbst multipliciert, die ganze l 50 ergäbe.

1) Böckh, Philolaos des Pythagoreers Lehren, Berlin 1819, S. 141 (Mullach gm. philos. Graec. II S. 4): *ὁ ἀριθμὸς — πάντα γνωστὰ καὶ ποτάγορα ἀλοις κατὰ γνώμονος φύσιν ἀπεργάζεται*, und vgl. die Erklärungen von Böckh 42 f., Cantor Vorles. I S. 136.

2) In weit späterer Zeit ist von Theon zur Syntaxis des Ptolem. I p. 185 f. Halma der Pythagoreische Gnomon zur annähernden Bestimmung einer dratwurzel, und zwar in sexagesimaler Ausrechnung, angewendet worden. Radicandus wird hier als Quadrat im Betrage von 4500 Quadrateinheiten gestellt. Eingezeichnet wird zunächst das Quadrat $67^2 = 4489$ Quadrateiten. Weiter wird der überschießende Gnomon so zerlegt, daß zuerst Rechtecke ausgeschieden werden, welche dem doppelten Producte der 67 zen mal 4 Sechzigsteln entsprechen. Dann wird auch das Quadrat von echzigsteln ausgeschieden und der dann übrig bleibende Gnomon gedeutet

zum Schluß noch darauf hinzuweisen, daß, wenn einmal teils d arithmetische, teils durch geometrische Erwägungen $\sqrt{50}$ als tional erkannt war, der Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{}$ $\frac{1}{5}\sqrt{50}$ keine Schwierigkeit machen konnte.

II.

Den Nährungswert $\sqrt{2} > \frac{1}{5}\sqrt{50-1}$ hat auch Aristarc von Samos im 7. Satze seiner Schrift *περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστ των ἡλίου καὶ σελήνης* verwendet[1]). Da der betreffende Teil s Beweisführung vorbildlich für den ersten Teil des Beweises i Theorem der Kreismessung des Archimedes ist, so mögen hie Schlußfolgerungen des Aristarch, so weit sie mit der Methode Archimedes vergleichbar sind, in einer freieren, den Text Schriftstellers ergänzenden und erläuternden Bearbeitung wi gegeben werden.

Fig. 1. Aristarch will erweisen, daß in dem rechtwinkligen Dr *ABΓ*, welches nach Construction dem Dreieck *BΘE* ähnlich das Verhältnis der Seiten $\frac{AB}{B\Gamma} > 18$ ist. Um zu diesem E gebnis zu gelangen, werden nach dem allgemeinen Gebrauch griechischen Mathematiker Ketten von Verhältnissen gebildet zwar sind die Verhältnisse von Geraden mit Verhältnissen Zahlen derart zu vergleichen, daß zuletzt das obige Verhä $AB : B\Gamma > 18 : 1$ sich ergiebt.

Vorausgesetzt wird, daß *ABEZ* ein Quadrat, *BZ* dessen gonale, $\angle HBE = \frac{1}{2}\angle ZBE$, und $\angle \Theta BE = 3^0$, endlich daß schon bemerkt wurde, $\angle A\Gamma B = \mathrm{R}$ ist. Um die Winkel

---

als das annähernde geometrische Aequivalent für $2\,(67^0\,4')\,55'' + 55''^2$. Di des Quadrates im Betrage von 4500 Quadrateinheiten ist also berechnet Ganzen, 4 ersten Sechzigsteln und nahezu 55 zweiten Sechzigsteln. Vgl. Vorles. I S. 420, Günther Quadrat. Irration. S. 26 f.

1) Aristarchi Samii de magnit. et distant. solis et lun. liber ed. W dessen Opera mathem. vol. III, Oxoniae 1699, p. 581 ff. Histoire d'Ari de Samos par F(ortia d'Urban), Paris 1810, p. 32 ff. (bei diesem sind d positionen 2—18 der Wallisschen Ausgabe gezählt als 3—19). Vgl. auc starchos über die Größe und Entfernungen der Sonne und des Mondes, üb und erläutert von A. Nokk, Progr. Freiburg 1854. [Vor der Benutzu „*ΑΡΙΣΤΑΡΧΟΥ ΣΑΜΙΟΥ ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΡΙ ΜΕΓΕΘΩΝ* — mit kritisch richtigungen von E. Nizze", Festschr. zum Jubil. der Greifswalder Univ., sund 1856, ist zu warnen, da diese Ausgabe sowohl im Text als in den kungen nicht bloß eine Menge von Ungenauigkeiten, sondern auch nicht Flüchtigkeitsfehler der gröbsten Art enthält.]

E, *ΘBE* mit einander zu vergleichen, setzt Aristarch den rechten Winkel als Einheit und teilt ihn sexagesimal. Es ist also

$$\left.\begin{array}{l} \angle ZBE = 30 \\ \angle HBE = 15 \\ \angle \Theta BE = 2 \end{array}\right\} \text{Sechzigsteln des rechten Winkels}^{1}).$$

Es werden nun nach einander zwei Verhältnisse von Geraden größer als gewisse Zahlen bestimmt.

(A) Es ist nämlich nach einem Hülfssatze, welcher als bekannt vorausgesetzt und deshalb hier nicht erwähnt wird[2]), in den rechtwinkligen Dreiecken *HBE* und *ΘBE*

---

1) Pag. 581 f. der Ausg. von Wallis: *ἔσται δὴ ἡ ὑπὸ τῶν ZBE γωνία ἡμιόρθης. τετμήσθω ἡ ὑπὸ τῶν ZBE γωνία δίχα τῇ BH εὐθείᾳ· ἡ ἄρα ὑπὸ HBE γωνία τέταρτον μέρος ἐστὶν ὀρθῆς. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΔBE γωνία (∠ΘBE) τριακοστόν ἐστι μέρος ὀρθῆς· λόγος ἄρα τῆς ὑπὸ τῶν HBE γωνίας πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ΔBE γωνίαν, ὃν ἔχει τὰ ιε πρὸς τὰ δύο· οἷων γὰρ ἐστὶν ὀρθὴ τα ξ̄, τοιούτων ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ τῶν HBE ιε, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν ΔBE δύο* (Wallis hat *ἡ δὲ δβε*, das fehlende *ὑπὸ τῶν* hat Fortia d'Urban hinzugefügt; von demselben rührt auch *τῶν* hinter den obigen Worten *ἔσται δὴ ἡ ὑπὸ* her). Aus diesen Schlußworten ist zu ersehen, daß schon Aristarch die Sexagesimalteilung benutzt, wie sie später Ptol. Synt. I p. 28 der Ausg. von Halma: *ἡ διὰ δωδεκαγώνου πλευρά, ὑποτείνουσα δὲ περιφέρειαν τοιούτων ις οἷων ἐστὶν ὁ κύκλος τξ, τοιούτων ἔσται ις δ′ νε′ οἷων ἡ διάμετρος ρκ*, und so häufig im Folgenden (die Kreisperipherie hat bei Ptolemaios 6 × 60, der Diameter 2 × 60 Teile).

2) Archimedes in der Sandrechnung (p. 260 Heiberg) setzt voraus, daß zwei rechtwinklige Dreiecke eine Kathete gleich, die andere aber ungleich haben. Dann führt er einen Lehrsatz in allgemeiner Fassung an, welcher in angewandter Form auf folgende zwei Behauptungen zurückgeführt werden kann: wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken *ABΓ* und *ABΔ* die Kathete *AB* gemeinsam und die Kathete $B\Gamma > B\Delta$ ist (Fig. 2), so ist

$$a)\ \frac{\angle A\Delta B}{\angle A\Gamma B} > \frac{A\Gamma}{A\Delta},\ \text{und}\ b)\ \frac{\angle A\Delta B}{\angle A\Gamma B} < \frac{\Gamma B}{\Delta B}.$$

Der bei Archimedes fehlenden Beweis hat Commandino in seiner lateinischen Bearbeitung von Archimedis opera, Venetiis 1558, fol. 62 (vgl. Heiberg Quaest. Archimedeae, Kopenhagen 1879, S. 204 f.) nach geometrischer Methode ergänzt und Nizze in seiner Uebersetzung des Archim. S. 214 f. auf die trigonometrische zurückgeführt, wonach, wenn $\angle\alpha > \angle\beta$ ist, $\frac{\text{tang.}\alpha}{\text{tang.}\beta} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta}$ ist. Der soeben unter *b*) angeführte zweite Teil des Archimedischen Satzes erscheint als besonderes Lemma beim Scholiasten zur Sphärik des Theodosios (herausg. von Hultsch in den Abhandl. der Leipziger Gesellsch. der Wissensch., philol.-hist. Cl., X, 1887, S. 440 f.) und zwar in angewandter Form: *ἔστω τρίγωνον τὸ γώνιον τὸ ABΓ, καὶ ἤχθω τις ἡ AΔ* (nämlich bis zur Kathete *BΓ*)· *δεῖξαι*

$$\frac{HE}{\Theta E} > \frac{\angle HBE}{\angle \Theta BE}, \text{ mithin nach Construction}$$

$$\frac{HE}{\Theta E} > \frac{15}{2}.$$

(B) Nach Construction ist $BZ^2 = 2\,BE^2$. Es ist aber (na Eukl. Elem. VI, 3)

$BZ : BE = ZH : HE$, mithin auch (Elem. VI, 22)

$ZH^2 = 2\,HE^2$, und

$ZH = \sqrt{2}\,HE$. Da nun $\sqrt{2} > \sqrt{\frac{50-1}{25}}$ ist, so ist

---

ὅτι ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία πρὸς τὴν ΑΓΒ, und hierzu ist ein Beweis hinzugefügt, der, wenigstens im Sinne altg chischer Mathematik, eleganter verläuft als jener von Commandino. Außerd ist der von Archimedes angeführte Satz frühzeitig dahin ergänzt worden, unter denselben Voraussetzungen, wie vorher, auch $\frac{\angle \Gamma AB}{\angle \Delta AB} < \frac{\Gamma B}{\Delta B}$ ist. Hie ist die allgemeine Fassung uns nicht überliefert; sie ist darauf hinausgegang daß, wenn zwei rechtwinklige Dreiecke eine Kathete gleich, die andere aber gleich haben, der der größeren Kathete gegenüberliegende Winkel zu dem kleineren Kathete gegenüberliegenden in einem kleineren Verhältnis steht, die größere Kathete zur kleineren. Auf diesem Satze hat Aristarch an der gen Stelle gefußt. Er lautet in angewandter Form beim Scholiasten zu Pap (Pappi collectio ed. Hultsch vol. III p. 1167): *ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ Α ὀρθὴ δὲ ἡ Κ γωνία, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ ΗΜ εὐθεῖα· λέγω ὅτι ἡ ΑΚ ΚΜ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΜΗΚ*, und lich bei Zenodoros im Commentar des Theon zu Ptolem. Synt. I p. 34 f. Ha Der Beweis findet sich nicht nur beim Scholiasten zu Pappos und bei Zenodo a. a. O., sondern auch beim Anonym. de fig. isoperim. (Pappi collect. ed. Hul vol. III p. 1142). Auf diesen Satz verweist Pappos V, 1 (p. 310, 5), d. i. an Stelle, zu welcher das eben angeführte Scholion beigefügt ist, mit den Wor *τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς εἰς τὰ σφαιρικὰ λήμμασιν δέδεικται.* Andere *λήμματα σφ κῶν* führt er p. 338, 13 und 1052, 2 an. Schon vor Theodosios aber hat es ältéres Lehrbuch der Sphärik gegeben, welches sich zurück bis in das 4. Ja v. Chr. verfolgen läßt. Spätestens zu Ende des 4. Jahrh. ist dann auch Sammlung von *λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά* veranstaltet worden, in welcher starch, Archimedes, Zenodoros, Theodosios und Spätere die oben angefüh Hülfssätze vorgefunden haben. Die Bekanntschaft mit diesen Sätzen wurde allen der Mathematik Beflissenen ebenso vorausgesetzt wie die Kenntnis Elemente der Planimetrie, Stereometrie und Sphärik nach den Lehrbüchern Euklid und Theodosios, bez. in früheren Zeiten nach älteren Lehrbüchern, w dann von Euklid und Theodosios in ihre Elementarbücher eingearbeitet wu Vgl. Hultsch zu Pappos vol. III p. 1234 f., dens. in Fleckeisens Jahrb. S. 415 f. und in den Berichten der Leipziger Gesellsch. der Wissensch., phil. hist. Cl., 1885 S. 170 ff., 1886 S. 127 f. 129 ff.

$ZH : HE > 7 : 5$, mithin auch [1])

$$\frac{ZH + HE}{HE} > \frac{7+5}{5}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{ZE}{HE} > \frac{12}{5}.$$

(C) Nun werden die Resultate

$$\text{(B)} \quad \frac{ZE}{HE} > \frac{12}{5}, \text{ d. i. } > \frac{36}{15}, \text{ und}$$

$$\text{(A)} \quad \frac{HE}{\Theta E} > \frac{15}{2}$$

der Formel $\delta\iota'$ $\ddot{\iota}\sigma\sigma\upsilon$ [2]) verbunden zu

$$\frac{ZE}{\Theta E} > \frac{36}{2}, \text{ d. i. } > 18.$$

nun $ZE = BE$, und $B\Theta > BE$ ist, so ist um so mehr

$$\frac{B\Theta}{\Theta E} > 18.$$

ist auch schließlich, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke und $AB\Gamma$,

$$\frac{AB}{B\Gamma} > 18.$$

Hierauf folgt der zweite Teil des Beweises, der es nur mit ältnissen von Winkeln, Kreisbögen und Sehnen zu thun hat. diesem Wege wird erwiesen

$$\frac{AB}{B\Gamma} < 20.$$

) Diese Folgerung bezeichnet Aristarch kurz mit $\sigma\upsilon\nu\theta\acute{\varepsilon}\nu\tau\iota$. Was $\sigma\acute{\upsilon}\nu\theta\varepsilon\sigma\iota\varsigma$ bedeute, erklärt Euklid Elem. V def. 14. Der von Aristarch hier angeete Hülfssatz ist von Pappos Synag. VII, 3 bewiesen.

) Nach Eukl. Elem. V def. 17 ist, wenn $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$, und $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$ gesetzt auch $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$. Daß auch, wenn $\frac{a}{b} < \frac{d}{e}$, und $\frac{b}{c} < \frac{e}{f}$ gesetzt wird, $\frac{d}{f}$ ist, beweist Pappos Synag. III, 3. 4. Hiernach läßt sich der enthende Beweis für $\frac{a}{c} > \frac{d}{f}$, welchen Aristarch als anderswo erledigt bei läßt, leicht ergänzen.

Wie eng Archimedes im ersten Teile seiner Beweisführu zur 3. Propos. der Kreismessung an den hier dargestellten erst Teil des Aristarchischen Beweises sich angeschlossen hat, wi später sich zeigen. Er erhebt sich aber über seinen Vorgäng dadurch, daß er für $\sqrt{3}$ eine weit genauere Begrenzung wäh als jener für $\sqrt{2}$. Doch ist Aristarch deshalb nicht etwa tadeln. Er war sich bewußt, daß sein Beweis zwar formell un fechtbar, aber seine Voraussetzungen, soweit sie auf astronomisch Beobachtungen beruhten, mit Fehlern behaftet seien; deshalb gnügte er sich damit das Verhältniß $AB : B\Gamma$ zwischen die Gr zen 20 und 18 einzuschließen. Um aber zu erweisen, daß $\frac{AB}{B\Gamma} >$ ist, reichte die Begrenzung $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$ vollkommen aus.

III.

Indem wir nun von $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ übergehen, haben wir es nächst mit Theodoros, dem Lehrer Platons, zu thun. D Wortlaute der bereits erwähnten Stelle des Theaetet (p. 147 fügen wir eine dem heutigen Sprachgebrauche möglichst angepa Uebersetzung bei:

Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε[1]), Die Quadratwerte verdeutlichte Theodoros durch (geometrische) Zeichn

1) Nicht ohne Absicht hat Platon *ἔγραφε* als Hauptverbum und dazu *ἀπο-φαίνων* als Nebenhandlung gesetzt. Durch *γράφειν* wird nicht etwa bloß Zeichnen von Quadraten von 3, 5 u.s.w. Flächeneinheiten, sondern die ga und zwar in diesem Falle ziemlich complicierte Anlage der verschiedenen guren bezeichnet, mit deren Hülfe die Beweise, daß $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ u.s.w. zu 1 commensurabel sind, geführt wurden. Das galt nach dem Berichte Platons die Hauptsache. Die dann folgende Demonstration (*ἀποφαίνειν*) nach der ständlichen Methode, welche wir nach den ältesten, voreuklidischen Bestt teilen der Elemente annähernd uns vorstellen können, tritt bei unserm Beri erstatter als mehr nebensächlich zurück. So erklärt sich auch die von Heil bei Archimedes aren. p. 244, 9 hergestellte Lesart: *Ἀρίσταρχος δὲ ὁ Σάμιος ὑ-θεσίων τινῶν ἐξέδωκεν γραφάς, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει τὸν κό-σμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου.* Hier ist von den Hypothesen die Rede, durch welche Aristarch sein heliocentrisches System darstellte. Er nicht allein die Hypothesen hatte er ausgesprochen, sondern sie auch durch geometrische Darstellungen, soweit als möglich, begründet. Das sind die *ὑ-θεσίων γραφαί* bei Archimedes, und diese Bezeichnung ist so treffend, daß man wohl annehmen darf, schon Aristarch selbst habe seine Schrift so betitelt. bei Pappos V p. 284, 24: (*τὸ πρόβλημα*) *δέδεικται μὲν ὑπὸ τῶν νεωτέρων, ἀπο-φήσεται δὲ καὶ ὑφ' ἡμῶν δι᾽ χῶς*, VII p. 638, 11: (*τὸ θεώρημα*) *γραφόμενόν ἐστιν*, d. h. beruht auf einer linearen Darstellung (mit welcher bereits das Haupts

ῆς τε τρίποδος πέρι καὶ
εντέποδος ἀποφαίνων,
τι μήκει οὐ σύμμετροι
ῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κα-
ὰ μίαν ἑκάστην προαι-
ούμενος μέχρι τῆς ἑπτα-
καιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύ-
ῃ πως ἐνέσχετο.

gen, indem er nachwies, daß die Seiten der Quadrate im Betrage von 3 und 5 Quadratfuß incommensurabel sind zu 1 Längenfuß (wörtlich „zur Seite des Quadrates im Betrage eines Quadratfußes"). Weiter stellte er sich die gleiche Aufgabe für jedes der folgenden Quadrate bis zu demjenigen im Betrage von 17 Quadratfuß, über welches er (mit seinen Beweisführungen) nicht hinausging.

Theodoros hat also die Wurzeln aus 3, 5 u. s. w. bis 17 geo-
etrisch dargestellt und nachgewiesen, daß sie incommensurabel
ı 1, mithin auch incommensurabel zu jeder rationalen Zahl, mit
nem Worte, daß sie irrational sind. Daß von dieser Reihe
$\overline{4}$ ausgeschlossen war, geht aus den Worten Platons hervor. Das-
lbe gilt selbstverständlich auch von $\sqrt{9}$ und $\sqrt{16}$, und weil es
lbstverständlich ist, hat Platon die Ausschließung dieser Wurzel-
erte nicht besonders erwähnt.

Es ist nun zu untersuchen, ob etwa die von Theodoros ent-
orfenen Zeichnungen wenigstens zum Teil sich wiederherstellen
ssen. Zunächst ist an jene zusammenhängende Darstellung zu
innern, welche von dem gleichschenkligen rechtwinkligen Drei-
ke ausgeht (Fig. 3). Indem jede der Katheten = 1 gesetzt
ird, erhält die Hypotenuse den Wert $\sqrt{2}$. An diese wird eine
athete wieder = 1 angelegt und die Hypotenuse = $\sqrt{3}$ gezogen
ıd so fort, sodaß jede nächste Hypotenuse die Wurzel aus der
ichstfolgenden Zahl darstellt. Das erscheint uns Neueren mit
echt als das geeignetste Verfahren die Reihe der Wurzeln aller
ıanzen Zahlen geometrisch zu versinnbildlichen; allein für die er-
en Anfänge der griechischen Lehre von den Wurzeln dürfen wir
lche allgemeine Anschauungen schlechterdings nicht voraussetzen[1]).

---

he des Beweises gegeben ist). Auch VII p. 650, 1—3: *τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου*
αφεῖσι — δευτέρας γραφὰς — παρατεθείκασιν erinnert an diesen Sprachge-
auch.

1) Daß alle griechische Geometrie mit der Setzung specieller Fälle und mit
nzelbeweisen begonnen hat, ist von Cantor u. a. mehrmals gelegentlich be-
rkt worden, verdient aber noch eine besondere, zusammenhängende Unter-
chung. Nur ganz allmählich hat man auch zu allgemeineren Anschauungen
h erhoben. Um nur ein Beispiel anzuführen, so finden wir bei Archimedes
I. Buche über Kugel und Cylinder den Satz: „Die Oberfläche eines Kugel-
gmentes ist gleich einem Kreise, der zum Halbmesser die Sehne vom Pole
s Segmentes bis zur Peripherie des Grundkreises hat", in drei Teile gespal-

Platon sagt ausdrücklich, daß Theodoros jedes Quadrat n seiner irrationalen Seite für sich betrachtete: *κατὰ μίαν ἑκάστ προαιρούμενος*. Es bedurfte also nicht bloß einer besondern gr phischen Darstellung für jede einzelne Wurzel, sondern dazu au anderer Figuren und umständlicher Beweisführungen, um die Ir tionalität einer jeden Wurzel außer Zweifel zu stellen. So erkl es sich auch, daß Theodoros nicht über die *ἑπτακαιδεκάπους δύ μις* und deren Wurzel hinausging: *ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο*. Hä er einen allgemeinen Abschluß seiner Beweisführungen gefund so würde Platon hier einen andern Ausdruck gewählt haben. aber deutet *ἐνέσχετο* und besonders das beigefügte *πως* genugs an, daß ein rationell mathematischer Grund nicht vorlag, um grade bis $\sqrt{17}$ und nicht weiter zu gehen. Es war ein langwierig und mühsamer Weg gewesen. Wäre er auf derselben Bahn no weiter fortgeschritten, so würde die Wahrscheinlichkeit, d überhaupt die Wurzeln aus ganzen, nicht quadratischen Zahlen rational sind, nicht wesentlich erhöht worden sein. Also wur schon hier, nicht allzufern vom Ausgangspunkte, Halt gemac mochten dann andere, wenn sie noch weiter gehen wollten, n den erteilten Weisungen auf demselben Wege fortschreiten.

Wir haben nun nach den möglichst einfachen Darstellung der Wurzeln aus 3, 5 u. s. w. bis 17 zu suchen. Ohne Zweifel ben allenthalben rechtwinklige Dreiecke zu Grunde gelegen, u zwar sind zunächst solche gewählt worden, bei denen aus zw rationalen Seiten die dritte irrationale unmittelbar nach dem P thagoreischen Lehrsatze sich ergab. Zugleich war noch eine a dere Rücksicht maßgebend. Da über jeder, eine irrationale Wur darstellenden Seite auch das Quadrat, d. i. nach Theodoros *τρίπους δύναμις*, *πεντέπους δύναμις* u. s. w. construiert wurde, mußte es unmittelbar aus der Figur ersichtlich sein, daß je dieser Quadrate ein Soundsovielfaches der *ποδιαία δύναμις*, d der Flächeneinheit, ist. Das war aber nur möglich, wenn die nige Seite, an welche das Einheitsquadrat sich anlehnte, entwe selbst die Längeneinheit oder ein Vielfaches derselben war. N solchen Erwägungen sind die folgenden Constructionen, und zw

---

ten, und zwar handelt Satz 42 (nach der Zählung von Heiberg = 48 Tor von dem Segmente, welches kleiner, und Satz 43 (= 49) von dem Segme welches größer als eine Halbkugel ist. Der Satz für die Halbkugel selbst findet sich nirgends ausgesprochen; er ist aus Propos. 33 (= 35) zu entnehm s. Hultsch zu Pappos Synag. V p. 383. 387. Die allgemeine Fassung des Sa und die entsprechende Beweisführung hat erst um reichlich 5 Jahrhunderte Archimedes Pappos V Propos. 28 (vgl. mit p. 362, 17—21) aufgestellt.

lmählich vom Einfacheren und Leichteren zu dem Schwierigeren rtschreitend, entworfen worden.

Pythagoras war, um eine Annäherung für $\sqrt{2}$ zu finden, von m gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke ausgegangen. ir $\sqrt{3}$ läßt sich keine einfachere Darstellung denken als die am gleichseitigen Dreiecke mit der eine Seite halbierenden Norale. So hat es Archimedes gehalten, so gewiß schon vor ihm heodoros. Indem wir uns an die Redeweise des letzteren anschließen, setzen wir seine *μήκει ποδιαία δύναμις*, d. i. den Längenfuß (im Gegensatze zum Quadratfuß), als Längeneinheit, und zwar bei der hier vorliegenden Aufgabe als halbe Seite des gleichseitigen Dreieckes, und finden demnach in Fig. 4 die *ποείκία* und *τρίπους δύναμις* durch die Quadrate über $B\Gamma$ und $A\Gamma$, d $\sqrt{3}$ durch die Seite $A\Gamma$ dargestellt.

Um $\sqrt{5}$ darzustellen wurde die eine Kathete des gleichschenkgen rechtwinkligen Dreieckes um 1 Längeneinheit verlängert. e Hypotenuse ergab dann $\sqrt{5}$, und das Quadrat über dieser Hytenuse stellte die von Platon erwähnte *πεντέπους δύναμις* dar ig. 5).

Diese beiden, hier wiederhergestellten Figuren verdeutlichen gleich die Methode des Theodoros, seine Quadrate sowohl als ren Seiten auf die Einheit zurückzuführen: *τῆς τε τρίποδος πρι (δυνάμεως) καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων, ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τ ποδιαίᾳ*. Das Quadrat über $A\Gamma$ in Figur 4, und das über Δ in Fig. 5 sind bestimmte Vielfache des Quadrates über $B\Gamma$, di. der Flächeneinheit; allein die Seiten jener Quadrate s d (wie noch zu erweisen ist) nicht commensurabel zur Seite $B\Gamma$, di. zur Längeneinheit. Demnach ist anzunehmen, daß auch d übrigen, von Theodoros construierten Quadrate und Wurzeln zu d Flächen- und Längeneinheit in leicht erkennbare Beziehungen gbracht worden sind.

Wir setzen also fernerhin die Kathete $B\Gamma$ als Längeneinheit ud den Winkel bei Γ als rechten. Nun ziehen wir nach einander

a) die Kathete $A\Gamma = 3\,B\Gamma$
b) „ „ „ $= 4\,B\Gamma$
c) die Hypotenuse $AB = 3\,B\Gamma$
d) „ „ „ $= 4\,B\Gamma$,

ud erhalten so vier verschiedene rechtwinklige Dreiecke $AB\Gamma$, d wir kurz mit a, b, c, d bezeichnen und deren Katheten $B\Gamma$ gleichßig die Seite der *ποδιαία δύναμις* des Theodoros darstellen. Fernach ergeben sich

im Dreieck a die Hypotenuse $= \sqrt{3^2+1} = \sqrt{10}$
„ „ b „ „ $= \sqrt{4^2+1} = \sqrt{17}$
„ „ c die größere Kathete $= \sqrt{3^2-1} = \sqrt{8}$
„ „ d „ „ „ $= \sqrt{4^2-1} = \sqrt{15}$.

Betreffs $\sqrt{8}$ möge nicht unbemerkt bleiben, daß sie auch Hypotenuse des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes, de Katheten je $= 2$ gesetzt waren, construiert werden konnte. A weshalb hätte Theodoros von der eben aufgestellten Reihe, we gleichmäßig auf der *ποδιαία δύναμις* als dem Quadrate der neren Kathete aufgebaut ist, in diesem einen Falle abweichen len, um eine weniger evidente Construction zu wählen?

Ueber jeder Seite, welche eine von den ebenerwähnten V zeln darstellte, hat Theodoros das Quadrat errichtet. Die nennung *ἑπτακαιδεκάπους δύναμις* für das Quadrat von 17 Fläc einheiten hat Platon uns überliefert; außerdem aber geht aus nem, leider so kurzen Berichte, insbesondere aus den Worten *μίαν ἑκάστην προαιρούμενος*, hervor, daß Theodoros auch die drücke *δεκάπους*, *ὀκτάπους*, *πεντεκαιδεκάπους δύναμις* gebraucht

Somit sind nach den Spuren der Platonischen Ueberliefer sechs unter den von Theodoros behandelten Wurzeln in der d bar einfachsten Weise so wiederhergestellt worden, daß in s rechtwinkligen Dreiecken die kleinere Kathete gleichmäßig Längeneinheit, und teils die größere Kathete teils Hypotenuse der Reihe nach zu 2, 3, 4 Längeneinheiten ge wurden.

Unter den noch übrigen sechs Wurzeln ist zunächst $\sqrt{13}$ vorzuheben, weil ihr Radicandus die Summen der Quadrate v und 3 darstellt. Auch hier konnten also zwei rationale Za als Dreiecksseiten gesetzt werden, um danach die dritte, irr nale Seite zu construieren (Fig. 6). Indem wir hier, und so im Folgenden, die Längeneinheit gleichwie vorher mit $B\Gamma$ zeichnen, erhalten wir in dem rechtwinkligen Dreieck $A\Delta\Gamma$, de Seiten $\Delta\Gamma = 2\,B\Gamma$, und $A\Gamma = 3\,B\Gamma$ gesetzt sind,

$$A\Delta = \sqrt{13}.$$

Das Quadrat über $A\Delta$ hat Theodoros *τρεισκαιδεκάπους δύναμις* nannt. Nach Ausweis der Construction war die *ποδιαία δύν* in dem Quadrat über $\Delta\Gamma$ 4 mal, in dem Quadrat über $A\Gamma$ 9 mithin in dem Quadrat über $A\Delta$ 13 mal enthalten.

Um zu den noch übrigen fünf Wurzeln zu gelangen, wa nicht mehr möglich zwei Seiten als Vielfache der Längenei

onstruieren; es steht aber wohl außer Zweifel, daß Theodoros e Construction zugelassen hat, bei welcher nicht wenigstens e Seite rational und ein Vielfaches der Längeneinheit war. Versuche, $\sqrt{6}$ als Hypotenuse zu den Katheten $\sqrt{3}$ und $\sqrt{3}$, ähnlich $\sqrt{12}$ und $\sqrt{14}$ darzustellen, sind von vornherein abzuen.

Kehren wir aber zu jenem Dreieck $AB\Gamma$ zurück, dessen Hypose $AB = 2\,B\Gamma$ gesetzt war, sodaß sich für $A\Gamma$ der Wert $\sqrt{3}$ b (Fig. 4), so brauchen wir nur $\Gamma\Delta = 2\,\Gamma B$ zu ziehen, um Ausweis von Figur 7 die *ἑπτάπους δύναμις* des Theodoros $A\Delta = \sqrt{7}$ zu erhalten.

Wenn ferner $\Gamma\Delta = 3\,\Gamma B$ gezogen wurde, die übrigen Voraussngen aber blieben, so war die Construction der *δωδεκάπους ύναμις* gegeben und die Hypotenuse $A\Delta = \sqrt{12}$ nachgewiesen.

Es sind nun noch $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{14}$ übrig. Ihre Radicanden n das Gemeinsame, daß sie sich auf die Form $a^2 \pm 2$ zurückhen lassen. Wie wir also vorher von dem Dreiecke ausgingen, en eine Seite $= \sqrt{3}$ war, so werden wir hier wahrscheinlich em gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke zurückkehren en, an welchem Pythagoras $\sqrt{2}$ demonstriert hatte. Hieraus ickeln sich folgende Constructionen.

Wurde an das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck $A\Gamma B$ nderes rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete AB und der eren Kathete $B\Delta = 2\,B\Gamma$ angelegt (Fig. 8), so stellte das rat über $A\Delta$ die *ἑξάπους δύναμις* des Theodoros dar und es die Hypotenuse $A\Delta = \sqrt{2^2+2} = \sqrt{6}$ nachgewiesen.

Wurde, während die übrigen Voraussetzungen blieben, $B\Delta =$ gezogen, so stellte das Quadrat über $A\Delta$ die *ἑνδεκάπους δύ-* dar und es war die Hypotenuse $A\Delta = \sqrt{3^2+2} = \sqrt{11}$ gewiesen.

Wurde endlich ein Dreieck $AB\Delta$ mit der Hypotenuse $A\Delta =$ construiert, so stellte das Quadrat über $B\Delta$ die *τεσσαρεσκαιους δύναμις* dar und es war die Kathete $B\Delta = \sqrt{4^2-2} = \sqrt{14}$ ewiesen.

Mit allen diesen Constructionen war nun freilich das *γράφειν* n Sinne, wie Platon berichtet, noch keineswegs abgethan. ußten noch andere Figuren hinzukommen, an denen sich nachis ließ, daß in der That jede der als Quadratseiten dargeln Wurzeln irrational ist. Ueber das Nähere schweigt Pla-; es ist uns aber doch wenigstens ein Hinweis erhalten, aus em eine wichtige Folgerung entnommen werden kann. Ganz liger Weise sind nämlich zu *δύναμις* die Epitheta *τρίπους*,

πεντέπους, ἑπτακαιδεκάπους gefügt worden. Kein anderer Ma matiker Griechenlands hat je bei allgemeinen geometrischen weisen nach dem Fußmaß gerechnet. Es muß also für Theod ein triftiger Grund vorgelegen haben, von dem sonstigen Gebra abzuweichen. Im Grunde war es die gute Pythagoreische Tr tion, nach welcher der arithmetische Beweis noch eine e bürtige Stellung neben dem geometrischen einnahm, eine Tradi welche erst durch die einseitig geometrische Richtung der E dischen Elemente verdrängt worden ist.

Um mit der τρίπους δύναμις des Theodoros zu beginnen liegt darin erstens die Andeutung, daß er zu seinem Quadrat Betrag von 3 bestimmten Flächeneinheiten gewisse Beträge Längeneinheiten für die Seite finden wollte, zweitens, zu diesem Zwecke Ausrechnungen, also arithmetische O tionen angestellt werden sollten, drittens, daß die Flächeneinheit die Längeneinheit gerade so wie das griechische Fußmaß in H Viertel, Achtel und Sechzehntel geteilt werden sollten[1]). Un Pythagoras, um sich der $\sqrt{2}$ zu nähern, $2 = \frac{5}{2}\frac{0}{5}$ gesetzt hatt ging nun Theodoros von der Identität $3 = \frac{4}{1}\frac{8}{6}$ aus. Daraus e sich unmittelbar die erste Annäherung $\sqrt{3} < \sqrt{\frac{48+1}{16}}$, d.i.

Um jedoch genauere Werte zu finden, galt es zunächst zu untersuchen; denn jeder hier ermittelte Wert brauchte durch 4 geteilt zu werden, um für $\sqrt{3}$ zu gelten. Offenbar i erste Annäherung für $\sqrt{48}$ gerade so aufgefunden worden, wie den Andeutungen Platons die Pythagoreische Näherung für Die Aufgabe $\sqrt{48}$ zu finden, wurde formuliert zu der identi Aufgabe, $\sqrt{49-1}$ zu finden, und nun ergab sich sofort nac oben (S. 370) erwähnten Formel, daß zwar nicht aus $49-1$, aber aus $49-1+(\frac{1}{14})^2$ die genaue Wurzel, nämlich $7-\frac{1}{14}$ ge werden konnte. Es war mithin die Annäherung $\sqrt{48} < 7-\frac{1}{1}$ funden.

Letzterer Wert mußte nun zu einem unechten Bruche richtet, dieser durch 4 dividiert und das Resultat zu eine

1) Ueber die Einteilung des Fußes in 2 ἡμιπόδια (oder bei Heron δι 4 παλαισταί, 8 κόνδυλοι, 16 δάκτυλοι vgl. Hultsch Griech. und römische logie ² S. 34 f. Natürlich ist dem Theodoros nicht unbekannt gewesen wenn der Längenfuß 16 Daktylen enthielt, dem Quadratfuß 16^2 Quadratd zukamen. Allein auch bei der Längeneinheit brauchte die Teilung ni den Daktylen oder Sechzehnteln stehen zu bleiben; war es doch gestatt den Daktylos in Hälften, Viertel, Achtel u. s. w. zu zerlegen, mithin au unddreißigstel, Vierundsechzigstel u. s. w. der Längeneinheit zu kommen.

chten Zahl von der Form $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$ umgewandelt den[1]). Da nun $\frac{7-\frac{1}{14}}{4}=\frac{97}{4\cdot 14}$ ist, so ist anzunehmen, daß eodoros seine Stammbruchreihe mindestens bis zu dem Nenner 16 $=2^6$ fortgeführt hat. Während also in erster Annäherung (S. 382) $1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}>\sqrt{3}$ gefunden worden war, erhielt er nun

$$1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{16}\,\tfrac{1}{32}\,\tfrac{1}{64}>\sqrt{3},$$

konnte durch eine elementare, freilich in der Form ziemlich ständliche Ausrechnung sich überzeugen, daß er nur das letzte ed dieser Reihe wegzulassen brauchte, um zu der anderen Beinzung

$$\sqrt{3}>1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{16}\,\tfrac{1}{32}$$

gelangen[2]).

Nun konnte eine besondere Eigenschaft der binären Brüche u benutzt werden, um wenigstens noch einen Schritt weiter zu en. Denn wenn, verglichen mit $\sqrt{3}$, die Summe der einen von

1) Selbstverständlich ist hierbei vorausgesetzt, daß beliebige Glieder dieser hreihe (das zu Anfang stehende Ganze bleibt hier außer Betracht), wenn die rechnung darauf führt, auch wegfallen können. So war gleich in dem obigen ae aus der ersten Annäherung $1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ der genauere Wert zu entwickeln durch ung des Gliedes $\frac{1}{4}$ und Ersatz desselben durch $\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}$ u. s. w. [In moderner eichnung würde, laut freundlicher Mitteilung von Dr. Franz Rietzsch, die e durch $\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}+\frac{x}{2^3}+\ldots$ zu geben sein, wobei x entweder 0 oder 1, keine andere Zahl bedeutet und auch der Fall, daß alle $x=0$ seien, eschlossen ist]. Da ein Mißverständnis nicht zu befürchten ist, habe ich nur beim ersten Male die Pluszeichen gesetzt, dann aber im Einklang mit Schreibweise der alten Mathematiker (die wir ja bei den gewöhnlichen ganzten Zahlen, wie $1\frac{1}{2}$, $10\frac{2}{3}$ u. s. w., allgemein nachahmen) die Reihe der binären Brüche lediglich durch Juxtaposition bezeichnet.

2) Daß diese beiden Grenzen nur eine entfernte Annäherung darstellten, die Umrechnung zu Decimalzahlen: $1{,}7344>1{,}73205>1{,}7188$, d. h. es $\sqrt{3}$, wenn wir das arithmetische Mittel aus den Grenzwerten ziehen, nur die drei Stellen 1,73 annähernd bestimmt. — Nach der Methode der altchischen Arithmetik mußte Theodoros bei der Ausrechnung auf die Quadrate hgehen. So erhielt er $\left(\frac{111}{64}\right)^2=\frac{12321}{4096}$ und $\left(\frac{55}{32}\right)^2=\frac{3025}{1024}$, und schloß is (da $3=\frac{12288}{4096}=\frac{3072}{1024}$ ist), daß $\left(\frac{111}{64}\right)^2>3>\left(\frac{55}{32}\right)^2$, mithin

$$\frac{111}{64}>\sqrt{3}>\frac{55}{32}$$

den beiden eben angeführten Reihen zu groß und die Summe d anderen zu klein war, so war zu versuchen, wie zu $\sqrt{3}$ die Sum einer dritten Reihe sich verhielt, welche um $\frac{1}{2 \cdot 64}$ kleiner als d erste und um denselben Betrag größer als die zweite Reihe wa Durch Ausrechnung würde sich dann ergeben haben, daß

$$\sqrt{3} > 1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{8}\,\tfrac{1}{16}\,\tfrac{1}{32}\,\tfrac{1}{128}$$

ist[1]).

Ob Theodoros diesen Weg betreten hat und vielleicht no weiter auf demselben fortgeschritten ist (denn wiederum würde eine noch genauere Begrenzung erhalten haben, wenn er zu d vorigen Reihe $\frac{1}{2 \cdot 128}$ hinzugezählt hätte u. s. w.), bleibt im Ungew sen; jedenfalls bürgt uns das Platonische *ἀποφαίνων* dafür, daß zwei Grenzen für $\sqrt{3}$ gesetzt und dann gezeigt hat, wie man die Grenzen immer enger ziehen könne, ohne jedoch dazwischen einen rationalen Zahlenwert auffinden zu können, dessen Quadr = 3 sein würde.

Die geometrische Darlegung, denn auch eine solche müss wir annehmen, ist offenbar von dem Quadrat über 7 ausgegang Auf einer Seite desselben wurde die Länge $\sqrt{48}$ (nachdem diese als größere Kathete des rechtwinkligen Dreieckes mit der kleinen Kathete 1 und der Hypotenuse 7 construiert war) eingetragen u das Quadrat über $\sqrt{48}$ in das Quadrat über 7 eingeschrieben. D mit war der Unterschied zwischen den Quadraten von 49 und 3 Flächeneinheiten in Form eines Gnomon (S. 371) geometrisch d gestellt. Wie dann weiter construiert und wie der Beweis geführt wurde, darüber dürfen wir ebensowenig Vermutungen aufstell wie betreffs des arithmetischen Beweises; aber daß dem Theodo nach dem damaligen Stande des mathematischen Wissens eine ausreichende Begründung, und zwar in letzter Instanz durch apagogische Beweise, zu Gebote gestanden hat, ist nicht zu bezweifeln.

Nachdem $\sqrt{3}$ von Theodoros erschöpfend behandelt war, konnten die folgenden Wurzeln, unter Berufung auf das vorher Bewiesene, bei weitem kürzer erledigt werden.

IV.

Eine lange Zeit nach Theodoros scheint die Lehre von den Quadratwurzeln wenig gefördert worden zu sein. Denn um mehr als ein Jahrhundert später hat Aristarch, wie wir sahen, für $\sqrt{2}$ nur die allererste, noch sehr ungenaue Annäherung, welche

1) Das ist in Decimalzahlen $1{,}73205 > 1{,}7266$.

Pythagoras zurückging, wieder aufgegriffen. Da auf einmal überascht uns Aristarchs jüngerer Zeitgenosse Archimedes in seiner Kreismessung[1]) mit dem fertigen Resultate

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153},$$

ohne auch nur mit einer Silbe anzudeuten, nach welchen Voraussetzungen er diese Werte ausgerechnet hat[2]).

Um die Lösung des Räthsels vorzubereiten ist es nötig den ganzen Beweis des 3. Satzes der Kreismessung derartig zu ergänzen, daß die von Archimedes weggelassenen Zwischenglieder einer Schlußfolgerungen je an Ort und Stelle eingefügt werden[3]). Statt der Proportionen des griechischen Textes wird allenthalben die Form von Brüchen angewendet und dadurch der Ueberblick über das Einzelne wie über das Ganze erleichtert werden. Die Ergänzungen geben wir durch Cursivschrift, bez. durch kleine griechische Buchstaben, während gerade Schrift und griechische Anfangsbuchstaben dem Wortlaute des griechischen Textes entsprechen. Um später möglichst kurz und deutlich citieren zu können, versehen wir die beiden Hauptteile des Beweises mit entsprechenden Ueberschriften.

Der dritte Satz der Kreismessung geht bekanntlich darauf hinaus, daß

1) Archimedis opera ed. Heiberg vol. I p. 266, 20 f. und 264, 4 f. Vgl. unten S. 389 f. 386.

2) Auch die Commentare des Eutokios (III p. 268 ff. Heiberg) geben hierüber keine Auskunft. Eutokios weiß nichts anderes zur Erklärung beizutragen, als daß er die von Archimedes fertig ausgerechneten Wurzeln rückwärts ins Quadrat erhebt und auf die ungefähre Uebereinstimmung jedes Quadrates mit dem Radicandus, aus welchem Archimedes die betreffende Wurzel gezogen hat, hinweist. Vgl. Nesselmann Die Algebra der Griechen S. 108 ff., Heiberg Quaestiones Archim. p. 60 f., Günther Quadratische Irrationalitäten, Abhandl. zur Gesch. der Mathem. IV S. 12. Einen schüchternen Anlauf zu einer Wurzelausziehung finden wir bei Theo zu Ptolem. Synt. I p. 184 Halma. Unter Berufung auf Eukl. Elem. II, 4 zerlegt er die Zahl 144 in $100 + 44$, zieht aus 100 die Wurzel 10 und zeigt, daß in dem Reste 44 sowohl das Product von $2 \cdot 10$ mit einer gewissen Zahl von Einern, als das Quadrat derselben Einerzahl enthalten sein müsse; beide Bedingungen erfülle die Zahl 2, denn $2 \cdot 10 \cdot 2 + 2^2$ ist $= 44$. Anstatt nun aber die hier angedeutete Regel dazu zu verwenden, um aus dem Radicandus 4500, den er a. a. O. zu behandeln hat, die Ganzen der Wurzel auszuziehen, begnügt er sich mit der Wiederholung des schon bei Ptolem. Synt. I S. 28 Halma vorliegenden Resultates, daß $67^2 = 4489$ die nächste Quadratzahl zu 4500 ist, mithin 67 die Zahl der Ganzen von $\sqrt{4500}$ ist.

3) Eine ähnliche Vervollständigung des Beweises hat bereits Nizze, Archimedes von Syrakus vorhandene Werke u. s. w., S. 111 ff. unternommen. Vgl.

$$3\tfrac{1}{7} > \pi > 3\tfrac{10}{71}$$

ist, wobei π das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmess bezeichnet.

Erster Teil des Beweises zu Satz 3 der Kreismessung.

Fig. 9. Es sei ein Kreis mit dem Durchmesser $A\Gamma$, dem Centrum und der Tangente ΓZ gegeben, und es sei $\angle \Gamma EZ = \frac{1}{3}$R; also i

$$\frac{EZ}{Z\Gamma} = 2 = \frac{306}{153}, \text{ und, } \textit{da nach Eukl. Elem. I, 47}$$

$$\varepsilon\gamma^2 = \varepsilon\xi^2 - \xi\gamma^2 \textit{ und nach der Construction}$$

$$\varepsilon\xi = 2\xi\gamma \textit{ ist, so ist auch}$$

$$\frac{\varepsilon\gamma^2}{\xi\gamma^2} = \frac{4\xi\gamma^2 - \xi\gamma^2}{\xi\gamma^2} = 3, \textit{ mithin}$$

$$\frac{\varepsilon\gamma}{\xi\gamma} = \sqrt{3}. \textit{ Es ist aber auf arithmetischem Wege gefunden word}$$

$$\sqrt{3} > \frac{265}{153}; \textit{ also ist auch}$$

$$\frac{E\Gamma}{Z\Gamma} > \frac{265}{153}\text{ *)}.$$

Nun werde der Winkel $ZE\Gamma$ durch die Gerade EH halbier es ist also *nach Eukl. Elem. VI, 3*

---

auch Rudio Archimedes u. s. w., vier Abhandlungen über die Kreismessu Leipzig 1892, S. 75 ff.

*) Die Kreismessung des Archimedes ist nicht in ihrer ursprünglichen G stalt, sondern in einer späteren, in den attischen Dialekt umgeformten und au sachlich zum Teil umgeänderten Bearbeitung auf uns gekommen. Vgl. Heibe Quaestiones Archimedeae p. 69 ff., Susemihl Geschichte der griech. Litteratu S. 729. Es ist daher nicht zu verwundern, wenn gerade in diesem 3. Sat der von Archimedes in eine so kurze und deshalb schwer verständliche Fo gebracht worden war, vielfache Verderbnisse sich finden. Vgl. Heiberg in sein Ausgabe vol. I p. 265 adn. 2. Statt der p. 264,4 hinter ἡ δὲ ΕΓ πρὸς τὴν überlieferten Worte λόγον ἔχει ist vgl. mit p. 264, 9. 12 u. s. w., besonders p. 266, 20 f., und nach den Spuren im Codex F, mit Wallis p. 541, 62 zu les μείζονα λόγον ἔχει ἤ, wie auch E. Nizze in seiner Uebersetzung (Archime von Syrakus vorhandene Werke, aus dem Griechischen übersetzt und mit erlä ternden und kritischen Anmerkungen begleitet, Stralsund 1824) S. 112 f. dur das Zeichen > andeutet. In der Ausgabe von Heiberg vol. II p. 264 ist be Druck ein gerade an dieser Stelle recht störendes Versehen untergelaufen; de die beiden zu „3" beigefügten Anmerkungen gehören vielmehr zu Zeile 4. I gegen sind in Zeile 3 die Worte ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει ὃν erstens har schriftlich richtig überliefert, zweitens durch mathematische Evidenz gesiche drittens auch von Wallis nicht abgeändert worden.

$$\frac{ZE}{E\Gamma} = \frac{ZH}{H\Gamma}, \text{ mithin auch } \sigma\upsilon\nu\vartheta\acute{\varepsilon}\nu\tau\iota \text{ (Elem. V def. 14)}$$

$$\frac{\xi\varepsilon + \varepsilon\gamma}{\varepsilon\gamma} = \frac{\xi\eta + \eta\gamma}{\eta\gamma}, \text{ das ist}$$

$$\frac{\xi\varepsilon + \varepsilon\gamma}{\varepsilon\gamma} = \frac{\xi\gamma}{\eta\gamma}; \text{ also ist auch } \grave{\varepsilon}\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi \text{ (Elem. V def. 12)}$$

$$\frac{ZE + E\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Gamma H}.$$

war aber $\frac{\xi\varepsilon}{\xi\gamma} = \frac{306}{153}$, und $\frac{\varepsilon\gamma}{\xi\gamma} > \frac{265}{153}$; also ist auch

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma H} > \frac{306 + 265}{153}, \text{ d. i. } > \frac{571}{153}.$$

so ist auch

$$\frac{\varepsilon\gamma^2}{\gamma\eta^2} > \frac{571^2}{153^2}, \text{ d. i. } > \frac{326041}{23409};$$

hin $\sigma\upsilon\nu\vartheta\acute{\varepsilon}\nu\tau\iota$ [1])

$$\frac{\varepsilon\gamma^2 + \gamma\eta^2}{\gamma\eta^2} > \frac{326041 + 23409}{23409}, \text{ d. i. nach Elem. I, 47}$$

$$\frac{EH^2}{\Gamma H^2} > \frac{349450}{23409}\ ^*), \text{ und demnach}$$

$$\frac{EH}{\Gamma H} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}\ ^{**}).$$

Wiederum *werde* der Winkel $HE\Gamma$ halbiert durch die Gerade ; es ist also nach denselben *Schlußfolgerungen wie vorher*

$$\frac{\varepsilon\eta}{\varepsilon\gamma} = \frac{\eta\vartheta}{\gamma\vartheta}, \text{ mithin auch } \sigma\upsilon\nu\vartheta\acute{\varepsilon}\nu\tau\iota$$

$$\frac{\varepsilon\eta + \varepsilon\gamma}{\varepsilon\gamma} = \frac{\eta\vartheta + \gamma\vartheta}{\gamma\vartheta}, \text{ das ist}$$

---

1) Archimedes hat hier denselben Hülfssatz wie Aristarchos oben S. 375 (mit n. 1) benutzt.

*) Auch hier ist, wie vorher, mit Wallis $\mu\varepsilon\acute{\iota}\zeta o\nu\alpha\ \lambda\acute{o}\gamma o\nu\ \check{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \mathring{\eta}$ statt $\lambda\acute{o}\gamma o\nu$ zu lesen.

**) Hinter $\mu\acute{\eta}\kappa\varepsilon\iota\ \check{\alpha}\rho\alpha$ hat Wallis mit Recht $\mu\varepsilon\acute{\iota}\zeta o\nu\alpha\ \mathring{\eta}$ hinzugefügt. Damit e letzte Schlußfolgerung gelte, muß $591\frac{1}{8} < \sqrt{349450}$ sein. Daß Archimedes ier That so gerechnet hat, wird weiter unten gezeigt werden.

$$\frac{\varepsilon\eta + \varepsilon\gamma}{\varepsilon\gamma} = \frac{\gamma\eta}{\gamma\vartheta},$$ *mithin auch ἐναλλάξ*

$$\frac{\varepsilon\eta + \varepsilon\gamma}{\gamma\eta} = \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma\vartheta}.$$

Es war aber $\frac{\varepsilon\eta}{\gamma\eta} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$, *und* $\frac{\varepsilon\gamma}{\gamma\eta} > \frac{571}{153}$; *also ist auch*

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} > \frac{591\frac{1}{8} + 571}{153}, \text{ d. i. } > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}.$$

Also ist *auch*

$$\frac{\varepsilon\gamma^2}{\gamma\vartheta^2} > \frac{(1162\frac{1}{8})^2}{153^2}, \text{ d. i. } > \frac{1350534\frac{3}{64}\frac{3}{64}}{23409};$$

mithin συνθέντι

$$\frac{\varepsilon\gamma^2 + \gamma\vartheta^2}{\gamma\vartheta^2} > \frac{1350534\frac{3}{64}\frac{3}{64} + 23409}{23409}, \text{ d. i. nach Elem. I, 47}$$

$$\frac{\varepsilon\vartheta^2}{\gamma\vartheta^2} > \frac{1373943\frac{3}{64}\frac{3}{64}}{23409}, \text{ und demnach}$$

$$\frac{E\Theta}{\Gamma\Theta} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}.$$

Ferner *werde* der Winkel $\Theta E\Gamma$ halbiert durch die Gerade
also ist *nach ähnlichen Schlußfolgerungen, wie vorher*

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma K} > \frac{1172\frac{1}{8} + 1162\frac{1}{8}}{153}, \text{ d. i. } > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}, \text{ und}$$

$$\frac{\varepsilon\varkappa^2}{\gamma\varkappa^2} > \frac{(2334\frac{1}{4})^2 + 23409}{23409}, \text{ d. i.}$$

$$> \frac{5448723\frac{1}{16} + 23409}{23409}, \text{ d. i.}$$

$$> \frac{5472132\frac{1}{16}}{23409}, \text{ und demnach}$$

$$\frac{EK}{\Gamma K} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}.$$

Ferner *werde* der Winkel $KE\Gamma$ halbiert durch die Gerade
also ist *nach ähnlichen Schlußfolgerungen, wie vorher*

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma\Lambda} > \frac{2339\frac{1}{4} + 2334\frac{1}{4}}{153}, \text{ d. i. } > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

Weil nun der Winkel $ZE\Gamma = \frac{1}{3}$ R viermal in gleiche Teile rlegt worden ist, so ist

$$\angle \Delta E\Gamma = \tfrac{1}{48}\,\text{R}.$$

s werde nun in dem Punkte E der Winkel $\Gamma EM = \Delta E\Gamma$ ange-gt; also ist

$$\angle \Delta EM = \tfrac{1}{24}\,\text{R},$$

nd es ist daher ΔM die Seite des um den Kreis geschriebenen chundneunzigeckes, mithin *U, d. i. der ganze Umfang dieses Viel-ces* $= 96\ \lambda\mu$. Da nun gezeigt wurde, daß $\frac{E\Gamma}{\Gamma\Delta} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$ ist, und *nach der Construction* $2E\Gamma = \Delta\Gamma$ und $2\Gamma\Delta = \Delta M$ ist, so ist $= \frac{\alpha\gamma}{\lambda\mu}$, *mithin* $\frac{\alpha\gamma}{96\lambda\mu} > \frac{4673\frac{1}{2}}{96 \cdot 153}$, *d. i.*

$$\frac{\Delta\Gamma}{U} > \frac{4673\frac{1}{2}}{14688},\ \textit{mithin umgekehrt}^{1})\ \frac{U}{\alpha\gamma} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}}.$$

s ist aber $\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$, und da $\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}$, *d. i.* $\frac{1}{7}$ ist, so ist

$$\frac{U}{\Delta\Gamma} < 3\tfrac{1}{7}.$$

lso ist um so mehr[2]) das Verhältnis des Kreisumfanges zum rchmesser, *d. i.*

$$\pi < 3\tfrac{1}{7}.$$

Zweiter Teil des Beweises zu Satz 3 der Kreismessung.

Es sei ein Kreis mit dem Durchmesser $\Delta\Gamma$ gegeben, und es Fig. 10.
i $\angle BA\Gamma = \frac{1}{3}$ R; *es ist also nach der Construction* $2\beta\gamma = \alpha\gamma$, *und* ch *Eukl. Elem. I, 47*

$$\frac{\alpha\beta^2}{\beta\gamma^2} = \frac{4\beta\gamma^2 - \beta\gamma^2}{\beta\gamma^2} = 3,\ \textit{mithin}$$

$$\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} = \sqrt{3}.$$

ist aber auf arithmetischem Wege gefunden worden

1) Vgl. Pappos Synag. VII p. 688, 11—19, und unten S. 392 Anm. 1.

2) Daß der Kreisumfang kleiner als der Umfang des umgeschriebenen Viel-ces ist, hat Archimedes de sphaera et cyl. I, 1 bewiesen.

$$\sqrt{3} < \frac{1351}{780}, \text{ also ist}$$

$$\frac{AB}{B\Gamma} < \frac{1351}{780}.$$

Da ferner $2\beta\gamma = \alpha\gamma$ *nachgewiesen wurde, so ist*

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{1560}{780}.$$

Nun werde der Winkel $BA\Gamma$ durch die Gerade AH halbi
Weil *nach Eukl. Elem. III, 26 auf dem Kreisbogen* $\beta\eta$ $\angle BAH$
$\angle B\Gamma H$, und *auf den gleichen Kreisbögen* $\beta\eta$, $\eta\gamma$ $\angle BAH = \angle H$
mithin *in den Dreiecken* $\alpha\eta\gamma$, $\gamma\eta\xi$ $\angle HA\Gamma = \angle H\Gamma Z$, und $\angle \Gamma$
$= \mathrm{R}$ (*Elem. III, 31*) gemeinsam ist, so ist auch *nach Elem. I,*
$\angle A\Gamma H = \angle \Gamma ZH$. Also ist $\triangle AH\Gamma \sim \triangle \Gamma HZ$; mithin

$$\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{\Gamma H}{HZ} = \frac{A\Gamma}{\Gamma Z}.$$

Es ist aber *nach Elem. VI, 3*

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{\alpha\beta}{\beta\xi}, \textit{ mithin auch durch Addition}^{1})$$

$$= \frac{\alpha\gamma + \alpha\beta}{\gamma\xi + \beta\xi}, \textit{ d. i.}$$

$$= \frac{BA + A\Gamma}{B\Gamma}; \text{ also ist auch}$$

$$\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{BA + A\Gamma}{B\Gamma}.$$

Es war aber $\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} < \frac{1351}{780}$, *und* $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{1560}{780}$; mithin ist

$$\frac{AH}{H\Gamma} < \frac{1351 + 1560}{780}, \textit{ d. i.} < \frac{2911}{780}.$$

Also ist auch

$$\frac{\alpha\eta^2}{\eta\gamma^2} < \frac{2911^2}{780^2}, \textit{ d. i.} < \frac{8473921}{608400}; \textit{ mithin } \sigma\upsilon\nu\vartheta\acute{\varepsilon}\nu\tau\iota$$

$$\frac{\alpha\eta^2 + \eta\gamma^2}{\eta\gamma^2} < \frac{8473921 + 608400}{608400}; \textit{ d. i. nach Elem. I, 47}$$

1) Dies folgt aus Elem. V, 12. Vgl. Hultsch zu Pappos Synag. vol. I p. XII.

$$\frac{\alpha\gamma^2}{\eta\gamma^2} < \frac{9082321}{608400};$$ *es ist also* auch

$$\frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}.$$

Zweitens werde der Winkel ΓAH durch die Gerade $A\Theta$ hal-
:t; es ist also nach denselben *Schlußfolgerungen*, *wie vorher*

$$\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{3013\frac{3}{4}+2911}{780}, \text{ d. i.}$$

$$< \frac{5924\frac{3}{4}}{780}, \text{ d. i., nachdem Zähler und Nenner mit 4 multipliciert und durch 13 dividiert worden sind,}$$

$$< \frac{1823}{240}.$$

ner ist, ähnlich wie vorher,

$$\frac{\alpha\vartheta^2}{\vartheta\gamma^2} < \frac{1823^2}{240^2}, \text{ d. i. } < \frac{3323329}{57600}, \text{ und}$$

$$\frac{\alpha\vartheta^2+\vartheta\gamma^2}{\vartheta\gamma^2} < \frac{3323329+57600}{57600}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{\alpha\gamma^2}{\vartheta\gamma^2} < \frac{3380929}{57600};$$ also *auch*

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Theta} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}.$$

Drittens werde noch der Winkel $\Gamma A\Theta$ halbiert durch die Ge-
: AK; es ist also, *ähnlich wie vorher,*

$$\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{1838\frac{9}{11}+1823}{240}, \text{ d. i.}$$

$$< \frac{3661\frac{9}{11}}{240}, \text{ d. i., nachdem Zähler und Nenner mit 11 multipliciert und durch 40 dividiert worden sind,}$$

$$< \frac{1007}{66}.$$

er ist, ähnlich wie vorher,

$$\frac{\alpha x^2}{x\gamma^2} < \frac{1007^2}{66^2}, \text{ d. i. } < \frac{1014049}{4356}, \text{ und}$$

$$\frac{\alpha x^2+x\gamma^2}{x\gamma^2} < \frac{1014049+4356}{4356}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{\alpha\gamma^2}{\varkappa\gamma^2} < \frac{1018405}{4356}; \text{ also } \textit{auch}$$

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma K} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}.$$

Viertens werde noch der Winkel ΓAK halbiert durch die rade $A\Lambda$; es ist also, *ähnlich wie vorher*,

$$\frac{A\Lambda}{A\Gamma} < \frac{1009\frac{1}{6} + 1007}{66}, \textit{ d. i.}$$

$$< \frac{2016\frac{1}{6}}{66}.$$

Ferner ist, ähnlich wie vorher,

$$\frac{\alpha\lambda^2}{\lambda\gamma^2} < \frac{(2016\frac{1}{6})^2}{66^2}, \textit{ d. i.} < \frac{4064928\frac{1}{36}}{4356}, \textit{ und}$$

$$\frac{\alpha\lambda^2 + \lambda\gamma^2}{\lambda\gamma^2} < \frac{4064928\frac{1}{36} + 4356}{4356}, \textit{ d. i.}$$

$$\frac{\alpha\gamma^2}{\lambda\gamma^2} < \frac{4069284\frac{1}{36}}{4356}; \textit{ also auch}$$

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Lambda} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}; \text{ also umgekehrt}^1)$$

$$\frac{\gamma\lambda}{\alpha\gamma} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}}.$$

Da nach der Construction der Bogen $\beta\gamma = \frac{1}{6}$ *des Kreisumfan* *und in Folge der viermaligen Winkelhalbierung der Bogen* $\lambda\gamma =$ *des Kreisumfanges ist, so ist die Gerade* $\lambda\gamma$ *die Seite des in den K* *eingeschriebenen Sechsundneunzigeckes.* Demnach ist U', *d.i.* der *u* fang des Sechsundneunzigeckes $=$ *96* $\lambda\gamma$, *mithin*

$$\frac{U'}{A\Gamma} > \frac{66 \cdot 96}{2017\frac{1}{4}}, \textit{ d. i.} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}, \text{ das ist}^2)$$

$$> 3\tfrac{10}{71}.$$

---

1) Archimedes hat hier auf einem Hülfssatze gefußt, der bei Pappos S. a VII p. 688, 20—24 als zweiter Teil der 7. Proposition erhalten ist.

2) Es ist nämlich $6336 > 6335\frac{247}{284}$ (vgl. unten Abschnitt IX); die let gemischte Zahl ist aber $= 2017\frac{1}{4} \times 3\frac{10}{71}$; also ist

$$\frac{U'}{A\Gamma} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\tfrac{10}{71}.$$

o ist um so mehr[1]) das Verhältnis des Kreisumfanges zum chmesser, *d. i.*

$$\pi > 3\tfrac{10}{71}.$$

Zusammenfassung des ersten und zweiten Teiles des Beweises.

Also ist $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$.

V.

Um nun zu erklären, auf welchem Wege Archimedes zu den vorkommenden Annäherungen von Quadratwurzeln gelangt ist, en wir von $\sqrt{3}$ auszugehen, weil sie erstens die Grundlage für übrigen sowohl im ersten als im zweiten Teile des Beweises enden Wurzelwerte bildet, und zweitens, weil für sie allein Begrenzung nach zwei Seiten hin gegeben worden ist.

Zunächst ist klar, daß Archimedes schlechterdings keinen sol-n Näherungswert für $\sqrt{3}$ hat auffinden wollen, den wir als das ittel zwischen zwei Grenzbestimmungen betrachten könnten. ihn gab es sowohl hier als bei den übrigen Wurzelausrech-gen nur das eine Ziel, zu dem ἄρρητον (*irrationale*), welches der von ihm behandelten Wurzeln darstellte, möglichst nahe ende, größere oder kleinere rationale Zahlen (ῥητοὶ ἀριθμοί) ermitteln. Wo immer also in unserer vorhergehenden oder in noch folgenden Darstellung die Zeichen $>$ und $<$ erscheinen, den nicht etwa beliebige, noch so weit differierende Größen nder gegenüber gestellt, sondern es wird eine unbekannte ße jedesmal mit dem nächsten, unter den gebotenen Vorbedin-erreichbaren Näherungswerte verglichen.

Archimedes giebt uns — wir wiederholen es — nur das End-ultat seiner Berechnung von $\sqrt{3}$ und schweigt sowohl über Voraussetzungen, nach denen er Schritt für Schritt weiter vor-angen ist, als über die Methode der Einzelausrechnungen. Es bt uns also nichts übrig, als das Problem, das er uns aufstellt, der durch ihn gegebenen Lösung rückwärts schreitend auf nalytischem Wege zu lösen. Ist dies geschehen, so wird die thesis weit kürzer verlaufen und mit ihrer Einfachheit und ittelbaren Evidenz die beste Gewähr für die Richtigkeit der geschlagenen Lösung in sich tragen.

---

1) Aus dem 1. Postulat zum I. Buche περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου folgert imedes ebenda p. 10, 23—28 Heib., daß der Umfang des Kreises größer ist ler Umfang des eingeschriebenen Vieleckes.

Um aber auch die Analysis möglichst knapp zu gesta müssen einige Hülfssätze (λήμματα) vorausgeschickt wer welche, wenn auch nicht der Form, so doch dem Inhalte nach Sätzen sich decken, die von Archimedes als erwiesen vorausges worden sind, ehe er an seine Wurzelausrechnungen heranging

Satz 1.

Die Differenz einer Quadratzahl von der nächstniedrig Quadratzahl ist gleich der Summe der Wurzeln dieser Zahlen

Es sei eine Quadratzahl $(a+1)^2$. Die nächstniedrigere dratzahl ist also a^2, mithin

$$(a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1.$$

---

1) Die umständliche Methode der Beweisführung bei den alten Math tikern machte in vielen Fällen die Anwendung von Hülfssätzen, λήμ nötig. Zuerst sind solche Sätze jedesmal für den vorliegenden Fall beso gebildet, später die schon früher gebildeten auch für andere, ähnliche weiter verwendet worden. Ein Einblick in die Reichhaltigkeit und die Entstehung einer Sammlung von Hülfssätzen zur Sphärik ist oben (S. 373 f. öffnet worden. Ferner ist unter Archimedes' Namen eine Sammlung von λήμ zur Lehre von der Berührung des Kreises mit Geraden oder mit andern Kr und über die Bildung gewisser Curven, die aus Kreisbögen zusammenget sind, in arabischer Sprache erhalten und als *Liber assumptorum* den We des Archimedes angehängt (vol. II p. 428—446 ed. Heiberg, und vgl. ebenda p. 428 f. 432, 1. 438, 1. 443, 1, Quaest. Archim. p. 24 f.). Die συνα des Pappos besteht etwa zur Hälfte aus Sammlungen von λήμματα: s. den Ei nachweis in meinem Index unter λῆμμα, λημμάτιον und λαμβάνειν, *sumere* *sumere theorema auxiliare*. Die obige Einschaltung von sechs Hülfssätzen 3. Satze der Kreismessung hat also vielfältige Analogien für sich. Satz 1 i etwas abgeänderter Form bezeugt durch Theo, die übrigen Sätze ergeben der Reihe nach mit Notwendigkeit, sobald wir das Ziel, eine Erklärung fü Archimedischen Schlußresultate zu finden, fest im Auge behalten. Die T nung in einzelne Sätze mit besonderen Beweisen war durch die Methode alten Mathematiker geboten (vgl. S. 377 Anm. 1); nur bei dem ganz element Satze 4 habe ich gleich im Texte eine zusammenfassende Form gewählt, je die ursprüngliche Sonderbildung von zwei Sätzen in der Anmerkung erwi Die Abkürzungen aller Sätze nach moderner Methode sind zum Schluß der S 3 und 6 angemerkt worden.

2) Dieser Satz erscheint bekanntlich bei Theo Smyrn. p. 32, 9 ed. Hi in der Form: *οἱ ἑξῆς περισσοὶ ἀλλήλοις ἐπισυντιθέμενοι τετραγώνους ποιοῦσι ριθμούς*, d. h. die (von 1 ab) auf einander folgenden ungeraden Zahlen g fortschreitend summiert, die Reihe der Quadrate aller Zahlen (von 2 ab). ist demnach $2^2 = 1+3$, $3^2 = 1+3+5$ u. s. w., mithin z. B. $3^2 - 2^2 = 5$, $= 3+2$, oder $4^2 - 3^2 = 7$, d. i. $= 4+3$. Vgl. auch Theo p. 28, Cantor les. I S. 135.

ist aber $2a+1$ die Summe der Wurzeln von a^2 und $(a+1)^2$.

Folgerung. Da die halbe Differenz zwischen a^2 und $1)^2 = a+\frac{1}{2}$ ist, so ist ersichtlich, daß jede zwischen a^2 und $1)^2$ gegebene (ganze) Zahl entweder näher bei a^2 als bei $(a+1)^2$, oder umgekehrt.

Satz 2.

Eine gegebene Zahl, die nicht selbst Quadratzahl ist, liegt r bei der nächstniedrigeren als bei der nächsthöheren Quazahl, wenn die Differenz der gegebenen Zahl von der nächstrigeren Quadratzahl nicht größer als die Wurzel aus der letzn ist.

Die gegebene Zahl sei A, die nächstniedrigere Quadratzahl a^2, die Differenz $A-a^2$ sei b. Wir setzen der Reihe nach $b=1$, $\ldots, = a-2, = a-1, = a$. Daraus erhellt unmittelbar, wenn A näher bei a^2 als bei $(a+1)^2$ liegen soll, der höchste ssige Wert für $b = a$ ist. Denn wenn $b = a+1$ wäre, so le es schon größer als die halbe Differenz zwischen $(a+1)^2$ a^2 sein, mithin näher bei $(a+1)^2$ als bei a^2 liegen (Satz 1, erung).

Satz 3.

Eine gegebene Zahl, die nicht selbst Quadratzahl ist, liegt r bei der nächsthöheren als bei der nächstniedrigeren Quazahl, wenn die Differenz der nächsthöheren Quadratzahl von gegebenen Zahl kleiner als die Wurzel aus der ersteren ist.

Die gegebene Zahl sei A, die nächsthöhere Quadratzahl a^2, die Differenz a^2-A sei b. Wir setzen der Reihe nach $b=1$, $\ldots, = a-2, = a-1, = a$. Da die nächstniedrigere Quadrat- $(a-1)^2$ und die halbe Differenz zwischen a^2 und $(a-1)^2 =$ ist (Satz 1), so erhellt unmittelbar, daß, wenn A näher bei bei $(a-1)^2$ liegen soll, $b < a$ sein muß. Denn wenn $b = a$, $> a$ wäre, so würde es größer als die ebenbezeichnete halbe enz sein, mithin näher bei $(a-1)^2$ als bei a^2 liegen[1]).

Statt der im Sinne altgriechischer Methode (vgl. S. 394 Anm. 1) wiedertellten Sätze 1—3 schlägt Herr Dr. Franz Rietzsch, der als Mathemar ein sachverständiges Gutachten zu diesen Untersuchungen freundlichst erat, folgende Zusammenfassung nach moderner Methode vor: Aus der Iden- $\frac{(a+1)^2-a^2}{2} = a+\frac{1}{2}$ folgt, daß eine zwischen zwei aufeinanderfolgenden dtzahlen a^2 und $(a+1)^2$ liegende Zahl näher an derjenigen Quadratzahl t, on welcher ihre Differenz $< a+\frac{1}{2}$, oder, da es sich nur um ganze Zahhdelt, $< a+1$ ist. Heißt die größere Quadratzahl a^2 und die kleinere], so muß natürlich die genannte Differenz $< a$ sein.

Satz 4.

Wenn eine gegebene Zahl, die nicht selbst Quadratzahl nach ihrer Differenz von der nächsten Quadratzahl dargest und die nächste Quadratzahl mit a^2, die Differenz aber mit b zeichnet wird, so ist

$$\sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}.$$

Da aus Elem. II, 4 und aus einem daraus abgeleiteten Le hervorgeht[1]), daß

$$\sqrt{a^2 \pm b + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} = a \pm \frac{b}{2a} \text{ ist, so ist}$$

$$\sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}.$$

Folgerung. Da (nach Satz 2 und 3) $\frac{b}{2a}$ entweder $= \frac{1}{2}$ $< \frac{1}{2}$ ist, und da im Quadrate von $a \pm \frac{b}{2a}$ als auslaufender B $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ erscheint, so ist leicht zu ersehen, daß der Fehler bei Annäherung $\sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}$ um so schneller sich verringert größer das Verhältnis $a : b$ wird. Wenn also statt einer l neren ganzen Zahl, aus welcher nach Obigem nur ein v genauer Wurzelwert gezogen werden kann (z. B. $2 - \frac{1}{4}$ als A herung für $\sqrt{3}$), ein dieser Zahl gleicher unechter Bruch, sen Nenner eine Quadratzahl ist, gesetzt und der Zähler Bruches auf die Form $a^2 \pm b$ gebracht wird, so wird man solche Zähler ausfindig machen können, bei denen b im Verh zu a^2 sehr klein ist. Wenn also dann bei der Annäherungsf der auslaufende Bruch $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ vernachlässigt und der dabei

1) Nochmals ist hier darauf hinzuweisen, daß diese Sätze und ihre Be lediglich den Zweck verfolgen zu zeigen, wie etwa Archimedes seine Begr von $\sqrt{3}$ vorbereitet haben mag. Daß $\left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 = a^2 + b + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ist, b nach dem heutigen Standpunkte der Mathematik nicht erst durch Verw Elem. II, 4 erhärtet zu werden; aber für Archimedes war die Bezugnah diesen Euklidischen Satz wesentlich, weil nur daraus der dazu gehörige satz abgeleitet werden konnte, daß auch $\left(a - \frac{b}{2a}\right)^2 = a - b + \left(\frac{b}{2a}\right.$ Die obige Zusammenfassung beider Sätze mit Hülfe des combinierten Z $\pm$ ist eine moderne Zuthat; ein alter Mathematiker konnte nur jeden d den Sätze für sich anwenden.

adene kleine Fehler noch dadurch verringert wird, daß die im ler gewonnene Annäherung durch die Wurzel des Nenners di- iert wird, so wird der Fehler in der Wurzel aus der anfäng- gegebenen Zahl verschwindend klein gemacht werden können.

Satz 5.

Wenn eine gegebene Zahl (nach Satz 2) auf die Form a^2+b racht worden ist, so ist

$$\sqrt{a^2+b} > a+\frac{b}{2a+1}.$$

Da (nach Satz 2) b entweder $= a$ oder $< a$ ist, so ist jeden- s $b < 2a+1$, mithin [1])

$$\frac{b}{2a+1} > \frac{b^2}{(2a+1)^2}.$$

Durch Addition gleicher Größen auf beiden Seiten erhält man

$$a^2+\frac{2ab}{2a+1}+\frac{b}{2a+1} > a^2+\frac{2ab}{2a+1}+\frac{b^2}{(2a+1)^2}.$$

ist aber einerseits $\frac{2ab}{2a+1}+\frac{b}{2a+1} = \frac{2ab+b}{2a+1} = b$, und an- rseits $a^2+\frac{2ab}{2a+1}+\frac{b^2}{(2a+1)^2} = \left(a+\frac{b}{2a+1}\right)^2$; also ist

$$a^2+b > \left(a+\frac{b}{2a+1}\right)^2, \text{ mithin auch}$$

$$\sqrt{a^2+b} > a+\frac{b}{2a+1}.$$

Satz 6.

Wenn eine gegebene Zahl (nach Satz 3) auf die Form a^2-b acht worden ist, so ist

---

[1]) Nach heutiger Methode genügt, um dies zu erweisen, die Einschaltung, $\frac{b}{2a+1}$ ein echter Bruch ist. Nach der Methode der Alten mußte, wie vielen anderen Fällen, der Zwischenbeweis etwas umständlicher verlaufen. hst war aus Elem. V, 4 (vgl. mit defin. 5) zu folgern, daß $b:(2a+1) = (2a+1)$ ist. Da nun $b < 2a+1$ ist, so ist auch $b(2a+1) < (2a+1)^2$, n (nach Elem. V, 8) $b^2:b(2a+1) > b^2:(2a+1)^2$; also auch (nach Elem. $b:(2a+1) > b^2:(2a+1)^2$. Ebenso war der Zwischenbeweis an der ent- enden Stelle des folgenden Hülfssatzes zu führen.

$$\sqrt{a^2-b} > a-\frac{b}{2a-1}.$$

Da (nach Satz 3) $b < a$ ist, so ist auch jedenfalls

$$b < 2a-1, \text{ mithin}^1)$$

$$\frac{b}{2a-1} > \frac{b^2}{(2a-1)^2}.$$

Indem auf beiden Seiten $a^2-\frac{2ab}{2a-1}$ addiert wird, erhält man

$$a^2-\frac{2ab}{2a-1}+\frac{b}{2a-1} > a^2-\frac{2ab}{2a-1}+\frac{b^2}{(2a-1)^2}.$$

Es ist aber einerseits $-\left(\frac{2ab}{2a-1}-\frac{b}{2a-1}\right) = -\frac{2ab-b}{2a-1} =$

andererseits $a^2-\frac{2ab}{2a-1}+\frac{b^2}{(2a-1)^2} = \left(a-\frac{b}{2a-1}\right)^2$; also i

$$a^2-b > \left(a-\frac{b}{2a-1}\right)^2, \text{ mithin auch}$$

$$\sqrt{a^2-b} > a-\frac{b}{2a-1}\ ^*).$$

Zusammenfassung der Sätze 4—6.

Wenn eine gegebene Zahl, die nicht selbst Quadratzahl i auf die Form $a^2 \pm b$ gebracht worden ist (wobei a^2 die näc Quadratzahl bedeutet), so ist

---

1) Vgl. die vorige Anm.

*) Nach moderner Methode würden Satz 5 und 6 (laut Mitteilung v Rietzsch) folgendermaßen zusammengefaßt werden: Da $b < a+1$, bez. < ist, so ist $b < 2a \pm 1$, mithin $\frac{b}{2a \pm 1}$ ein echter Bruch und folglich

$$\frac{b}{2a \pm 1} > \left(\frac{b}{2a \pm 1}\right)^2.$$

Addiert man auf beiden Seiten $a^2 \pm \frac{2ab}{2a \pm 1}$, so folgt, weil $\frac{b}{2a \pm 1} \pm \frac{2a}{2a}$ $\pm b$ ist,

$$a^2 \pm b > \left(a \pm \frac{b}{2a \pm 1}\right)^2, \text{ also}$$

$$\sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1},$$

wobei durchgängig entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen zu nn sind.

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}.$$

Mit Hülfe dieser Sätze sind wir im Stande das Problem zu
en, welches Archimedes durch seine bei der Kreismessung an-
vendete Umgrenzung von $\sqrt{3}$ der Mit- und Nachwelt aufgegeben

Aufgabe. Für $\sqrt{3}$ sind zwei möglichst genäherte Grenzwerte
Brüchen mit der Maßgabe zu finden, daß die Zähler der Brüche
iner als 10000 seien [1]).

Analysis. Es sei schon geschehen, und es sei

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

nden worden. Es ist vorauszusetzen, daß diese beiden Grenz-
te in irgend einer leicht erkennbaren Beziehung zu einander
en, und, nachdem der eine als relativ genauer als der andere
annt worden ist (denn beide können nicht gleich genau sein,
l dann die irrationale $\sqrt{3}$ das arithmetische Mittel zwischen
i rationalen Zahlen sein würde), so ist anzunehmen, daß von
himedes der ungenauere Grenzwert aus dem genaueren abge-
et worden ist, nicht umgekehrt.

Durch Ausrechnung ergiebt sich, daß $\frac{1351}{780}$ relativ viel näher
$\frac{265}{153}$ an $\sqrt{3}$ steht [2]). Um nun zu ermitteln, nach welcher Me-

1) Wie auch sonst bei historischen Untersuchungen zur alten Mathematik,
hier, anlangend die Formulierung des Satzes, ein Mittelweg einzuhalten.
obigen Worte müßten noch mehrfach umgewandelt werden, um ins Grie-
he so übersetzt werden zu können, daß die Uebersetzung demjenigen Wort-
, den Archimedes angewendet hat, einigermaßen sich näherte. Allein die
Fassung ist so gewählt worden, daß darin keine den griechischen Mathe-
xern fremdartige Anschauung vorkommt. Es ist schlechthin „Brüche" für
eine Brüche" gesagt worden, weil die alten Griechen Decimalbrüche über-
t nicht gekannt haben. Daß diese Brüche „unechte" sein müssen, geht
dem Zusammenhang der Aufgabe hervor, und es ist durch den Ausdruck
che" schlechthin zugleich die Wahl von gemischten Zahlen abgewehrt. Aus
sicht auf den griechischen Sprachgebrauch ist auch von Zahlen, die „kleiner
0000 sind", statt von Zahlen zu 4 oder weniger Decimalstellen gesprochen
en. Ueber die Stellenzahl, auf welche die Nenner zu beschränken sind,
hte eine besondere Weisung nicht gegeben zu werden, da es sich um un-
Brüche handelt und das Maximum der Stellenzahl des Zählers schon de-
t worden ist.

2) Es ist nämlich in Decimalzahlen zu setzen

thode $\frac{265}{153}$ aus $\frac{1351}{780}$ hergeleitet worden ist, sind die beiden Ner
auf ihre kleinsten Teiler zurückzuführen. Wir vergleichen
zunächst

$$780 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \text{ mit}$$
$$153 = 3 \cdot 3 \cdot 17,$$

und bilden, um beide Zahlen in eine noch durchsichtigere Beziehu
zu einander zu bringen, aus den Teilern $2 \cdot 2 \cdot 13$ der Zahl 780 a
Product 52 und aus den Teilern $3 \cdot 17$ der Zahl 153 das Pro
51. Wir stellen also einander gegenüber

$$780 = 3 \cdot 5 \cdot 52 \text{ und}$$
$$153 = 3 \cdot 51,$$

und vervollständigen die Symmetrie durch Erweiterung des Bru
$\frac{265}{153}$ mit 5. Wir haben also neben einander

$$(a) \quad \frac{1351}{780} = 1{,}7320513$$

$$(b) \quad \sqrt{3} = 1{,}7320508$$

$$(c) \quad \frac{265}{153} = 1{,}7320\mathit{261}.$$

Also ist die Archimedische Näherung $\frac{1351}{780}$ genau bis zur 6ten Stelle de
mischten Zahl, und dazu würde noch die 7te Stelle = 1 als für a und
meinsame Annäherung kommen. Dagegen stimmen b und c nur bis zu
Stelle überein, die 6te aber differiert schon um mehr als 2. Beiläufig
merkt, daß Archimedes, wenn er nicht im Laufe der Beweisführung, um
große Zahlen zu vermeiden, zu starken Kürzungen der aus $\frac{1351}{780}$ abgelei
Bruchwerte genötigt gewesen wäre, lediglich von $\frac{1351}{780}$ aus die Zahl π b
5ten, ja annähernd bis zur 6ten Stelle hinter dem Komma hätte berechnen
nen. — Nach der Methode der altgriechischen Arithmetik ist der Beweis, da
Differenz $\frac{1351}{780} - \sqrt{3} < \sqrt{3} - \frac{265}{153}$ ist, folgendermaßen zu führen. Da einer
tionale Zahl nicht commensurabel zu einer rationalen sein kann, sind die
drate zu vergleichen; mithin ist 3 in einen uneigentlichen Bruch zu verwa
dessen Nenner gleich dem Generalnenner für $(3 \cdot 260)^2$ und $(3 \cdot 51)^2$ ist.
dann $\left(\frac{1351}{780}\right)^2$ und $\left(\frac{265}{153}\right)^2$ zu Brüchen mit diesem Generalnenner umgew
sind, wird eine Vergleichung der Zähler (welche analog der vorherigen A
nung mit a, b, c bezeichnet werden mögen) ergeben, daß $a - b < b -$ i
Danach ist zu schließen, daß $\left(\frac{1351}{780}\right)^2$ näher als $\left(\frac{265}{153}\right)^2$ bei 3 steht, mithin
die Wurzeln u. s. w.

$$\frac{1351}{15 \cdot 52} \text{ und } \frac{1325}{15 \cdot 51},$$

l können nun die anfänglich gegebene Lösung zurückbilden zu

$$\frac{1351}{52} > 15\sqrt{3} > \frac{1325}{51},$$

., indem wir die Brüche in gemischte Zahlen, und zwar aus un-telbar einleuchtendem Grunde in die Formen von Differenzen, legen

$$26 - \tfrac{1}{52} > 15\sqrt{3} > 26 - \tfrac{1}{51}.$$

n ist aber $26 - \frac{1}{52} = \sqrt{26^2 - 1 + (\frac{1}{52})^2}$, also zugleich die Annäung für $\sqrt{26^2 - 1}$, und zwar ist (nach Satz 4)

$$26 - \tfrac{1}{52} > \sqrt{26^2 - 1}.$$

n war soeben $26 - \frac{1}{52}$ mit $15\sqrt{3}$ verglichen worden. Da wir och nicht eine Näherung für $15\sqrt{3}$, sondern für $\sqrt{3}$ selbst sun, so setzen wir statt $26 - \frac{1}{52} > \sqrt{26^2 - 1}$

$$\tfrac{1}{15}(26 - \tfrac{1}{52}) > \tfrac{1}{15}\sqrt{26^2 - 1}.$$

ist aber $\frac{1}{15}\sqrt{26^2 - 1} = \sqrt{\frac{676 - 1}{225}} = \sqrt{\frac{675}{225}} = \sqrt{3}$; mithin ist riesen

$$\tfrac{1}{15}(26 - \tfrac{1}{52}) > \sqrt{3}.$$

Viter sehen wir nun ein, daß die andere Begrenzung

$$\sqrt{3} > \tfrac{1}{15}(26 - \tfrac{1}{51})$$

rstanden ist durch Umformung der Begrenzung

$$\tfrac{1}{15}(26 - \tfrac{1}{52}) \text{ zu } \tfrac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{52 - 1}\right),$$

r entnehmen aus obigem Satze 6, daß in der That $\frac{1}{15}\sqrt{26^2 - 1}$,

$$\sqrt{3} > \tfrac{1}{15}(26 - \tfrac{1}{51}), \text{ d. i.}$$
$$> \frac{265}{153}$$

Somit haben wir erwiesen, daß von den beiden zu Anfang etzten Begrenzungen für $\sqrt{3}$ die weniger genaue, nämlich $\frac{265}{153}$,

nach einer allgemein gültigen Regel aus der genaueren, näml
aus $\frac{1351}{780}$, hergeleitet worden ist.

Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, nach welcher Metho
die Begrenzung $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$ gefunden worden ist.

Es wurde bereits bemerkt, daß $\frac{1351}{780}$ auf die Form $\frac{1352}{15 \cdot}$
$= \frac{1}{15}(26 - \frac{1}{52}) = \frac{26}{15} - \frac{1}{15 \cdot 52}$ gebracht werden kann, und
wir hierin eine Annäherung für $\sqrt{3}$ zu erkennen haben. Ind
wir den hinter dem Minuszeichen auslaufenden Bruch bei Se
lassen, erhalten wir $\frac{26}{15}$ als gröbere Näherung für $\sqrt{3}$.

Wie vorher den Näherungswert $\frac{1351}{780}$, so führen wir nun au
$\frac{26}{15}$ auf eine Form zurück, welche eine Annäherung in noch k
neren Zahlen ergeben wird, nämlich auf $\frac{5^2+1}{3 \cdot 5} = \frac{5}{3} + \frac{1}{15}$. Wie
lassen wir den auslaufenden Bruch bei Seite und erhalten $\frac{5}{3}$
Näherungswert für $\sqrt{3}$.

Wir vergleichen $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ mit 3, d. i. $\frac{25}{9}$ mit $\frac{27}{9}$, und erseh
daraus, daß $\frac{5}{3} < \sqrt{3}$ ist. Es muß also der Annäherung $\frac{5}{3}$, wel
kleiner als $\sqrt{3}$ ist, eine andere, welche größer als $\sqrt{3}$ ist, zur Se
stehen. Wir bringen $\frac{5}{3}$ auf die Form $2 - \frac{1}{3}$, und erkennen,
die Begrenzung $\sqrt{3} > 2 - \frac{1}{3}$, d. i. $> 2 - \frac{1}{4-1}$, nach Satz 6 her
leitet ist aus der Begrenzung $2 - \frac{1}{4} > \sqrt{3}$.

Hiermit sind wir auf analytischem Wege rückwärts bis
einer Stelle gelangt, welche nur noch um einen Schritt vom A
gangspunkte der Bahn entfernt ist. Denn nach Satz 4 erken
wir in $2 - \frac{1}{4}$ die Annäherung für $\sqrt{2^2-1}$; es ist aber $\sqrt{2^2-1}$ n
dem Pythagoreischen Lehrsatze durch die größere Kathete
jenigen rechtwinkligen Dreieckes dargestellt, welches Archime
seiner ganzen Kreismessung zu Grunde gelegt hat (S. 386. 389).

Die nun folgende **Synthesis** kleiden wir in die Form eines
richtes über das nun klar vor Augen liegende Verfahren, welc
Archimedes eingeschlagen hat um zu der Begrenzung

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

zu gelangen.

Wenn in dem rechtwinkligen Dreiecke, welches als Hälfte
gleichseitigen Dreieckes durch die Normale von der Spitze

is abgeschnitten wird, die kleinere Kathete = 1 gesetzt wird, st die größere Kathete = $\sqrt{2^2-1} = \sqrt{3}$. Es ergab sich also n obigem Satze 4 die erste Begrenzung

$$2-\tfrac{1}{4} > \sqrt{3},$$

dieser war nach Satz 6 gegenüberzustellen die Begrenzung

$$\sqrt{3} > 2-\frac{1}{4-1}, \text{ d. i. } > \frac{5}{3}.$$

nun eine genauere Annäherung für $\sqrt{3}$ zu erhalten, hat Archedes $\frac{5}{3}$ quadriert zu $\frac{25}{9}$ und den Radicandus 3 zu einem unntlichen Bruche mit dem Nenner 9 umgeformt. Er setzte also $= \sqrt{\frac{25+2}{9}}$, und berechnete daraus die Begrenzung (Satz 4)

$$\tfrac{1}{3}(5+\tfrac{1}{5}) > \sqrt{3}, \text{ d. i. } \frac{26}{15} > \sqrt{3}.$$

aber eine noch genauere Annäherung zu gewinnen, hat er $\frac{26}{15}$ liert zu $\frac{676}{225}$ und wiederum den Radicandus 3 zu einem unntlichen Bruche mit gleichem Nenner umgeformt. So erhielt $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{676-1}{225}}$, und berechnete daraus die weit genauere Benzung

$$\tfrac{1}{15}(26-\tfrac{1}{52}) > \sqrt{3}, \text{ d. i. } \frac{1351}{780} > \sqrt{3}.$$

zu ergab sich (nach Satz 6) die Begrenzung nach der andern e hin, nämlich

$$\sqrt{3} > \tfrac{1}{15}\left(26-\frac{1}{52-1}\right), \text{ d. i.}$$

$$> \frac{1326-1}{15\cdot 51}, \text{ d. i. } > \frac{265}{153}.$$

Somit ist nachgewiesen, auf welchem Wege Archimedes zu von ihm gesetzten Begrenzung

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

ngt ist[1]). Zugleich erinnert uns 1351, als die größte hier vor-

[1]) Unter den früheren Lösungsversuchen sind hier zunächst diejenigen anren, in denen die im Obigen ohne fremdartige Zwischenglieder entwickelten e ebenfalls und zwar so erscheinen, daß sie, wenn auch durch Zwischen-

kommende Zahl, daran, daß er die Ausrechnung nicht bis zu
Myriaden und darüber hinaus fortsetzen wollte. Ganz mit Re
Denn die Quadrierung von $\frac{1351}{780}$ und die daraus sich ergebe
Annäherung für $\sqrt{3}$ würde zwar zu einem ungemein genauen W
geführt haben, allein mit einem Bruche, dessen Zähler größer
365 Myriaden ist — darauf führt nämlich die Ausrechnung[1])

---

glieder getrennt, doch nicht allzuweit von einander entfernt sind. Hinzuw
ist zuerst auf die Reihe bei Günther Quadrat. Irrationalitäten S. 61 (vgl.
S. 114. 117 f.). Schoenborn in Zeitschr. für Mathem. u. Phys., hist.-
Abteil., XXVIII (1883), S. 174 f. fügt zu der Güntherschen Reihe die Schei
der Werte, je nachdem sie größer oder kleiner als $\sqrt{3}$ sind, hinzu und gelig
so zu einer Uebersicht, die mit $\frac{7}{4} > \sqrt{3} > \frac{5}{3}$ beginnt, dann die Begren
$\frac{26}{15} > \sqrt{3}$ aufweist, danach aber mehrere Zwischenglieder enthält, welche o
Archimedes sicherlich nicht in Betracht gezogen worden sind. Später ersch
in der Schoenbornschen Reihe $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$, und in der nächsten Zeile $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$
Zu den beiden Lösungen, welche Tannery Sur la mesure du cercle d'Ab
mède in Mém. de la Société des sciences de Bordeaux, 2e série, IV p. 3
und 327 ff. vorgeschlagen hat, sind Günther a. a. O. S. 87 ff. 127, Hunrath Ue
das Ausziehen der Quadratwurzel S. 12 f., ders. die Berechnung irratio
Quadratwurzeln S. 20 ff. zu vergleichen; außerdem ist hervorzuheben, daß
nery, wenn auch nach anderen Voraussetzungen, p. 322 die in der obigen a
stellung im Nenner erscheinende Zahl 52, und p. 323 f. das Correlat 51
wickelt hat. Die in den obigen Hülfssätzen 5 und 6 dargelegten Modificati
des in Satz 4 entwickelten Nenners $2a$ erscheinen schon bei Hunrath
Berechnung u. s. w. S. 20 f. (vgl. mit S. 22), freilich nach anderen Voraussetzu
und in Verbindung mit verschiedenartigen, für Archimedes nicht nachweisb
Combinationen. Ueber die Näherung $\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a+1}$ bei dem Arabe
karchî (XI. Jahrh.), der aus griechischen Quellen geschöpft hat (Cantor V
I S. 655 ff.), und über die von Ibn Albannâ (XIII. Jahrh., Cantor I S. 6
daran geknüpften Begrenzungen vgl. Cantor I S. 659. 692, Günther Qua
Irration. S. 43 ff. 96, Hunrath a. a. O. S. 21 f.; doch wissen jene mittel
lichen Quellen nichts von der Archimedischen Zurückführung des Radicals
auf die nächste Quadratzahl, noch von der davon abhängigen, sowohl fü
Summen- als für die Differenzformel durchgeführten Begrenzung, welche
(S. 398 f.) aus den Sätzen 4—6 gezogen worden ist. In den verschiedene
Weissenborn in Zeitschr. für Mathem. u. s. w. (oben S. 368 Anm. 2) u
der Schrift Die irrationalen Quadratwurzeln u. s. w. aufgestellten Reihen ers
nen außer den von Archimedes selbst gegebenen Annäherungen $\frac{265}{153}$ und $\frac{1351}{780}$
(Die irration. Quadratw. S. 9 Nr. 25) noch die Annäherungen $\frac{7}{4}$ (S. 8 Nr. 1, $\frac{5}{3}$
(Nr. 19—21), $\frac{26}{15}$ (Nr. 18. 22. 25), allenthalben aber gemischt mit anderen, n
archimedischen Werten.

1) Da nämlich $\left(\frac{1351}{780}\right)^2 = \frac{1825201}{608400}$, und $3 = \frac{1825200}{608400}$ ist, so würd
Archimedische Ausrechnung von $\frac{\sqrt{1351^2-1}}{780} = \sqrt{3}$ die Annäherung

tte er die übrigen vielfach verschlungenen Rechnungen seiner
eismessung nicht so durchführen können, daß der ganze Beweis
ersichtlich und seinen Zeitgenossen verständlich geblieben wäre.

Von $\frac{7}{4}$ als der ersten Näherung für $\sqrt{3}$ ist Archimedes, wie
r sahen, auf $\frac{5}{3}$, dann auf $\frac{26}{15}$ und erst von da auf $\frac{1351}{780}$ gekom-
n. Das Zwischenglied $\frac{26}{15}$ erscheint, reichlich ein Jahrhundert
äter, mehrmals in den Anweisungen zur praktischen Rechen-
nst, die unter Herons Namen auf uns gekommen sind [1]). Nur
rd dieser Bruch hier, um praktisch verwendbar zu sein, schlecht-
n als ein mit $\sqrt{3}$ ungefähr gleicher Wert, nicht, wie bei
chimedes, als eine Begrenzung verwendet. Auch Heron ist von
r durch die Normale aus der Spitze abgeschnittenen Hälfte des
eichseitigen Dreieckes ausgegangen; doch hat er die kleinere
athete nicht, wie Archimedes, $= 1$, sondern $= 15$ gesetzt.
ernach ergab sich ihm die größere Kathete $= \sqrt{30^2 - 15^2} =$
$\sqrt{675}$. Da dieser Radicandus nur um 1 kleiner ist als $676 = 26^2$,
bestimmte er $\sqrt{675}$ auf $\kappa\varsigma'$ *σύνεγγυς*, d. i. auf nahezu 26, und
chnete nun weiter mit der Näherung $\frac{26}{15} \sim \sqrt{3}$*). Daß nach Ale-

---

$$\frac{1351 - \frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{0}\frac{1}{2}}{780} > \sqrt{3}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{3650401}{780.2702} > \sqrt{3}$$

geben haben. Der Fehler in dieser Annäherung ist so verschwindend klein, s er auch heutigen Tages bei einer noch so genauen praktischen Ausrechnung ht in Betracht kommen würde. Denn wenn man $\frac{3650401}{2107560}$ in eine gemischte cimalzahl zerlegt und die Ausrechnung bis zur 11ten Stelle einschl. fortführt, erhält man

1,7320508076 (6 näher als 5),

. denselben Wert, wie ihn die directe Ausrechnung von $\sqrt{3}$ nach der uns gefigen Methode ergiebt.

1) Heronis Alexandrini geom. et stereom. ed. Hultsch p. 58—60. 134 f. 147 49. 206. 218. 229. Den näheren Nachweis giebt die folgende Anmerkung, l zwar sind dort die Heronische *γεωμετρία*, *γεωδαισία* u. s. w. nach Capiteln l Unterabteilungen citiert.

*) Geom. 17, 5, und ähnlich Geod. 16, 4 (vgl. auch die im Parisinus 2013 rlieferte Redaction in der Anmerk. zu pag. 60, 16). Weggeblieben ist das *εγγυς* in der stark gekürzten Ausrechnung Geom. 17, 4. Wenn so das Verhältnis der Normale im gleichseitigen Dreieck zur halben Seite nahezu gleich 15 gesetzt war, so verhielt sich die ganze Seite zur Normale wie $2 \cdot 15 : 26$ $15 : 13$, d. h. die Normale war $= \frac{13}{15}$ der Seite, mithin, wenn die Seite $= 1$ etzt wurde, gleich $1 - \frac{2}{15} = 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30}$ (vgl. Cantor Vorles. I S. 334). Nach sem Ansatze wird aus der Seite die Normale berechnet in den Exempeln

xandreia außer den Endergebnissen, welche in der κύκλου μέτρ
des Archimedes vorliegen, auch eine Kunde von der Methode s
Wurzelausziehungen gedrungen sei, muß nach dem regen wi
schaftlichen Verkehr, den Archimedes mit Dositheos gepflogen
als wahrscheinlich gelten. Auch läßt sich nachweisen, daß meh
Heronische Wurzeln auf Archimedische Näherungswerte zur
gehen. Doch muß dies einer besonderen Untersuchung vorbeh
bleiben; hier genüge es zu constatieren, daß Heron nicht bloß
Archimedischen Wert $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$, sondern auch die Zwischens
$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{676-1}}{15} = \frac{\sqrt{26^2-1}}{15}$ kennt, vermittelst deren Archim
zu der genaueren Annäherung $\frac{1351}{780}$ gekommen ist. Eine sc
Uebereinstimmung kann nicht zufällig sein; sie muß auf Arch
dische Tradition zurückgehen. Dabei liegt aber der Unters
zwischen der feinen Methode des großen Mathematikers und
Verfahren des praktischen Rechenmeisters klar vor Augen.
chimedes benutzt die nach streng wissenschaftlichen Vorausset
gen gefundene Annäherung $\frac{26}{15}$, um von da auf $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{26^2-1}}{15}$
und weiter auf einen viel genaueren Wert für $\sqrt{3}$ zu komm
Heron dagegen nimmt als gegeben hin, daß in der Hälfte
gleichseitigen Dreieckes die kleinere Kathete = 15 und die
potenuse = 30 sei. Danach versucht er die größere Kathete
$\sqrt{30^2-15^2}$ zu berechnen, kommt aber nicht weiter als zu den
gleichungen $30^2-15^2 = 675 \sim 676$, d. i. $\sim 26^2$, mithin zu den
herungen 26 für die größere Kathete und $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$.

Da Archimedes als erste Näherung $\frac{7}{4} > \sqrt{3}$ gesetzt hat, s
ist zu fragen, ob ihm das oben (S. 382 ff.) erwähnte Verfahren
Theodoros bekannt gewesen ist, die Wurzel der τρίπους δύν

Geom. 15, 1. 16, 2, Geod. 14, 1 f. 15, 2. Da ferner nach demselben Verhält
die Fläche des gleichseitigen Dreieckes = $\frac{3}{10}$ vom Quadrate seiner Seite is
wird in den Aufgaben Geom. 14, 1 f. 16, 1. 17, 1, Geod. 13, 1 f. 15, 1. 16,
zeigt, daß man die Fläche findet, wenn man vom Quadrate der Seite $\frac{1}{4}$
dann noch $\frac{1}{40}$ (d. i. zusammen $\frac{3}{40}$) abzieht. Auch in den Aufgaben Geom. 17 f.
Geod. 16, 1. 3 wird als Verhältnis der Seite zur Normale 15 : 13 gesetzt und
nach auf verschiedenen Wegen die Fläche des Dreieckes berechnet. Ebens
in den Messungen der regulären Vielecke Geom. 102, Mensurae 51—53,
geepon. 75—77. 172—179 die Anwendung der Näherung $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$ mehr
nachzuweisen; nur einmal scheint, um das Endresultat abzukürzen, die grö
Näherung $\frac{7}{4}$ gewählt worden zu sein. Vgl. Tannery L'arithmétique des
dans Héron in den Mém. de la Société des Sciences de Bordeaux, 2e série
p. 184 f. 191.

ch die Zahl 1 mit auslaufenden binären Brüchen zu umgrenzen [1]).
wiß hat er eine Untersuchung nicht unbeachtet gelassen, die
n Geringerer als Platon einer besonderen Erwähnung für wür-
erachtet hatte, und diese Vermutung wird zunächst dadurch
tätigt, daß schon bei Theodoros (S. 382), wie später bei Archi-
des, die Formel $\frac{7}{4} > \sqrt{3}$ als erste Näherung erscheint. Ueber-
s wird sich zeigen, daß Archimedes in den Zwischenrechnungen
nes Beweises des 3. Satzes der Kreismessung soweit als thun-
von binären Brüchen ausgeht und, wenn andere Brüche da-
schen gekommen waren, möglichst bald zu jenen zurückkehrt.
mag also die Annahme gelten, daß dem Archimedes das Ver-
ren des Theodoros, sei es unmittelbar aus dessen Schrift, sei
aus einem Auszuge, bekannt gewesen ist; allein ganz verfehlt
de es sein, lediglich aus der übereinstimmenden Näherung $\frac{7}{4}$
aus dem gemeinsamen Gebrauche von binären Brüchen folgern
wollen, daß jene ganze Methode des Archimedes, die wir oben
399 ff.) auf analytischem Wege ermittelt und synthetisch fest-
ellt haben, schon früher von Theodoros erfunden und ange-
det worden sei.

Der Rückblick auf Theodoros führt uns auch zu einer Erwä-
g, welche bei der obigen Synthesis absichtlich noch zurückge-
t worden war. Von der ersten Umgrenzung $\frac{7}{4} > \sqrt{3} > \frac{5}{3}$ ist
nimedes fortgeschritten zur Quadrierung von $\frac{5}{3}$ u. s. w. Was
ein Grund aber lag vor, daß er nicht $\frac{7}{4}$ quadrierte und von
aus weiter ging? Die Antwort ist leicht zu finden. Von
$\frac{2}{1}$ wäre er zu der Formel $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{49-1}}{4}$, und von da zu der
en Näherung $\frac{7-\frac{1}{14}}{4} > \sqrt{3}$, d. i. $\frac{97}{56} > \sqrt{3}$ gelangt. Schon die-
Bruch ist weniger bequem als $\frac{26}{15}$, d. i. der oben (S. 403) aus

---

[1]) Der Ausdruck „binäre Brüche“ für beliebige Abschnitte der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

ie schon oben (S. 383), so auch hier und im Folgenden gewählt worden,
ne kurze und zugleich deutliche Benennung zu haben. Die binären Brüche
en in den Nennern die Reihe der Potenzen von 2, gerade wie die Decimal-
die Potenzen von 10, und die Sexagesimalbrüche die Potenzen von 60
Der modernen Bezeichnung 0 an einer beliebigen Stelle der decimalen
reihe entspricht, wie schon bemerkt, im Griechischen das Fehlen eines
s der vollständigen binären Bruchreihe (gerade so, wie auch bei den Sexa-
lbrüchen). Daß die binären Brüche Stammbrüche sind, geht unmittel-
s dem Aufbau der Reihe hervor.

$\frac{5}{3}$ hergeleitete erste Näherungswert. Wäre nun aber vollend
zweite Näherungswert aus $\frac{7}{4}$ durch Quadrierung von $\frac{97}{56}$ und
die Formel $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{97^2-1}}{56}$ berechnet worden, so hätte sic
Bruch $\frac{18817}{56 \cdot 194}$, mithin ein Zähler, der > 10000 ist, ergeben.
chimedes brauchte aber einen Zähler der < 10000 ist (S. 399. 4
deshalb wählte er nicht von $\frac{7}{4}$, sondern von $\frac{5}{3}$ aus die zwe
Annäherung, die ihm den verhältnismäßig bequemen Wert
und nach der anderen Seite hin die noch bequemere Begren
$\frac{265}{153}$ ergab[1]).

VI.

Hiermit sind wir an das Ende der Untersuchung über di
chimedische Begrenzung von $\sqrt{3}$ gelangt. Wenn wir uns nu
den andern in der Kreismessung noch vorkommenden Wurzeln
den, so ist zunächst zu wiederholen, daß nach dem Gang
ganzen Beweisführung (S. 385 ff.) allenthalben entweder gr
oder kleinere Näherungswerte statt des gesuchten Wurzelw
berechnet worden sind. Da nun Archimedes auch die Annäh
gen für $\sqrt{3}$ von vornherein so auseinandergehalten hat, so i
zunehmen, daß er jene Formel $\sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}$, welche ih
Reihe nach die Näherungen $\frac{7}{4}$, $\frac{26}{15}$, $\frac{1351}{780}$ größer als $\sqrt{3}$
(S. 403), auch zur Berechnung der Näherungswerte im zwe
Teile seines Beweises (S. 389 ff.), nämlich

$$3013\tfrac{3}{4} > \sqrt{9082321}$$
$$1838\tfrac{9}{11} > \sqrt{3380929}$$
$$1009\tfrac{1}{6} > \sqrt{1018405}$$
$$2017\tfrac{1}{4} > \sqrt{4069284\tfrac{1}{36}},$$

verwendet hat. Es waren also die Radicanden 9082321, 338
u.s.w. zu zerlegen in die nächste Quadratzahl $= a^2$ und in
Differenz „Radicandus $- a^2 = b$“, bez. „a^2 — Radicandus
und danach die Näherungen $a + \frac{b}{2a}$, bez. $a - \frac{b}{2a}$, deren jede

1) Um diesen Beweis ganz einwandfrei zu machen, ist noch zu constie
daß die erste Annäherung von $\frac{7}{4}$ aus, d.i. $\frac{97}{56} = 1{,}732143$ weit wenige
ist als die zweite Annäherung von $\frac{5}{3}$ aus, d.i. $\frac{1351}{780} = 1{,}732051$. Vgl.
Anm. 2.

die gesuchte Wurzel ist, auszurechnen[1]). Da die Nenner der laufenden Brüche in den hier aufgegebenen Ausrechnungen zwi-en 7000 und 2000 liegen und auch die Zähler nicht ganz kleine ılen darstellen, so ist der Bruch $\frac{b}{2a}$ von Archimedes jedesmal, l zwar sehr stark, gekürzt worden.

Soweit ist alles klar; aber es stellt sich doch noch eine Schwie-keit heraus, wenn wir die hier aufgegebenen Berechnungen mit en bei $\sqrt{3}$ genauer vergleichen. Dort war nämlich jedesmal ch die Quadrierung einer vorher gefundenen Näherung diejenige adratzahl gegeben, welche dem neugebildeten Radicandus am hsten stand. Hier aber ist zu jedem Radicandus die erforder-ıe Quadratzahl erst zu suchen, d. h. es sind aus einer gegebenen ırstelligen Zahl zunächst die Ganzen der Wurzel auszuziehen.

Nun ist die Vermutung ausgesprochen worden, daß Archimedes rhaupt nicht nach arithmetischer Methode Wurzeln habe aus-ıen können, sondern sich auf die Benutzung von Tabellen der ıdratzahlen und zur Bestimmung der auslaufenden Brüche auf Versuchen und Erraten beschränkt habe[2]). Das bedarf wohl

---

1) Aus dem VII. Abschnitte wird hervorgehen, weshalb hier diese beiden neln ausdrücklich unterschieden worden sind. Heutigen Tages wenden wir der Ausrechnung einer Quadratwurzel, weil wir gleichmäßig für die Ganzen für die Brüche das Decimalsystem durchführen, nur die Formel $(a+b)^2 = \cdot 2ab + b^2$, bez. die Annäherung $\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a}$ an. Archimedes hat zwar, sofort zu zeigen ist, die Ganzen der Wurzel nach derselben Methode aus-gen; aber den noch verbliebenen Rest „Radicandus $- a^2 = b$“ nur dann ehalten und die Ganzen der Wurzel nebst auslaufendem Bruch auf die Form $\frac{b}{2a}$ gebracht, wenn der Rest kleiner als die halbe Differenz zwischen a^2 und $1)^2$ war. Im entgegengesetzten Falle hat er statt dieses Restes die leicht berechnende Differenz der nächsthöheren Quadratzahl und des Radicandus :zt. Wenn so die Wurzel als eine Zahl von Ganzen *minus* Bruch darge-; war, wurde zuletzt dieses Resultat auf die für gemischte Zahlen übliche ı zurückgeführt, mithin $3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ statt $3014 - \frac{1}{4}$ (p. 268, 12 Heib.) und $1838\frac{3}{11}$ $1839 - \frac{2}{11}$ (p. 268, 16) geschrieben und demgemäß auch gesprochen.

2) Nesselmann Die Algebra der Griechen S. 110: „Es bleibt also nur die ıutung übrig, daß die Alten ihre Wurzeln durch Versuche und Erraten ge-ın haben, worauf namentlich die Multiplicationsproben bei Eutokius hin-n. Die zunächst kleinere ganze Zahl, welche der gesuchten Wurzel ent-h, konnten sie leicht aus einer Tabelle der Quadratzahlen entnehmen; und ihnliche Tafeln, die ihnen ihre mühsamen Rechnungen erleichterten, ihnen fremde waren, beweist die Multiplicationstafel bei Nikomachus [Arithm. 9]“. Der Zusammenhang der Stelle zeigt, daß das von den Griechen all-in Gesagte auch für Archimedes gelten soll. Vgl. auch Friedlein Die Zahl-en und das elementare Rechnen der Griechen und Römer S. 81. [Wenn

keiner Widerlegung, nachdem die bisherigen Untersuchungen
zeigt haben, eine wie feine Methode Archimedes auf die Begrenz
von $\sqrt{3}$ verwendet hat. Im Vergleiche dazu war die Auszieh
der Ganzen einer Quadratwurzel aus einer mehrstelligen
nur ein Spiel, freilich kein Erratespiel, und auch die Abrund
der auslaufenden Brüche ist, wie noch zu zeigen, auf einem g
anderen Wege als dem des Tastens und Erratens zu Stande
kommen.

Die Ausziehung der Ganzen einer Wurzel würde mit wen
Worten zu erledigen sein, wenn die alten Griechen nicht eine
der unsrigen abweichende Zahlenbezeichnung gehabt hätten.
aus diesem Grunde bedarf es einer etwas längeren Darstellun

Das griechische Zahlensystem steht an Brauchbarkeit
zurück hinter dem indisch-arabischen mit seinen 9 Ziffern und
Null. Aber immerhin haben die Griechen ihre 27 Zahlzeic
schon so verwendet, daß die Beziehungen auf das decimale Sys
welches ihnen ja unmittelbar mit den Zahlwörtern ihrer Spr
gegeben war, möglichst deutlich hervortraten. Von 1 bis
brauchten sie allerdings 27 Zahlzeichen, während wir mit 10
kommen. Von 1000 an traten aber wieder die ersten 9 Zahlzeic
ein, und dieselben kamen dann zum dritten Male zur Anwen
um die ersten Myriaden bis 90000 zu zählen. Da mit den
riaden die Zählung überhaupt wieder von vorn anfing, so wur
ferner 10 Myriaden durch $\overline{\iota}$, 20 durch $\overline{\kappa}$ u. s. w. bezeichnet.
Unterscheidung erhielten die Zahlzeichen für die Tausende
einen Strich, die Zehntausende aber wurden durch Beifügung

---

der letztere, um seine mit Nesselmann übereinstimmende Ansicht zu stütze
Hultsch in den Jahrbüchern für Philologie herausg. von Fleckeisen, 1867
sich beruft, so beruht dies auf einem Mißverständnis. An der angeführten
ist nicht von Quadratwurzeln, sondern von einer Cubikwurzel, und nich
Mathematikern aus der Blütezeit der altgriechischen Mathematik, sonder
König Pheidon die Rede, der im 7. Jahrh. v. Chr., oder nach anderen
früher, ein System der Längenmaße, Hohlmaße und Gewichte geschaffe
Setzt man voraus, daß dieses System ein in sich geschlossenes war, so ka
den Begründer desselben als Längeneinheit die Seite eines Würfels in Be
dessen Wassergehalt ein bestimmtes Gewicht darstellte; es konnte also au
Frage auftauchen, nach einem kubischen Volumen Wassers, das ein besti
Gewicht vertrat, die Längeneinheit zu bestimmen. Wenn etwas der Art
zu Pheidons Zeiten zur praktischen Ausführung gekommen ist (und die ne
Forschungen verschiedener Metrologen neigen mehr und mehr zu dieser Ans
hin), so kann man nur an eine versuchsweise Annäherung, nicht an
thodische Ausrechnung einer Cubikwurzel denken. Ueber Cubikwurzel
Heron und Vitruvius vgl. Hultsch in Fleckeisens Jahrb. 1876 S. 253 ff.]

ιάδες (wofür verschiedene Abkürzungen in Gebrauch waren), den niedrigeren Zahlen abgetrennt. Es stand also z. B. $\overline{\nu\varrho}.\,\overline{\gamma\gamma}$ der heutigen Bezeichnung 33003 nicht allzu fern. Diontos, der freilich ganz am Ende der altgriechischen Mathematik t, ist noch einen Schritt weiter gegangen und hat die Myriaden durch einen Punkt von den niedrigeren Zahlen abgetrennt[1]). len wir hiernach die Zahl $\overline{\tau\lambda\gamma}.\,\overline{\gamma\tau\lambda\gamma} = 3333333$, so differieren die Zeichen τλ von der heutigen, ganz auf dem Stellenwert ihenden Bezeichnung.

Doch deutlicher noch weisen die gesprochenen griechischen len darauf hin, wie die Ganzen einer Wurzel, Stelle für Stelle, einer größeren Zahl zu entwickeln waren. Die Quadrate der len 1 bis mit 9 reichen von 1 bis 81, sie werden also ausgechen entweder bloß als *μονάδες*, z. B. *τέσσαρες*, oder als *μονά*- und *δεκάδες* zusammen, z. B. *ἑκκαίδεκα*, *εἴκοσι πέντε* u. s. w. ıer reichen die Quadrate von 10 bis mit 90 von 100 bis mit), werden also ausgesprochen als *ἑκατοντάδες*, z. B. *τετρακόσιοι*, als *ἑκατοντάδες* und *χιλιάδες* zusammen, z. B. *χίλιοι ἑξακόσιοι*, ίλιοι *πεντακόσιοι* u. s. w. Das Quadrat von 100 bildet eine neue ieit, die *μυριάς*, und von da geht die decimale Gruppierung er wie vorher[2]).

Wenn nun Archimedes durch seine Sandrechnung nachgewiesen wie die decimale Gruppierung der Zahlen bis ins Unendliche esetzt werden kann, ohne daß man andere Zahlwörter als die mein üblichen anzuwenden brauchte, so konnte er nicht im esten darüber im Zweifel sein, welche Decimalstellen die Gan-

---

) Vgl. Diophanti opera ed. Tannery I p. 222, 12 f. 15 f. 224, 20 f. 23 f. u. ö. en ist das Zeichen $\overset{\nu}{M}$ oder M^{ν} beigefügt p. 120, 9. 186, 4—9.

) Die griechischen Zahlwörter von 10 aufwärts zeigen zumeist unmittelbar die Wortbildung an, welche Zahlengruppen sie vertreten. Daß *ἕνδεκα* mme von 1 Einheit (*μονάς*) und 1 *δεκάς* ausdrückt, konnte niemanden gen bleiben. Dasselbe gilt von *δώδεκα*, *τρεῖς καὶ δέκα* u. s. w. Auch *δισ* = 2 *χιλιάδες* u. s. w. waren unmittelbar kenntlich. In *διακόσιοι*, *τριακό*. s. w. war die Grundform *ἑκατόν* auch für den Laien nicht zu verkennen. h bei *εἴκοσι*, *τριάκοντα* u. s. w., wo der Klang des Wortes keinen Anhalt genügte die Analogie der übrigen Zahlwörter um darin die Bedeutungen κάδες, *τρεῖς δεκάδες* u. s. w. zu erkennen. Unzweideutig erklärt den dehen Aufbau des Systems der griechischen Zahlwörter Archimedes aren. , 21—24: *ἀριθμείσθωσαν — μονάδες καὶ ἐκ τῶν μονάδων δεκάδες καὶ ἑ*ιάδες *καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας μυριάδας*, und ähnlich p. 268, Vgl. auch p. 270, 2: *εἴ κα ἔωντι ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἑξῆς κει*ό δὲ *παρὰ τὰν μονάδα δεκὰς ᾖ*, d. i. wenn von 1 ab 10 und die Potenzen der Reihe nach hingeschrieben werden.

zen einer aus einer beliebigen Zahl auszuziehenden Wurzel nehmen werden.

Nehmen wir z. B. gleich den Radicandus 9082321, de kurzem (S. 408) an erster Stelle angeführt wurde. In dieser würden wir Modernen die Stellen rückwärts zu je zwei abz So kurz konnte Archimedes nicht verfahren, da die griechis schriebene Zahl $\overline{\text{Μη}}$. $\overline{\text{,βτκα}}$ trotz ihrer 7 Decimalstellen nur 6 zeichen enthielt (denn für 0 fehlte, wie gesagt, die Bezeich Allein seine Einteilung des Radicandus lief auf dasselbe h Denn dem ausgehenden Betrage $\overline{\kappa\alpha}$ entsprachen die μονάδε Wurzel, dem Betrage $\overline{\text{,βτ}}$ die δεκάδες, dem Betrage $\overline{\eta}$ (μυρ die ἑκατοντάδες, endlich dem Betrage $\overline{\text{Μ}}$ (μυριάδες) $= 9 \cdot 100 \cdot$ die χιλιάδες der Wurzel. Die Ganzen von $\sqrt{9082321}$ mußte die Form

$$1000\,\alpha + 100\,\beta + 10\,\gamma + \delta$$

haben, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auf die Werte $0, 1, 2 \ldots 8, 9$ beschränkt

Nehmen wir nun an, daß α schon gefunden war, so mu dem Reste „Radicandus $-(1000\,\alpha)^{2}$“ nach Eukl. Elem. II, nächst $2 \cdot 1000\,\alpha \cdot 100\,\beta$ und $(100\,\beta)^{2}$, ferner $2(1000\,\alpha + 100\,\beta$ und $(10\,\gamma)^{2}$, endlich noch zwei Zahlen enthalten sein, die v Hand außer Betracht bleiben können.

Daß $\alpha = 3$ ist, lag klar vor Augen. Wir bezeichnen nu Kürze halber jedesmal den bereits ausgerechneten Teil der Wu durch a und den Rest, welchen die Subtraction des Quadra vom Radicandus ergiebt, mit b. Das Quadrat von 3 χιλιάδε 900 μυριάδες. Es verbleiben mithin als Rest 8 μυριάδες + Darin soll zunächst $2 \cdot 3000 \cdot 100\,\beta$ enthalten sein. Allein wir auch β minimal $= 1$ setzen würden, müßten $2 \cdot 3000 \cdot 10$ 600000, d. i. mehr als 8 Myriaden abgezogen werden. Es also in diesem Falle keine Wurzelstelle von der Form $100\,\beta$ mit andern Worten, die Stelle der ἑκατοντάδες bleibt frei. nach bleibt zunächst $a = 3000$ und der Rest $b = 82321$. diesem Reste $2a \cdot 10\gamma$ enthalten sein soll, so wird γ durch vision $\dfrac{82321}{2 \cdot 3000 \cdot 10}$ vorläufig zu bestimmen sein. Wir haben nach $\gamma = 1$ zu setzen und ziehen von b zunächst $2 \cdot 3000 \cdot$ dann noch 10^{2} ab. Somit ist a auf 3010 und der Rest b auf berechnet. Weiter bestimmen wir nun δ durch die Division auf 3, und ziehen von b zunächst $2 \cdot 3010 \cdot 3$, sodann noch Es verbleibt als Rest 4152. Da $\dfrac{4152}{2 \cdot 3013} < 1$ ist, so sind mi

rage 3013 die Ganzen der Wurzel definitiv bestimmt, und dem Reste wird ein Bruchteil der Wurzel zu ermitteln sein, zwar, wie die fertige Ausrechnung des Archimedes zeigt, nur ganz ungefähre Annäherung.

So also, meinen wir, hat Archimedes die Ganzen von $\sqrt{9082321}$, so auch die Ganzen der übrigen in der Kreismessung vorkomden Wurzeln ausgerechnet, und mit dieser Annahme wird wohl Richtige getroffen sein, weil eine andere passende und mit chischen Zahlzeichen ausführbare Methode überhaupt nicht in racht kommen kann. Nur um die Darstellung nicht ohne Not erschweren, sind im Vorhergehenden moderne Zahlzeichen gelt worden. Natürlich hätte sich dasselbe auch mit griechischen lzeichen darlegen lassen, ja man hätte das Ganze auch in griecher Sprache und durchgehends nach den Anschauungen der n Mathematiker niederschreiben können, und es wäre dabei hin und wieder die Form, nicht aber der wesentliche Inhalt obigen Schlußfolgerungen zu ändern gewesen.

VII.

Die Ermittelung der Ganzen der Wurzel aus einem mehrigen Radicandus war nur ein vorbereitender Schritt zur Lö; der Aufgabe, einen passenden Näherungswert für die zel aus einem solchen Radicandus zu finden. Es bleibt also die Frage zu beantworten, nach welcher Methode Archimedes in der Kreismessung überlieferten auslaufenden Brüche efunden hat.

Zur Vergleichung fügen wir die letzteren teils hier, teils später nfang des VIII. Abschnittes in so genauer Ausrechnung bei, lie von Archimedes gestellten Aufgaben es erfordern. Wir gen also die Wurzel jedes siebenstelligen Radicandus auf 8 malstellen. Der vierte Radicandus $4069284\frac{1}{36}$ würde eigentlich mindesten als zehnstellige decimale Zahl zu geben sein; da h $\frac{1}{36}$ einen stark gekürzten, mithin wenig genauen Wert dar, so genügt die Ausrechnung der Wurzel auf 9 Decimalstellen. Da alle diese Werte von $\sqrt{3}$ abhängen, so sind auch die Aredischen Annäherungen für diese Wurzel mit in die folgenden rsichten aufgenommen worden.

Zunächst haben wir es mit den Wurzeln zu thun, die im iten Teile des Beweises des 3. Satzes (oben S. 389 ff.) vornen und sämmtlich größer als der gesuchte Wurzelwert sind.

Aufgabe.	Ausrechnung des Archimedes.	Dieselbe Ausrechnung in Decimalbrüchen.	Genaue Annäherung bez. 9 Decimalste
$\sqrt{3}$	$< \frac{1351}{780}$	$< 1{,}7320513$	1,7320508
$\sqrt{9082321}$	$< 3013\frac{3}{4}$	$< 3013{,}7500$	3013,6889
$\sqrt{3380929}$	$< 1838\frac{9}{11}$	$< 1838{,}8182$	1838,7303
$\sqrt{1018405}$	$< 1009\frac{1}{6}$	$< 1009{,}1667$	1009,1605
$\sqrt{4069284\frac{1}{36}}$	$< 2017\frac{1}{4}$	$< 2017{,}2500$	2017,24664.

Alle hier von Archimedes gesetzten Brüche haben als ge schaftliches Merkmal, daß sie starke Kürzungen der eigentli berechnenden Werte darstellen.

Um einen gemeinen Bruch, dessen Zähler und Nenner e stellig und zu einander prim sind, annähernd zu kürzen, is weder der Zähler oder der Nenner, oder es sind beide zu auf Beträge zu bringen, welche die Vereinfachung des Bi durch gemeinschaftliche Teilung ermöglichen. Da Archime der Kreismessung nur mit solchen Werten rechnet, welche g oder kleiner als die gesuchte Größe sind, so mußte die Kü eines vorliegenden Bruches, der bereits größer als die ge Größe ist, einen wenn auch möglichst nahen, aber immerhin größeren Wert darstellen, und im entgegengesetzten Falle noch kleineren Wert.

Ein Bruch wird aber größer als ein gegebener Bruch, v man entweder den Zähler vergrößert oder den Ne verkleinert oder, vorkommenden Falls, auch beides zu thut. So hat Archimedes z. B. am Schlusse des ersten Teil nes Beweises zum 3. Satze (oben S. 389) $\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} > \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$ g d. h. er hat von dem gegebenen Nenner $4673\frac{1}{2}$ die Zahl 1 b zogen und ist dadurch auf die Kürzung $\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$, und a Näherung $\frac{1}{7} > \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$ gekommen.

Soll zweitens die Kürzung einen kleineren Wert al gegebenen Bruch darstellen, so tritt natürlich das umgekehrt V fahren ein.

In diesen beiden Fällen ist angenommen, daß der auslaie Bruch als Glied einer Summe zu der vorhergehenden ganz Zahl hinzutritt. Wenn er aber als Subtrahendus in Differenz erscheint, so ist selbstverständlich, um eine Kü

größer als die gegebene gemischte Zahl ist, zu er-
en, der Subtrahendus zu verkleinern und in diesem Sinne
Zähler oder Nenner des gegebenen Bruches zu modificieren.

Bei der Ausziehung der Ganzen von $\sqrt{9082321}$ war der Rest
$2321 - 3013^2 = 4152$ geblieben (S. 412). Da $4152 > 3013 + 1$
so folgt aus dem oben eingeschalteten 2., bez. 3. Hülfssatze
395), daß der Radicandus 9082321 näher bei 3014^2 als bei
3^2 liegt. Die Differenz zwischen diesen beiden Quadraten ist
dem 1. Hülfssatze $= 3013 + 3014 = 6027$; mithin ist 3013^2
$52 = 3014^2 - (6027 - 4152) = 3014^2 - 1875$, und ferner nach
4

$$3014 - \frac{1875}{2 \cdot 3014} > \sqrt{9082321}.$$

Nun hat Archimedes statt des Bruches $\frac{1875}{2 \cdot 3014} = \frac{1875}{6028}$ die
zung $\frac{1}{4}$, d. h. einen binären Bruch gesetzt[1]). Daß er auf einen
ien Stammbruch nicht zufällig gekommen ist, sondern daß er
gesucht hat, zeigt der Vergleich mit den übrigen Wurzeln.
n die oben (S. 408) aufgeführte Reihe schließt, trotzdem daß
vischen die Brüche $\frac{9}{11}$ und $\frac{1}{6}$ sich finden, wieder mit $\frac{1}{4}$, und in
analogen, zu Anfang des VIII. Abschnittes aufzuführenden
.e erscheinen nur binäre Brüche. Und solche hat Archimedes
in den beiden Fällen, wo der Bruch $\frac{3}{4}$ ausläuft (p. 268. 12.
durch die Schreibung **S** δ'', d. i. $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ ausdrücklich bezeichnet.
Damit aber ist noch immer nicht nachgewiesen, auf welchem
ge Archimedes zu der Kürzung $\frac{1}{4}$ statt $\frac{1875}{6028}$ gekommen ist.
äufig sehen wir nur, erstens daß $\frac{1}{4}$ der nächste binäre Bruch
$\frac{875}{028}$ ist[2]), zweitens, daß $\frac{1}{4} = \frac{1507}{6028}$ die Bedingung erfüllt
ner als $\frac{1875}{6028}$ zu sein (damit umsomehr $3014 - \frac{1}{4}$, d. i. $3013\frac{3}{4}$
ßer als $\sqrt{9082321}$ sei).

Indes ist auch das Weitere unschwer aufzufinden[3]). Es ist

---

1) Statt $3014 - \frac{1}{4}$ hat Archimedes p. 268, 12 Heib. aus leicht ersichtlichen
en ‚γιδ′ **S** δ″ = $3013\frac{3}{4}$ geschrieben. Vgl. oben S. 409 Anm. 1.

2) Die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1875}{6028}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, weisen der Reihe nach, wenn sie auf den
nschaftlichen Nenner $2 \cdot 6028$ gebracht worden sind, die Zähler 6028, 3750,
1507 auf, woraus unmittelbar hervorgeht, daß $\frac{1}{4}$ näher als alle anderen
n Brüche bei $\frac{1875}{6028}$ liegt.

3) Welche Wege die Erklärung hier einzuschlagen habe, deutet Archimedes
durch die kurzen Hinweise p. 268, 15: ἑκατέρα γὰρ (πλευρά) ἑκατέρας δ′
d p. 270, 1: ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ια′ μ″ an. Damit meint er, wie aus
en gegebenen Bearbeitung seines Beweises (S. 391) hervorgeht, daß erstens
al $5924\frac{1}{4}$ $(= \sqrt{9082321} + 2921)$ zu 780 sich deshalb wie 1823 : 240 verhält,

früher (S. 400) darauf hingewiesen worden, daß der im zw
Teile des Archimedischen Beweises erscheinende Nenner de
herungswertes für $\sqrt{3}$, nämlich 780, das Product von $2 \cdot 2 \cdot 3$
ist. Dieser Nenner würde bei den complicierten Ausrechnu
welche an die Näherung $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$ sich knüpfen (S. 390 ff.)
verändert geblieben sein, wenn nicht damit die Zähler zu ur
lich großen Zahlen angewachsen wären. Da nun die Zähl
letzter Instanz auf angenäherte Wurzelwerte zurückgingen, s
es wünschenswert die Annäherungen der auslaufenden Brüch
beschadet der Richtigkeit der ganzen Näherungsrechnung,
gestalten, daß man Zähler erhielt, die einen gemeinschaftc
Teiler mit dem Nenner 780 hatten.

Sehen wir nun von den im Texte fertig vorliegenden
taten ab und versetzen uns im Geiste an jene Stelle der er
ginnenden Ausrechnung, wo an Archimedes die Aufgabe herat
eine passende Näherung für $3014 - \frac{1875}{6028}$ zu finden (S. 415).
noch zu suchenden Bruch bezeichnen wir mit $\frac{x}{y}$. Derselbe
folgende Bedingungen zu erfüllen: 1) er sollte thunlichst na
dem gegebenen Bruche liegen (womit zugleich ausgesproch
daß $x < y$ sein soll) — 2) er sollte kleiner als der gegebene
sein — 3) er sollte im Fortgange der Rechnung zu einem Z
führen, der einen gemeinschaftlichen Teiler mit 780 hat.

Aus der obigen Bearbeitung des Archimedischen Bew
(S. 391) geht hervor, daß zu $3014 - \frac{x}{y}$ zunächst 2911 hinzu
war. So stellte sich als Zähler $5925 - \frac{x}{y}$ heraus. Dieser
sollte einen gemeinschaftlichen Teiler mit dem Nenner $2 \cdot 2 \cdot 3$
haben, und am erwünschtesten war es gewiß, wenn zunächst
eliminiert werden konnte. Die Division $5925 : 13$ ergab als
10. Es waren also in der Formel $10 - \frac{x}{y} = \frac{10y - x}{y}$ die
x und y so zu wählen, daß der Zähler $10y - x$ durch 13 t
war und überdies die vorher unter 1 und 2 gestellten Bedingu

---

weil man das Verhältnis $5924\frac{3}{4} : 780$, ohne es zu alterieren (vgl. Elem. V
mit 4 erweitern und durch 13 kürzen kann, und daß zweitens das Ver
$3661\frac{9}{11} : 240$ durch Erweiterung mit 11 und dann durch Division beider
(ὅροι) durch 40 zu dem Verhältnis $1007 : 66$ vereinfacht werden kann. V
Tannery Sur la mesure du cercle d'Archimède in Mém. de la Soci
sciences de Bordeaux, 2e série, IV p. 319 f. es unterläßt, diese ausdrücklich
Zeugnisse des Archimedes anzuführen, so setzt er dabei offenbar voraus
dieselben jedem Leser des griechischen Textes in die Augen fallen müss

gen erfüllt wurden. Danach ergab sich ohne Schwierigkeit als
hste Lösung $y = 4$ und $x = 1$.

Auf diesem Wege also ist Archimedes darauf gekommen statt
$4 - \frac{1}{6}\frac{8}{0}\frac{7}{2}\frac{5}{8}$ die Näherung $3014 - \frac{1}{4}$, d. i. $3013\frac{3}{4}$ zu setzen. Durch
Hinzufügung von 2911 erhielt er dann $5924\frac{3}{4} = \frac{13 \cdot 1823}{4}$;
hin war der Bruch $\frac{5924\frac{3}{4}}{780}$ umgeformt zu $\frac{13 \cdot 1823}{4 \cdot 13 \cdot 60} = \frac{1823}{240}$.

Ein ähnliches Verfahren war bei der nächsten Wurzelannä-
ıng einzuschlagen. Die Ausrechnung von $\sqrt{3380929}$ ergab 1838
ıze und als Rest 2685. Es war also der Radicandus umzu-
nen zu

$$1839^2 - (1838 + 1839 - 2685) = 1839^2 - 992,$$

es ergab sich nach Satz 4 (S. 396)

$$1839 - \frac{992}{2 \cdot 1839} > \sqrt{3380929}.$$

kann es dem Archimedes nicht entgangen sein, daß statt
$\frac{2}{839} = \frac{1984}{7356}$ in erster Linie die Näherung $\frac{1}{4} = \frac{1839}{7356}$ sich dar-
denn dies war sowohl ein binärer Bruch als auch $< \frac{1984}{7356}$,
der Zusammenhang der Rechnung es verlangte. Wenn er also
t dessen die etwas entferntere Näherung $\frac{2}{11}$ gewählt hat[1]), so
die Rücksicht auf die spätere Eliminierung eines gemeinschaft-
en Theilers, ganz wie vorher, den Ausschlag gegeben haben.

In der That war nicht schwer zu finden, daß statt $1839 - \frac{992}{2 \cdot 1839}$
Näherung $1839 - \frac{x}{y}$ so gewählt werden konnte, daß der nach-
in der Rechnung hervortretende Zähler $1839 - \frac{x}{y} + 1823$ (vgl.
)1) einen nicht unansehnlichen Teiler mit dem Nenner 240 ge-
ısam hatte. Die versuchsweise Teilung von $1839 + 1823 =$
) durch 40 ergab als Rest 22. Es waren also womöglich in
Formel $22 - \frac{x}{y} = \frac{22y - x}{y}$ die Werte x und y so zu wählen,

[1]) Um zunächst $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{11}$ mit einander zu vergleichen, sind diese Brüche
en gemeinschaftlichen Nenner 44 zu bringen, wonach sich Zähler $11 >$
r 8, mithin $\frac{1}{4} > \frac{2}{11}$ ergiebt. Da nun $\frac{1}{4} < \frac{992}{2 \cdot 1839}$ ist, so folgt daraus
ich, daß $\frac{2}{11}$ eine entferntere Näherung als $\frac{1}{4}$ darstellt. Es mögen aber zu
icherer Vergleichung noch die Brüche $\frac{992}{2 \cdot 1839}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{11}$ auf den gemeinschaft-
ı Nenner $4 \cdot 11 \cdot 1839$ gebracht werden. Dann ergeben sich der Reihe nach
ähler $21824 > 20229 > 14712$.

daß der Zähler $22y - x$ durch 40 teilbar und überdies der $\frac{x}{y}$ ähnlich dem gegebenen Bruche $\frac{992}{2 \cdot 1839}$, und zwar kleine dieser war. Allen diesen Anforderungen entsprach die Lös $= 11$ und $x = 2$.

Deshalb also hat Archimedes den Bruch $\frac{992}{2 \cdot 1839}$ zu $\frac{4}{1}$ kürzt, dann $1839 - \frac{2}{11}$ umgesetzt zu $1838\frac{9}{11}$, und, nachdem 1823 addiert worden war, Zähler und Nenner des Bruches $\frac{3}{4}$ $= \frac{40280}{11 \cdot 240}$ durch 40 dividiert. So erhielt er $\frac{1007}{66}$.

Die beiden noch übrigen angenäherten Wurzelausrechn (vgl. S. 414) bieten keine Schwierigkeiten. Nachdem der Ra dus 1018405 auf die Form $1009^2 + 324$ gebracht worden wa gab sich nach Satz 4 (S. 396)

$$\sqrt{1009^2 + 324} < 1009\tfrac{324}{2018}.$$

Statt des auslaufenden Bruches mußte nun ein ähnlicher und größerer gesucht werden. Da $324 : 2018$ sich annähernd wie verhalten, so wurde $\frac{324}{1944}$ statt $\frac{324}{2018}$ gesetzt. Somit war ein ßerer Wert als der gegebene Bruch und zugleich die bequem rundung $\frac{324}{1944} = \frac{1}{6}$ gefunden. Auch im Hinblick auf die noc genden Ausrechnungen war hieran nichts zu ändern.

Endlich wurde der Radicandus $4069284\frac{1}{36}$ auf die Form $+ 995\frac{1}{36}$ gebracht. Hieraus ergab sich als erste Annäherun den auslaufenden Bruch der Wurzel $\frac{36 \cdot 995 + 1}{36 \cdot 2 \cdot 2017}$. Doch w nicht nötig, diesen vielstelligen Bruch auszurechnen; denn e nügte als nächstgrößerer Wert (indem, bei der Kürzung dur im Zähler 1 statt $\frac{1}{36}$ gesetzt wurde) die Abrundung $\frac{996}{2 \cdot 201}$ $\frac{498}{2017}$. Daß hier Zähler und Nenner sich sehr nahe wie $1 : 4$ v halten und daß $\frac{1}{4} > \frac{498}{2017}$ ist[1]), war sofort ersichtlich; es w also $\frac{1}{4}$ definitiv als Näherung für den auslaufenden Bruch der e ten in diesem Teile des Beweises zu berechnenden Wurzel ge

Wie Archimedes zuletzt von dem Verhältnis $66 \cdot 96 : 2017$ a die Annäherung $223 : 71$ und somit auf die Begrenzung $\pi > 3$ gekommen ist, wird im IX. Abschnitte gezeigt werden.

---

1) Um dies zu erkennen, bedurfte es gar nicht der Ausrechnung $\frac{498}{1992} > \frac{498}{2017}$; sondern es genügte, in dem gegebenen Bruche $\frac{498}{2017}$ den ih auf 500 zu vergrößern und den Nenner auf 2000 zu verkleinern. Vgl. ob S. 414.

VIII.

Zu Anfang des vorigen Abschnittes war bereits auf die Auf-
e hingewiesen worden, die nun noch vorliegt. Wir haben uns
ı ersten Teile des Beweises des 3. Satzes (S. 386 ff.) zuzu-
den, wo Archimedes von einer Annäherung, welche kleiner
$\sqrt{3}$ ist, ausgeht. Danach hat er die Wurzeln aus einer sechs-
ligen Zahl und aus zwei siebenstelligen Zahlen, denen noch
che beigefügt sind, auszuziehen, und zwar jedesmal eine An-
erung, die kleiner als die gesuchte Wurzel ist, aufzusuchen.
Wir geben zunächst, ähnlich wie vorher, eine allgemeine
ersicht.

ufgabe.	Ausrechnung des Archimedes.	Dieselbe Ausrechnung in Decimalbrüchen.	Genaue Annäherung auf 8, bez. 10 Decimalstellen.
	$> \frac{265}{153}$	$> 1{,}7320261$	1,7320508
$\overline{9450}$	$> 591\frac{1}{8}$	$> 591{,}1250$	591,14296
$\overline{73943\frac{33}{64}}$	$> 1172\frac{1}{8}$	$> 1172{,}1250$	1172,153367
$\overline{72132\frac{1}{16}}$	$> 2339\frac{1}{4}$	$> 2339{,}2500$	2339,258870.

Durch die im V. Abschnitte aufgestellten Hülfssätze und durch
Darlegungen im VII. Abschnitte ist eigentlich schon alles er-
;t, was wir zur Lösung der hier vorliegenden Aufgaben brau-
, und es wäre demnach zu erwarten, daß wir unsern Weg
Hindernisse fortsetzen könnten. Dem ist aber nicht so;
gleich zu Anfang tritt eine auffällige Schwierigkeit entgegen.
Archimedes hat, wie in den vorher behandelten Fällen, auch
dem Radicandus 349450 zuerst die Ganzen der Wurzel ge-
ı und dann (nach Satz 4) die erste Annäherung gesucht. Es
) sich

$$\sqrt{591^2 + 169} < 591 + \frac{169}{2 \cdot 591}.$$

ıber eine Annäherung, welche kleiner als die gesuchte
ızel ist, auszurechnen war, wurde zweitens (nach Satz 5)

$$\sqrt{591^2 + 169} > 591 + \frac{169}{2 \cdot 591 + 1}$$

ızt.

Nun ist $169 = 13^2$, und $2 \cdot 591 = 7 \cdot 13^2 - 1$; es ergab sich
ohne daß es, wie in den vorher behandelten Fällen (S. 415 ff.),
ndlicher Zwischenrechnungen bedurfte,

$$\sqrt{349450} > 591\tfrac{1}{7}.$$

Diese so präcise Abrundung[1]) kann dem Archimedes un
lich entgangen sein; trotzdem aber findet sich in dem uns
lieferten Texte (p. 264, 11) und ebenso bei Eutokios (p. 274, 15
die Näherung $591\frac{1}{8}$ *), mithin ist der auslaufende Bruch n
verkleinert worden, als nötig war[2]).

Die an sich nicht unwahrscheinliche Vermutung, daß
der Schreibfehler η'' statt ζ'' sich eingeschlichen haben kö
wird sofort hinfällig, wenn man die nächsten Textesworte ver
Denn Archimedes hat mit dem Bruche $\frac{1}{8}$, nicht mit $\frac{1}{7}$ weite
rechnet (vgl. oben S. 387 f.).

Es ist also an der Thatsache nicht zu rütteln, daß Arch
des einen weniger genauen Wert statt des ihm bekannter
naueren in den Calcül eingeführt hat; aber das berechtigt d
aus nicht zu dem Schlusse, daß er dadurch das Endergebni
ner Rechnung beeinträchtigt habe. Im Gegenteil ist leicht
zuweisen, daß die Abweichungen von der genaueren Rech
welche durch die Satzung von $\frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{7}$ veranlaßt wurden
Fortgange der Rechnung völlig verschwunden sind.

Wir formulieren also vorläufig folgenden Satz: Archi

---

1) Die Quadrierung von $591\frac{1}{7}$ ergiebt $349449\frac{43}{49}$, d. i. nur um $\frac{6}{49}$ wi
als 349450.

*) Zu beachten ist, daß Archimedes auch in diesem Falle den ges
kleineren Bruch durch Vergrößerung des Nenners um 1 erlangt hat $\left(\frac{1}{7+1}=\right.$
Er hat also das Verfahren, zu dem Nenner eines gegebenen Bruches 1 n
zählen, nicht bloß in dem Falle von Satz 5 (S. 397), wo es gilt zu einem e
benen Werte, der größer als die gesuchte Wurzel ist, einen andern, der kl
ist, aufzufinden, sondern auch hier angewendet, um zu einem Bruche, der
kleiner als der gesuchte Wert ist, einen noch kleineren Näherungswert s
dig zu machen. Wir werden demselben Verfahren wieder bei der Abrund
der nächsten Wurzel, und der umgekehrten Operation (da es sich dort un
größerung eines schon größeren Grenzwertes handelt) am Ende des erste
les des Beweises (S. 424) begegnen, und zuletzt finden, daß nach ähnlich
wägungen auch der zuerst für π berechnete Grenzwert $3\frac{1}{7}$ zu dem anders
Grenzwerte $3\frac{10}{71}$ umgebildet worden ist. — Nach Archimedes' Vorgang
auch Heron Geom. p. 93, 6—8, um einen auslaufenden Bruch kürzen zu kö
statt der ersten Annäherung $11\frac{4}{24} > \sqrt{135}$ den noch größeren Wert $11\frac{14}{24}$
eingesetzt und ist dann, nachdem er $11\frac{2}{3}$ quadriert und mit $135 = \frac{1215}{9}$ ver
hatte, wiederum nach Archimedischer Methode, zu der genaueren Nä
$11\frac{13}{24} > \sqrt{135}$ gekommen. Nur hat er zuletzt $11\frac{13}{24}$ nicht als größer
gleich zu der gesuchten Wurzel, sondern als derselben gleich παρ' ὀλ
παντελῶς hingestellt.

2) Vgl. Nesselmann Die Algebra der Griechen S. 109, Tannery Mes
cercle a. a. O. S. 319, Günther Quadratische Irrationalitäten S. 116 mit An.

ılte $\frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{7}$ um diesen ganzen Teil seines Beweises in binä-
Brüchen führen zu können, und er war zu dieser Abweichung
echtigt, weil sie keinen thatsächlichen Einfluß auf den
tgang der Rechnung ausübte, sondern nur eine formale Be-
tung hatte[1]).

Diese Behauptung ist nun im Einzelnen auszuführen und als
ıtig zu erweisen. Der von Archimedes gewählte Bruch ist
einer als er sein sollte. Da nun auch bei den folgenden An-
erungen immer wieder ein kleinerer Wert gesetzt worden ist,
könnte man denken, daß zuletzt ein recht erheblicher Fehler
auskommen mußte. Das trifft aber aus leicht ersichtlichem
ınde nicht zu. Auf den Radicandus 349450 folgt im Fortgange
Beweises ein zweiter, der > 1000000, und ein dritter, der
5000000 ist. Die Ganzen der entsprechenden Wurzeln ste-
als genaue Werte da, nur die auslaufenden Brüche, d. i. ver-
ınismäßig geringe Werte, sind durch Annäherung abgerundet.
nun jedesmal für die Abrundung des nächstfolgenden Wurzel-
ches hauptsächlich die Ganzen der Wurzel maßgebend sind, so
der Fehler mit der Fortsetzung der Ausrechnung sich ver-
;ern. Dies ist schon aus der obigen Uebersicht (S. 419) zu
ınnen; doch mögen hier noch die genauen Verhältniszahlen
;efügt werden. Archimedes hat mit einer Annäherung für $\sqrt{3}$
ınnen, welche um 14 Milliontel des genauen Wurzelwertes
er dem letzteren zurücksteht; dann freilich erhöht sich bei
$\overline{9450}$, da hier als auslaufender Bruch $\frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{7}$ genommen
das Minus auf 30 Milliontel des genauen Wurzelwertes; allein
n bei $\sqrt{1373943\frac{33}{64}}$ sinkt es auf 24 Milliontel, um zuletzt bei
$\overline{72132\frac{1}{16}}$ auf ein Minus von weniger als 4 Millionteln herab-
ehen.

Sehen wir nun, wie Archimedes mit seiner Abrundung $591\frac{1}{8}$ wei-
;erechnet hat (S. 387 f.). Er zählt dazu 571, erhält so den Bruch

---

.) Das läßt sich auch durch einen Vergleich mit dem modernen Rechnen
ıtlichen. Wir pflegen ohne Bedenken, wenn der Zusammenhang der Rech-
es erfordert, einen weniger genauen Decimalbruch statt eines gegebenen
ınen Bruches, z. B. $\frac{1}{7}$, zu setzen und rechnen die Decimalstellen nicht weiter
als die gesamten Voraussetzungen der Aufgabe es nötig machen. Man
also je nach Bedarf 0,14286, 0,1429, 0,143, ja selbst 0,14, statt $\frac{1}{7}$ setzen
ın. Decimalbrüche kannten die Alten nicht, wohl aber hatten sie als
ıgon die binären Brüche, welche, ähnlich wie die Decimalbrüche, geeignet
jeden andern gegebenen Bruch annähernd darzustellen (vgl. S. 383 Anm. 1).
esem Sinne war also Archimedes, vorausgesetzt, daß damit kein Fehler in
ndresultat der Rechnung kam, wohl berechtigt $\frac{1}{2^3}$ zu sagen statt $\frac{1}{7}$.

$\frac{1162\frac{1}{8}}{153}$, rechnet das Quadrat davon aus und bildet wieder
Addition den Bruch $\frac{1373\,943\frac{3}{64}}{153^2}$. Die Wurzel aus dem Zähle
1172 Ganze und es bleiben als Rest $359\frac{3}{64}$. Also ist die ge
Wurzel, die wir kurz mit R bezeichnen wollen, nach S
(S. 396) kleiner als $1172 + \frac{359\frac{3}{64}}{2\cdot 1172}$, und daraus folgt weiter
Satz 5

$$R > 1172 + \frac{359\frac{3}{64}}{2\cdot 1172+1}, \text{ also um so mehr (S}$$

$$> 1172 + \frac{359}{2\cdot 1172+1}.$$

Da nun $2\cdot 1172 + 1 = 2345$ nahezu das Siebenfache von 3
trägt und $\frac{1}{7} = \frac{359}{2513}$ auch die Bedingung erfüllt, kleine
$\frac{359}{2345}$ zu sein, so würde Archimedes den auslaufenden Bruc
wiß auf $\frac{1}{7}$ abgerundet haben, wenn er nicht auch hier den
kleineren Wert $\frac{1}{7+1}$ vorgezogen hätte, um den nächsten b
Bruch zu erhalten[1]).

Zu $1172\frac{1}{8}$ zählt er dann die vorher berechneten $1162\frac{1}{8}$ i
und erhält so den Bruch $\frac{2334\frac{1}{4}}{153}$. Hier ist ferner der Zähler
zu quadrieren und zu dem Quadrat sind 23409 hinzuzählen.
der Summe $5472132\frac{1}{16}$ ergiebt sich die Wurzel

$$R > 2339 + \frac{1211\frac{1}{16}}{2\cdot 2339+1} > 2339\frac{1}{4}.$$

Hier haben wir einen Augenblick innezuhalten und zu fr
was wäre herausgekommen, wenn Archimedes mit dem gena
Werte $591\frac{1}{7}$ weiter gerechnet hätte? Die Antwort lautet
der von Archimedes eingehaltenen Methode starker Kürzu
der auslaufenden Brüche, dasselbe wie vorher. Den
wäre dann $591\frac{1}{7} + 571 = 1162\frac{1}{7}$ quadriert worden zu 1350
Hierzu wäre 23409 addiert und aus der Summe die Wurzel
zogen worden. Es hätte sich ergeben

$$R > 1172 + \frac{401\frac{1}{49}}{2\cdot 1172+1} > 1172\frac{1}{6}.$$

Hiernach würde die Summe $1172\frac{1}{6} + 1162\frac{1}{7} = 2334\frac{13}{42}$ quad
und zu dem Quadrate würden 23409 gezählt worden sein.

1) Vgl. oben S. 420 Anm. *.

te 5472409 und dazu in Annäherung den Bruch $\frac{79}{84}$ ergeben. Wurzel daraus hätte 2339 Ganze, d. i. dasselbe wie vorher, dazu einen Bruch ergeben, welcher kleiner sowohl als $\frac{1}{3}$ als $\frac{3}{8}$ ist. Es war aber ein genäherter Wert, welcher einer als der in der Rechnung auslaufende Bruch , zu suchen, und da boten sich nur zwei Näherungen in binä- Brüchen, nämlich die genauere $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$, und die weniger ge- ie $\frac{1}{4}$ dar. Nun läßt sich leicht nachweisen, daß Archimedes, h wenn er die schwierige Weiterrechnung mit $\frac{5}{16}$ nicht ge- eut hätte, zu keinem andern Schlußresultat als dem uns über- erten gekommen wäre; es war also für den auslaufenden Bruch zwar weniger genaue, aber bei weitem bequemere und dem lzwecke der gesamten Rechnung vollkommen genügende Nähe- g $\frac{1}{4}$ auch in dem Falle vorzuziehen, daß, wie wir jetzt vor- gesetzt haben, von $591\frac{1}{7}$ (statt $591\frac{1}{8}$) aus weiter gerechnet rde.

Gewiß ist anzunehmen, daß Archimedes, ehe er zu der Wahl weniger genauen, aber bequemeren Näherung $591\frac{1}{8}$ sich ent- oß, dieselbe Rechnung mit $591\frac{1}{7}$, die wir soeben hypothetisch gelegt haben, wenigstens soweit ausgeführt hat, bis er sich rzeugte, daß die Kürzung $\frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{7}$ keinen Fehler in das Schluß- bnis bringen würde.

Zu dem Schlusse dieses Teiles der Archimedischen Rechnung nur Weniges zu bemerken. Zu $2339\frac{1}{4}$ wurden die vorher be- neten $2334\frac{1}{4}$ gezählt und das Verhältnis der Summe $4673\frac{1}{2}$ 153 umgebildet zu der Begrenzung, daß der Umfang des um Kreis geschriebenen Sechsundneunzigeckes zum Kreisdurch- ser in einem kleineren Verhältnis steht als $96 \cdot 153 : 4673\frac{1}{2} = \left(1 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}\right) : 1$. Was weiter folgt, ist bereits oben (S. 389) an- utet worden; es kommt aber außerdem noch für den Anfang nun folgenden Abschnittes in Betracht.

IX.

Obwohl der Titel dieser Untersuchungen nur auf die Nähe- swerte von Quadratwurzeln hinweist, so ist doch, ehe abschließen, noch zu erörtern, wie Archimedes zuletzt auf die äherung $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ gekommen ist. Denn nur um dieser enzung willen sind alle vorher vorkommenden Wurzeln aus- chnet worden, und es ist zu erwarten, daß, nachdem die von imedes dabei angewendete Methode erkannt worden ist, da- zugleich ein Aufschluß sich ergeben wird über die schließ-

liche Begrenzung des Verhältnisses des Kreisumfanges zum D
messer.

Durch Wurzelausziehungen war Archimedes im ersten
seines Beweises zu dem Ergebnis gelangt, daß der Umfan
umgeschriebenen Sechsundneunzigeckes zum Kreisdurchmess
einem kleineren Verhältnis steht als $\left(3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}\right) : 1$ (vgl. S
423). Der auslaufende Bruch war zu kürzen, und zwar zu
Betrage, der größer als dieser Bruch sein mußte. Was k
nun näher liegen, als das schon vorher so oft angewendete
fahren, zu einem gegebenen Bruche den passenden größ
Wert zu finden, indem man den Nenner um 1 verkleine
Der Versuch ergab $\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{7}$, und es war damit d
wünschte Annäherung definitiv gefunden, denn wenn der N
des gekürzten Bruches kleiner als 100 bleiben sollte, so w
sichtlich, daß aus der Reihe der Brüche mit ganzzahligen Zä
und mit den Nennern 7, 8, 9 . . . 98, 99 kein Bruch beigeb
werden kann, der größer als $\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$ wäre und zugleich näh
letzterem Bruche läge als $\frac{1}{7} = \frac{2}{14} = \ldots \frac{14}{98}$. Dieselbe Kü
war endlich um so mehr für das Schlußergebnis $\pi < 3\frac{1}{7}$ gülg

Wieder durch Wurzelausziehungen kam Archimedes im w
ten Teile seines Beweises zu dem Ergebnis, daß der Umfan
eingeschriebenen Sechsundneunzigeckes, und um so mehr der U
fang des Kreises zum Kreisdurchmesser in einem größeren V
hältnis steht als $6336 : 2017\frac{1}{4}$. Letzteres Verhältnis ist nun, ä
lich wie im ersten Teile, umzubilden zu $\left(3 + \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}}\right) : 1$, u
weiter, indem die Brüche aus Zähler und Nenner entfernt w
zu $\left(3 + \frac{1137}{8069}\right) : 1$. Der auslaufende Bruch war zu kürzen u
zwar zu einem Betrage, der kleiner als dieser Bruch sein m

Versuchen wir also zunächst, was herauskommt, wen
Bruch durch Hinzufügung von 1 zum Nenner verkleinert wi
Wir erhalten dann $\frac{1137}{8070} = \frac{379}{2690}$. Die Division $2690 : 379$ e
einen Quotienten, der zwischen den ganzen Zahlen 7 und 8 e
also ist

$$\frac{1}{7} > \frac{379}{2690} > \frac{1}{8}.$$

Nun war aber bereits gefunden, daß $3\frac{1}{7} > \pi$ ist. Die Au
war also darauf zurückgeführt, für π zwischen $3\frac{379}{2690}$ und $3\frac{1}{8}$ in

ert $3+\frac{x}{y}$ der Art zu finden, daß der auslaufende Bruch erstens
n erheblich kürzen ließ, zweitens aber auch möglichst nahe bei
$\frac{9}{0}$ lag.

Sicherlich hat Archimedes es nicht unterlassen durch Aus-
hnung sich zu vergewissern, daß in der That $\frac{379}{2690} > \frac{1}{8}$ ist[1]).
bei mag sich ihm nun die Beobachtung dargeboten haben, daß
erstere Bruch nur einer geringen, und zwar den Voraussetzun-
der Rechnung entsprechenden Umwandlung bedarf, um durch
gekürzt werden zu können. Denn wenn $\frac{379}{2690} > \frac{1}{8}$ ist, so ist
h $\frac{379+1}{2690+8} > \frac{1}{8}$*), d. i. $\frac{10}{71} > \frac{1}{8}$, und dieser gekürzte Bruch $\frac{10}{71}$
den Vorzug vor $\frac{1}{8}$, daß seine Differenz von $\frac{379}{2690}$ weit geringer
als die Differenz $\frac{379}{2690} - \frac{1}{8}$**).

Somit war zu der obigen Begrenzung $3\frac{1}{7} > \pi$ die andere Be-
nzung $\pi > 3\frac{10}{71}$ hinzugetreten und es hatte sich beiläufig heraus-
tellt, daß, gleichwie beim Wurzelausziehen (S. 397. 419. 422),
auch bei der Berechnung von π zu einem anfänglich berechneten
ßeren Grenzwerte ein passender kleinerer Wert sich darbot,
n man, nachdem der auslaufende Bruch $\frac{1}{7}$ zu $\frac{10}{70}$ erweitert
den war (vgl. S. 424), den letzteren Nenner um 1 vergrößerte.

---

1) Nachdem beide Brüche auf den gemeinschaftlichen Nenner $2690 \cdot 4$ ge-
ht worden sind, ergiebt sich der Zähler $379 \cdot 4 = 1516$ größer als der Zähler
$= 1345$.

*) Diesen Weg der Kürzung hat Dr. Franz Rietzsch (vgl. S. 395 Anm. 1)
igt, indem er mir mitteilte, daß zu $\frac{1137}{8069}$ im Zähler 3 und im Nenner 25
zählen ist, um zu $\frac{10}{71}$ zu gelangen, und daß, da $\frac{1137}{8069} > \frac{3}{25}$ ist, auch $\frac{1137}{8069}$
$\frac{1137+3}{8069+25}$, d. i. $> \frac{10}{71}$ ist. Ich habe dann die Zwischenstufe $\frac{1137}{8069} >$
$\frac{37}{7+1}$, d. i. $> \frac{379}{2690}$ eingeschaltet und bin so auf die Begrenzung zwischen
d $\frac{1}{7+1}$ gekommen, die aller Wahrscheinlichkeit nach von Archimedes ge-
worden ist, ehe er an die genauere Ausrechnung ging; denn es war ja
ts $3\frac{1}{7} > \pi$ ermittelt (S. 389. 424). Der allgemeine Beweis, daß, wenn
$> \frac{c}{d}$ ist, auch

$$\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d}$$

indet sich bei Pappos Synag. VII Propos. 8. Aehnlich wird (was für meine
hme erforderlich ist) erwiesen, daß unter derselben Voraussetzung auch
$> \frac{c}{d}$ ist. Beide Hülfssätze mit ihren Beweisen sind ohne Zweifel schon
Archimedes bekannt gewesen.

**) Es ist nämlich $\frac{379}{2690} - \frac{10}{71} = 0{,}000047$; dagegen $\frac{379}{2690} - \frac{1}{8} = 0{,}01589$.

Wir haben nun zu dem Wortlaute bei Archimedes zurü
kehren. Das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchm
soll größer sein als $6336 : 2017\frac{1}{4}$. Um in dem Verhältnis $3\frac{11}{80}$
welches $= 6336 : 2017\frac{1}{4}$ ist, hinter 3 einen kleineren auslaufe
Bruch zu erhalten, soll zu dem Bruche $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$ ein zwar klein
aber möglichst wenig entfernter Bruch der Art ermittelt we
daß in demselben Zähler und Nenner so stark, als nur in
thunlich, gekürzt werden können. Der Nachweis des nächst
neren Wertes mußte in diesem Falle an den Zähler geki
werden; denn nur so ließ auch die feinste Differenz zwischen
gegebenen und dem dazu gesuchten Bruche sofort sich erke
Da nun $3\frac{10}{71}$ nach den vorhergegangenen Ausrechnungen die W
scheinlichkeit für sich hatte, der gesuchte Grenzbetrag zu
so war diese gemischte Zahl auf gleichen Nenner mit $\frac{6336}{2017}$
bringen. Der Zähler des zu berechnenden Bruches war als
$2017\frac{1}{4} \times 3\frac{10}{71} = 6335\frac{247}{284}$, d. i. ein Betrag, der um ein Mini
hinter dem gegebenen Zähler zurückstand. Je kleiner die If
renz im Zähler, desto genauer die Abrundung; also wurde e
nitiv statt $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$ der um ein Minimum kleinere Betrag

$$\frac{6335\frac{247}{284}}{2017\frac{1}{4}} = \frac{2017\frac{1}{4} \times 3\frac{10}{71}}{2017\frac{1}{4}} = 3\frac{10}{71}$$

als der gesuchte Grenzwert hingestellt.

Ob nun Archimedes als gewissenhafter Rechner sich überz
hat, daß es unmöglich sei eine genauere Begrenzung als $\pi > \frac{22}{7}$
unter der Bedingung, daß der Nenner des Bruches kleiner als
bleibe, aufzufinden, muß dahingestellt bleiben. Die Wahrsc
lichkeit neigt dahin, daß er nichts unterlassen hat, um auch li
sen Teil seiner Beweisführung vollkommen einwandfrei zu hae
doch würde es zu weit führen, auch auf diese, über den Rahe
der gegenwärtigen Untersuchung hinausliegende Frage hier e
gehen.

X.

Ueberblicken wir zum Schlusse nochmals die bisherigen Un
tersuchungen, so stellt sich als Gesamtergebnis heraus, daß A
chimedes bei der Ausrechnung irrationaler Quadratwurzeln us
schließlich die Methode eingehalten hat, zum Radicandus di

ıste Quadratzahl, also die nächste Zahl mit rationaler Wurzel, :usuchen und aus der Differenz dieser Quadratzahl und des .icandus eine möglichst gekürzte Annäherung des auslaufenden ches der Quadratwurzel zu ermitteln.

Da er die Wurzeln nur durch annähernde Begrenzung darge- lt hat, so brauchte er in jedem Einzelfalle entweder einen ieren oder kleineren Wert als die gesuchte Wurzel.

Zur Auffindung des größeren Wertes verwendete er nach ei- Satze der Elemente Euklids die Formel $\sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}$. kleineren Wert sicherte er sich in jedem Falle durch eine nel, welche auf dem Satze beruht, daß die Differenz zweier einander folgenden Quadratzahlen gleich der Summe ihrer :zeln ist.

Die Wurzel aus 3 hat er durch eine Reihe von Annäherun- umgrenzt, welche von der Identität $3 = 2^2 - 1$ ausgingen. Quadrierung der zuerst berechneten, noch nicht genauen An- rungen führte nach einem leichten und schnellen Verfahren nmer genaueren Grenzwerten. Archimedes blieb bei der Be- zung $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$ stehen, weil er nicht zu Zahlen aufsteigen :e, die größer als 10000 sind. Bei dieser Beschränkung war der genaueste Wert, der sich auffinden ließ, und aus diesem ıe nun die anderseitige Begrenzung $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$ ermittelt.

Bei der Umgrenzung von $\sqrt{3}$ waren die dem Radicandus näch- ı Quadratzahlen jedesmal schon durch die vorherige Ausrech- ı gegeben; bei den andern in der Kreismessung zu berech- ı:n Wurzeln war die nächste Quadratzahl erst zu suchen. rıach wurden aus dem Radicandus zunächst die Ganzen der ı:el nach einer Methode ausgezogen, welche auf der Einsicht ı te, daß die griechischen Zahlwörter (und in der Hauptsache l die Zahlzeichen) nach decimalem Systeme gebildet sind. So rə zunächst ermittelt, welche von den Zahlen 1, 2 ... 8, 9 ɔerste dekadische Stelle der Wurzel einnehmen würde. War s Zahl gefunden, so ließ sich nach der Formel $(a + b)^2 = +2ab + b^2$ die nächste oder, wenn diese überhaupt nicht zu be- zı war, die dann nächste dekadische Stelle der Wurzel be- mıen und, nachdem der fertig ausgerechnete Teil der Wurzel ɛrum $= a$ gesetzt worden war, das nächste Glied b, und so t mmer ein folgendes Glied berechnen, bis keine Ganzen mehr zziehen waren. Wenn der dann verbleibende Rest vergli-

chen wurde mit der ausgerechneten Zahl der Ganzen der Wurz
so war sofort zu erkennen, ob das Quadrat dieser Zahl von Ga
zen oder das Quadrat der um 1 höheren Zahl die dem Radic
dus nächste Quadratzahl darstellt, und daraus ergab sich w
ter die Annäherung für den auslaufenden Bruch.

Bei dieser Annäherung hat Archimedes nicht in allen Fäl
den überhaupt nächsten kleinzahligen Bruch, sondern einigemal d
nächsten Wert aus der Reihe der binären Brüche gewählt, imm
aber mit der Maßgabe, daß dadurch die Richtigkeit der Näherun
rechnung nicht beeinträchtigt wurde.

Dasselbe Verfahren, welches Archimedes erfunden hatte,
zu einem Werte, der größer als die gesuchte Wurzel ist, ein
passenden kleineren Wert hinzuzufügen, nämlich die Vergrößerun
oder Verkleinerung des Nenners um 1, hat er auch angewend
um vorläufig zu den zuerst berechneten Näherungswerten für
andere, abgekürzte Näherungswerte zu erhalten. Ein so gefu
dener unechter Bruch konnte entweder, nachdem er durch A
rechnung kontrolliert worden war, definitiv als Näherungsw
eintreten, oder er führte doch, wieder nach der Methode der E
schließung des gesuchten Wertes zwischen zwei Grenzen, zu d
jenigen Näherungswerte, bei dem es zu bewenden hatte. So
Archimedes als Nenner für den einen Grenzwert eine klein
Zahl als 10 und für den andern Grenzwert eine kleinere als
gefunden.

Daß Archimedes das Gebiet der Arithmetik mit nicht min
rer Sicherheit und mit ebenso genialer Erfindungsgabe beherrs
hat wie die höhere Geometrie und die Mechanik, war schon i
her aus seiner Sandrechnung und einigen Einzeluntersuchung
die in anderen seiner Schriften eingefügt oder wenigstens ar
deutet sind, zu ersehen. Durch die Erschließung der bei der Krs
messung angewendeten Methoden ist, so hoffen wir, ein Zwi
mehr in den unvergänglichen Ruhmeskranz des größten Mathe
tikers des Altertums eingeflochten worden.

SUR L'INTÉGRALE FINIE D'UNE FONCTION ENTIÈRE

PAR A. HURWITZ.

Extrait des *Acta mathematica*, tome 22.

SUR L'INTÉGRALE FINIE D'UNE FONCTION ENTIÈRE

PAR

A. HURWITZ

À ZÜRICH.

Je reviens ajourd'hui au mémoire que j'ai publié sous ce titre dans le tome 20 de ce journal pour y ajouter une citation relative à un mémoire important de M. APPELL *sur les fonctions périodiques de deux variables*,[1] dont j'ai eu connaissance récemment par l'obligeance de son illustre auteur. M. APPELL y donne une démonstration du théorème de M. GUICHARD en formant des fonctions entières $\psi_n(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ satisfaisant aux identités

$$\psi_n(z+1) - \psi_n(z) = z^n$$

et ayant la propriété que la série

$$G(z) = a_0\psi_0(z) + a_1\psi_1(z) + \ldots + a_n\psi_n(z) + \cdots$$

est convergente pour toute valeur de z, si la série

$$H(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

représente une fonction entière. Ainsi, l'idée fondamentale dont je pars dans mon mémoire appartient à M. APPELL. Seulement il y a une différence quant'au développement de l'idée. Les fonctions $\psi_n(z)$ de M. APPELL sont définies par l'intégrale affectée de coupures:

$$\psi_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2n\pi zi} + e^{-2n\pi zi}}{e^{2n\pi zt} + e^{-2n\pi zt}} \cdot \frac{i^{n+1} t^{n+1} e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi zi}}\, dt,$$

[1] Journal de mathématiques pures et appliquées, quatrième série, t. 7 (1891).

tandis que les fonctions $\psi_n(z)$ dont je me sers et que je désigne par $\psi_{n,n}(z)$ dans mon mémoire ont l'expression suivante:

$$\psi_{n,n}(z) = \varphi_n(z) - \left|\underline{n}\sum_k \frac{1 - e^{2k\pi iz}}{(2k\pi i)^{n+1}}, \quad (k=+1,-1,+2,-2,\ldots,+n,-n)\right.$$

où $\varphi_n(z)$ désigne la fonction de Bernoulli. Comme le démontre M. Appell la fonction $\psi_n(z)$ diffère de $\varphi_n(z)$, de même que la fonction $\psi_{n,n}(z)$, d'un polynôme en $e^{2\pi iz}$ et $e^{-2\pi iz}$; mais les coefficients de ce polynôme se présentent sous la forme d'intégrales définies et ne sont pas susceptibles d'une représentation explicite et simple.

Zürich, janvier 1898.

par l'Auteur.

SUR L'INTÉGRALE FINIE D'UNE FONCTION ENTIÈRE

PAR **A. HURWITZ.**

Extrait des *Acta mathematica*, tome 20.

SUR L'INTÉGRALE FINIE D'UNE FONCTION ENTIÈRE

PAR

A. HURWITZ

À ZÜRICH.

D'après ABEL nous entendons par l'intégrale finie d'une fonction $G(z)$ la solution la plus générale de l'équation

$$F(z+1) - F(z) = G(z). \tag{1}$$

$F(z)$ étant une solution particulière de cette équation, la solution la plus générale sera évidemment $F(z) + \varphi(z)$, où $\varphi(z)$ désigne une fonction arbitraire qui admet la période 1.

Dans ce qui suit nous nous occuperons de l'équation (1) en supposant que la fonction donnée $G(z)$ est une fonction entière, c'est à dire que $G(z)$ peut être représentée par une série entière

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{2}$$

convergente dans tout le plan. Le même cas fait l'objet principal d'un mémoire de M. C. GUICHARD.[1] En s'aidant des intégrales à coupures de M. HERMITE l'éminent géomètre prouve que, $G(z)$ étant une fonction entière, il existe toujours une solution $F(z)$ de l'équation (1) qui est elle-même une fonction entière. J'arrive au même résultat en suivant une voie toute différente. On verra que le même ordre d'idées que celui qui fait la base du théorème de M. MITTAG-LEFFLER m'amène au but.

[1] *Sur la résolution de l'équation aux différences finies* $G(x+1) - G(x) = H(x)$. Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. 3me série, t. 4. (1887.)

Acta mathematica. 20. Imprimé le 26 janvier 1897.

Soit $\varphi_n(z)$ la fonction de BERNOULLI, c'est à dire la fonction rationelle entière de degré $n+1$ qui s'annule pour $z=0$ et qui satisfait à l'équation

$$\varphi_n(z+1) - \varphi_n(z) = z^n. \tag{3}$$

Il est évident que la série

$$F(z) = a_0\varphi_0(z) + a_1\varphi_1(z) + a_2\varphi_2(z) + \dots \tag{4}$$

satisfait formellement à l'équation (1). Or, d'après un théorème fondamental de M. WEIERSTRASS, la série (4) définit une fonction entière $F(z)$, si elle converge uniformément dans toute région finie du plan. Ainsi, dans ce cas, nous n'avons rien à démontrer.

Supposons maintenant que la série (4) ne satisfasse pas aux conditions du théorème de M. WEIERSTRASS. Considérons alors au lieu de la série (4) la série suivante

$$F(z) = a_0(\varphi_0(z) - \pi_0(z)) + a_1(\varphi_1(z) - \pi_1(z)) + a_2(\varphi_2(z) - \pi_2(z)) + \dots \tag{4'}$$

$\pi_0(z), \pi_1(z), \pi_2(z), \dots$ désignant des fonctions rationelles entières de $e^{2\pi i z}$ et $e^{-2\pi i z}$. Cette nouvelle série, comme l'ancienne, satisfait formellement à l'équation (1). Nous ferons voir par les considérations qui suivent que l'on peut toujours disposer des fonctions $\pi_0(z), \pi_1(z), \pi_2(z), \dots$ de façon que la série (4') soit uniformément convergente dans toute région finie du plan et ainsi, le théorème de M. GUICHARD sera démontré. Il suffit comme nous verrons, de prendre pour $\pi_n(z)$ un certain nombre de termes de la série de Fourier représentant dans l'intervalle réel $0 < z < 1$ la fonction $\varphi_n(z)$.

Remarquons d'abord que la fonction $\varphi_n(z)$ est le coefficient de $\frac{\zeta^n}{[n]}$ dans le développement suivant les puissances entières de ζ de la fonction

$$f(z, \zeta) = \frac{e^{z\zeta} - 1}{e^{\zeta} - 1}. \tag{5}$$

C'est un fait connu, qui résulte d'ailleurs immédiatement des équations

$$f(z+1, \zeta) - f(z, \zeta) = e^{z\zeta}, \qquad f(0, \zeta) = 0.$$

Ainsi nous avons

$$f(z, \zeta) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z)\frac{\zeta}{\underline{|1}} + \varphi_2(z)\frac{\zeta^2}{\underline{|2}} + \dots \tag{6}$$

pour toute valeur finie de z et toute valeur de ζ satisfaisant à la condition $|\zeta| < 2\pi$. Par conséquent nous avons aussi

$$\varphi_n(z) = \frac{\underline{|n}}{2\pi i}\int f(z, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}, \tag{7}$$

l'intégrale étant prise dans le sens direct autour du point $\zeta = 0$.

Maintenant soit r un nombre entier nul ou positif et C_r une courbe fermée contenant à son intérieur les points

$$0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots, \pm 2r\pi i,$$

tandis que les points $\pm 2k\pi i$ $(k > r)$ sont à son extérieur. Considérons l'intégrale

$$\psi_{n,r}(z) = \frac{\underline{|n}}{2\pi i}\int_{C_r} f(z, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} \tag{8}$$

qui se réduit à l'intégrale (7) pour $r = 0$. En appliquant le théorème de Cauchy nous trouvons

$$\psi_{n,r}(z) = \varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z), \tag{9}$$

où nous avons posé

$$\pi_{n,r}(z) = \underline{|n} \sum \frac{1 - e^{2k\pi i z}}{(2k\pi i)^{n+1}}. \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm r) \tag{10}$$

Soit R une région finie quelconque du plan des z. On a le théorème suivant qui est fondamental pour notre objet:

Pour chaque valeur de z qui appartient à la région R on a

$$|\psi_{n,r}(z)| < \frac{16\rho}{\pi}\cdot\frac{\underline{|n}}{(2r+1)^n}\frac{\rho^{2r}}{\pi^n}, \tag{11}$$

ρ désignant une quantité positive ne dépendant que de la région R et nullement de n et de r.

Pour le démontrer, choisissons le contour d'intégration C_r de l'intégrale (8) de la manière suivante. Posons $\zeta = x + iy$ et, pour abréger

$$\lambda = (2r + 1)\pi. \tag{12}$$

Le contour C_r sera formé par les lignes

$$x = \lambda, \qquad y = \lambda, \qquad x = -\lambda, \qquad y = -\lambda.$$

Si $\zeta = x + iy$ parcourt le contour C_r, le point $\frac{\zeta}{\lambda}$ décrit le contour d

carré dont les côtés sont

$$x = 1, \qquad y = 1, \qquad x = -1, \qquad y = -1. \tag{13}$$

Ainsi nous aurons, en désignant par U ce dernier contour,

$$\psi_{n,r}(z) = \frac{\lfloor n}{\lambda^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_U \frac{e^{\lambda z\zeta} - 1}{e^{\lambda\zeta} - 1} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}.$$

Déterminons maintenant la quantité positive ρ supérieure à l'unité d manière que l'on ait

$$\rho > |e^{z\zeta\pi}|$$

pour toutes les valeurs de z situées dans la région R et pour celles d ζ qui appartiennent au contour U d'intégration. Nous aurons évidemmen

$$|e^{\lambda z\zeta} - 1| \leqq |e^{z\zeta\pi}|^{2r+1} + 1 < 2\rho^{2r+1}.$$

Le long des côtés (13) du contour U les valeurs absolues de $e^{\lambda\zeta} -$ sont respectivement supérieures ou égales à

$$e^{\lambda} - 1, \quad 1 + e^{-\lambda}, \quad 1 - e^{-\lambda}, \quad 1 + e^{-\lambda}.$$

Il en résulte qu'on aura constamment sur le chemin d'intégration

$$|e^{\lambda\zeta} - 1| \geqq 1 - e^{-\lambda} \geqq 1 - e^{-\pi} > \frac{1}{2}.$$

Enfin, le module de ζ étant supérieur à l'unité le long de U, nou trouvons

$$|\psi_{n,r}(z)| < \frac{\lfloor n}{\lambda^n} \cdot \frac{1}{2\pi} 4\rho^{2r+1} \int_U |d\zeta| = \frac{16\rho}{\pi} \frac{\lfloor n}{(2r+1)^n} \frac{\rho^{2r}}{\pi^n},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ceci posé, soit

$$G(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{14}$$

ne fonction entière quelconque; formons la série

$$F(z) = a_0(\varphi_0(z) - \pi_{0,0}(z)) + a_1(\varphi_1(z) - \pi_{1,1}(z)) + \ldots + a_n(\varphi_n(z) - \pi_{n,n}(z)) + \ldots, \tag{15}$$

ui satisfait, comme nous l'avons déjà remarqué, formellement à l'équation

$$F(z+1) - F(z) = G(z).$$

e dis que la série (15) converge absolument et uniformément dans ute région finie R. En effet, $\varphi_n(z) - \pi_{n,n}(z)$ étant égal à $\psi_{n,n}(z)$, le rme général de la série (15) est, en valeur absolue, inférieur à

$$\frac{16\rho}{\pi} |a_n| \frac{\underline{|n}}{(2n+1)^n} \left(\frac{\rho^2}{\pi}\right)^n$$

our une valeur quelconque de z appartenant à la région R. Il suffira onc de faire voir que la série

$$\sum_0^\infty {}^n |a_n| \frac{\underline{|n}}{(2n+1)^n} z^n \tag{16}$$

nverge pour $z = \frac{\rho^2}{\pi}$. Or cette série converge dans tout le plan. En et, pour qu'une série entière soit toujours convergente il faut et il suffit e la racine $n^{\text{ième}}$ du coefficient $n^{\text{ième}}$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Cela coule immédiatement du théorème de M. HADAMARD sur le rayon du cle de convergence d'une série entière. Maintenant, $\sum_0^\infty {}^n a_n z^n$ étant d'après ypothèse toujours convergente, on a

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0.$$

plus la formule de STIRLING

$$\underline{|n} = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}, \qquad (0 < \theta < 1)$$

donne aisément

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{\underline{|n}}{(2n+1)^n}} = \frac{1}{2e}.$$

Par conséquent la racine $n^{\text{ième}}$ de $|a_n| \frac{\underline{|n}}{(2n+1)^n}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; do la série (16) est toujours convergente.

Ainsi la série (15) définit bien une fonction entière $F(z)$ satisfaisa à l'équation $F(z+1) - F(z) = G(z)$. Résumons ce résultat de la n nière suivante:

Soit

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

une fonction entière quelconque. Désignons par $\varphi_n(z)$ *la fonction de B noulli et par* $\pi_{n,r}(z)$ *la fonction rationnelle entière de* $e^{2\pi iz}$ *et* $e^{-2\pi iz}$ *définie p l'équation*

$$\pi_{n,r}(z) = \underline{|n} \sum \frac{1 - e^{2k\pi iz}}{(2k\pi i)^{n+1}}. \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm$$

Alors, les indices r *étant choisis d'une manière convenable, la série*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)]$$

converge uniformément dans toute région finie du plan et représente par c séquent une fonction entière satisfaisant à l'équation

$$F(z+1) - F(z) = G(z).$$

On peut, d'après l'analyse précédente, prendre $r = n$, quelle soit la fonction $G(z)$. Dans quelles conditions est-il possible de pren pour l'indice r une valeur constante, ne variant pas avec l'indice C'est une question qui — comme la question analogue dans le théorè de M. Mittag-Leffler — se présente naturellement et que je vais abor dans les lignes qui suivent.

Soit

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

une fonction entière et posons

$$F(z) = a_0[\varphi_0(z) - \pi_{0,r}(z)] + a_1[\varphi_1(z) - \pi_{1,r}(z)] + \dots + a_n[\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)] + \dots . \tag{17}$$

Je dis que la condition nécessaire est suffisante pour que l'on puisse donner à l'indice r une valeur telle que la série (17) converge uniformément dans toute région finie du plan est que le rayon du cercle de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\underline{n}\, a_n z^n \tag{18}$$

ne s'évanouisse pas.

En premier lieu je vais démontrer que c'est une condition nécessaire.

Supposons que la série (17) soit uniformément convergente dans une région contenant les valeurs réelles de z satisfaisant à la condition $0 \leqq z \leqq 1$ (ce qui a certainement lieu, si la série (17) est uniformément convergente dans toute région finie du plan). Alors la fonction $F(z)$ représentée par la série (17) est une fonction continue dans l'intervalle $0 \leqq z \leqq 1$ et peut être développée d'après le théorème de FOURIER suivant les sinus et cosinus des multiples de $2\pi z$. Pour plus de simplicité introduisons la fonction exponentielle au lieu des fonctions trigonométriques et posons

$$F(z) = \frac{1}{2}\alpha_0 + (\alpha_1 e^{2\pi i z} + \alpha_{-1} e^{-2\pi i z}) + \dots + (\alpha_k e^{2k\pi i z} + \alpha_{-k} e^{-2k\pi i z}) + \dots , \tag{19}$$

où les coefficients α_k sont à déterminer d'après la formule

$$\alpha_k = \int_0^1 F(z) e^{-2k\pi i z} dz . \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{20}$$

Or la série (17) étant uniformément convergente dans l'intervalle $0 \leqq z \leqq 1$, nous obtenons l'intégrale (20) en intégrant terme à terme la série (17) après l'avoir multipliée par $e^{-2k\pi i z}$. Supposons $|k| > 0$; alors l'équation (19) nous donne:

$$\int_0^1 [\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)] e^{-2k\pi i z} dz = \frac{|\underline{n}}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta - 2k\pi i)}$$

L'intégrale s'annule pour $|k| \leqq r$, puisque la fonction $\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta - 2k\pi}$ holomorphe en dehors de C_r, devient infiniment petite d'un ordre périeur à 1 pour $\zeta = \infty$.

Si $|k| > r$ la valeur de l'intégrale est

$$-\frac{\underline{|n}}{(2k\pi i)^{n+1}},$$

la fonction $\frac{1}{\zeta^{n+1}(\zeta - 2k\pi i)}$ ayant alors en dehors de C_r le pôle $\zeta = 2k$

Ainsi nous aurons

$$\alpha_{\pm 1} = \alpha_{\pm 2} = \ldots = \alpha_{\pm r} = 0,$$

et, pour $|k| > r$,

$$\alpha_k = -\sum_{n=0}^{\infty} \underline{|n}\, a_n \frac{1}{(2k\pi i)^{n+1}}. \tag{21}$$

Il en résulte que la série (18) est convergente pour $|z| < \frac{1}{2\pi(r+1)}$. plus nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Si la série

$$F(z) = a_0[\varphi_0(z) - \pi_{0,r}(z)] + a_1[\varphi_1(z) - \pi_{1,r}(z)] + \ldots + a_n[\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)] + \ldots \tag{22}$$

est uniformément convergente dans une région contenant l'intervalle réel $0 \leqq z \leqq$ *la série*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{|n}\, a_n \frac{1}{(2\pi i z)^{n+1}} \tag{23}$$

sera convergente pour $z = \pm(r+1)$ *et par conséquent pour* $|z| > r+1$. *outre le développement de Fourier pour* $F(z)$ *dans l'intervalle* $0 < z < 1$ *s*

$$F(z) = \frac{1}{2}\alpha_0 - \sum_{n=r+1}^{\infty} \{g(n)e^{2n\pi iz} + g(-n)e^{-2n\pi iz}\}. \tag{24}$$

La valeur de α_0 peut être déterminée par l'intégrale (20), ou, qui est plus commode, de la manière suivante. La série de Fou-

our $z = 0$ donne la valeur $\frac{1}{2}(F(0) + F(1))$. Or cette valeur d'après
22) est égal à $\frac{1}{2}a_0$ puisque les fonctions $\varphi_n(z)$ et $\pi_{n,r}(z)$ sont, à l'ex-
eption de $\varphi_0(z) = z$, nulles pour $z = 0$ et $z = 1$. Ainsi nous avons
our α_0 l'équation

$$\frac{1}{2}\alpha_0 = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=r+1}^{\infty}\{g(n) + g(-n)\}. \tag{25}$$

Maintenant supposons inversement, que,

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ant une fonction entière, la série (18) ait un rayon de convergence
ifférent de zéro. Alors la série

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lfloor n\, a_n \frac{1}{(2\pi i z)^{n+1}} \tag{26}$$

nverge pour $|z| > l$, l étant un nombre positif fini. Désignons par
+ 1 le premier nombre entier positif supérieur à l. Je dis que la série

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)] \tag{27}$$

t uniformément convergente dans toute région finie du plan.

Pour le démontrer appliquons la formule (8), que nous transformons
abord pour simplifier l'écriture en substituant $2\pi i\zeta$ à ζ. Ainsi nous avons

$$\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z) = \int \frac{e^{2\pi i z\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} \frac{\lfloor n}{(2\pi i\zeta)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{28}$$

ous prenons comme contour de l'intégration un cercle dont le centre
à l'origine et dont le rayon est compris entre l et $r + 1$. Cela
sé, la somme des n premiers termes de la série (27) sera égale à

$$S_n(z) = \int \frac{e^{2\pi i z\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} g_n(\zeta)\, d\zeta,$$

z) désignant la somme des n premiers terme de la série (26). Mais

celle-ci étant uniformément convergente le long du contour d'intégrati
il est évident que pour $n = \infty$ $S_n(z)$ tend uniformément dans tou
région finie du plan des z, vers l'intégrale

$$\int \frac{e^{2\pi i z\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} g(\zeta) d\zeta.$$

Ainsi nous obtenons la proposition suivante:

Supposons que,

$$G(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{29}$$

étant une fonction entière, la série

$$g(z) = a_0 \frac{1}{2\pi i z} + a_1 \frac{1}{(2\pi i z)^2} + \ldots + \underline{|}^n a_n \frac{1}{(2\pi i z)^{n+1}} + \ldots \tag{30}$$

*soit convergente pour $|z| > l$. Soit de plus $r + 1$ le premier nombre ent
positif supérieur à l. Alors la série*

$$F(z) = a_0[\varphi_0(z) - \pi_{0,r}(z)] + a_1[\varphi_1(z) - \pi_{1,r}(z)] + \ldots + a_n[\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)] + \ldots \tag{31}$$

*est uniformément convergente dans toute région finie du plan et représente
conséquent une fonction entière satisfaisant à l'équation $F(z+1) - F(z) = G$
En outre on a*

$$F(z) = \int \frac{e^{2\pi i z\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} g(\zeta) d\zeta, \tag{32}$$

*l'intégrale étant prise le long d'un cercle dont le centre est à l'origine
dont le rayon est compris entre l et $r + 1$.*

Le développement en série de Fourier de la fonction $F(z)$ est do
par les équations (24) et (25).

Ajoutons encore quelques remarques qui se rattachent aux théorè
démontrés. La dérivée $F'(z)$ d'une fonction $F(z)$ vérifiant l'équat
$F(z + 1) - F(z) = G(z)$ sera évidemment une solution de l'équation

$$F'(z + 1) - F'(z) = G'(z). \tag{33}$$

Ainsi nous pouvons résoudre la dernière équation de deux manières différentes: soit directement en appliquant les résultats précédents, soit indirectement en résolvant l'équation $F(z+1) - F(z) = G(z)$ et prenant alors la dérivée de la solution trouvée. Je distinguerai les deux solutions de l'équation (33) ainsi obtenues comme première et deuxième solution. Elles ne peuvent différer que par une fonction entière ayant la période 1. Il s'agit de déterminer celle-ci. Pour plus de simplicité je me place dans le cas du dernier théorème. Ainsi je suppose que la fonction $F(z)$ soit représentée par l'intégrale (32). Alors la deuxième solution de l'équation (33) sera

$$F'(z) = \int \frac{e^{2\pi i z\zeta}}{e^{2\pi i\zeta} - 1} 2\pi i\zeta g(\zeta) d\zeta. \tag{34}$$

Pour avoir la première solution, que je nommerai $F_1(z)$, il faut former la fonction $g_1(z)$ qui dépend de

$$G'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

de la même manière que $g(z)$ dépend de $G(z)$. Or on trouve

$$g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{|n} (n+1) a_{n+1} \frac{1}{(2\pi i z)^{n+1}},$$

d'où résulte

$$g_1(z) = 2\pi i z g(z) - a_0. \tag{35}$$

Par conséquent nous avons

$$F_1(z) = \int \frac{e^{2\pi i z\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} (2\pi i\zeta g(\zeta) - a_0) d\zeta, \tag{36}$$

d'où, en comparant (34) et (36),

$$F'(z) = F_1(z) + a_0 \int \frac{e^{2\pi i z\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} d\zeta + \int \frac{2\pi i\zeta g(\zeta)}{e^{2\pi i\zeta} - 1} d\zeta.$$

Or la deuxième intégrale est une simple constante et la première s'obtient par le théorème de Cauchy. Il vient ainsi définitivement

$$F'(z) = F_1(z) + a_0 \sum_{k=-r}^{+r} (e^{2\pi i k z} - 1) + \int \frac{2\pi i\zeta g(\zeta)}{e^{2\pi i\zeta} - 1} d\zeta.$$

Passons à une autre remarque. Soit $g(z)$ une fonction quelconq holomorphe pour $|z| \geq l$ et s'annulant pour $z = \infty$. Désignons par $r+$ le premier nombre entier positif supérieur à l et formons la série

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} (g(n)e^{2n\pi iz} + g(-n)e^{-2n\pi iz}). \qquad (0<z<1$$

(38)

Je dis que cette série est convergente et représente une fonction entiè de z. En effet, soit pour $|z| \geq l$

$$g(z) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^{n+1}} + \ldots.$$

Alors l'intégrale

$$G(z) = \int e^{2\pi iz\zeta} g(\zeta)\, d\zeta$$

prise le long du cercle $|\zeta| = l$ représente une fonction entière de z, do le développement suivant les puissances de z sera

$$G(z) = 2\pi i\left[c_0 + c_1(2\pi iz) + \ldots + \frac{c_n}{\underline{n}}(2\pi iz)^n + \ldots\right],$$

puisque l'intégrale considérée se réduit au résidu de la fonction $e^{2\pi iz\zeta}g($ par rapport au point $\zeta = \infty$. Or en appliquant nos théorèmes à ce fonction $G(z)$ nous voyons que la série (38) est identique à une constan près au développement en série de Fourier de la fonction entière

$$-F(z) = -\int \frac{e^{2\pi iz\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} g(\zeta) d\zeta.$$

l'intégrale étant prise le long du cercle $|\zeta| = l$.

Maintenant je vais appliquer les théorèmes généraux à quelq exemples. Soit d'abord

$$G(z) = 2\pi i e^{2\pi ixz} = \sum_{n=0}^{\infty} (2\pi i)^{n+1} \frac{x^n}{\underline{n}} z^n,$$

où nous supposons pour éviter des discussions particulières que la c

tante x, d'ailleurs arbitraire, ne soit pas un nombre entier. La série (z) devient

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{z^{n+1}}.$$

lle est convergente et égale à $\frac{1}{z-x}$ pour les valeurs de z satisfaisant la condition $|z| > |x|$.

Nous avons donc

$$F(z) = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i x)^n}{\lfloor n} [\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)], \tag{39}$$

étant le plus grand nombre entier contenu dans $|x|$. De plus la fonction $F(z)$ est représentée par l'intégrale

$$\int \frac{e^{2\pi i z\zeta} - 1}{e^{2\pi i \zeta} - 1} \frac{d\zeta}{\zeta - x}$$

ise le long du cercle $|\zeta| = l$, où l désigne une quantité positive comise entre $|x|$ et $r+1$. Le théorème de CAUCHY nous donne l'expression explicite de $F(z)$, savoir

$$F(z) = 2\pi i \frac{e^{2\pi i x z} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} + \sum_{k=-r}^{k=+r} (e^{2\pi i k z} - 1) \frac{1}{k - x}. \tag{40}$$

égalant les deux expressions (39) et (40) de $F(z)$, nous trouvons

$$\frac{e^{2\pi i x z} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-r}^{k=+r} (1 - e^{2\pi i k z}) \frac{1}{k - x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i x)^n}{\lfloor n} [\varphi_n(z) - \pi_{n,r}(z)],$$

uation valable pour toute valeur finie de z et toute valeur de x satisfaisant à l'inégalité $|x| < r + 1$.

Enfin, le développement en série de FOURIER de $F(z)$ s'obtient d'après formules (24) et (25)

$$F(z) = \pi i + \sum_{k=r+1}^{\infty} \left| (e^{2\pi i k z} - 1) \frac{1}{x - k} + (e^{-2\pi i k z} - 1) \frac{1}{x + k} \right|$$

et l'on trouve ainsi l'équation connue

$$(42)\qquad 2\pi i\frac{e^{2\pi izx}-1}{e^{2\pi ix}-1}=\pi i+\sum_{k=1}^{\infty}\left|(e^{2\pi ikz}-1)\frac{1}{x-k}+(e^{-2\pi ikz}-1)\frac{1}{x+k}\right|. \qquad (0<z<1$$

On en déduit aisément la suivante

$$(43)\qquad 2\pi i\left[\frac{e^{2\pi izx}-1}{e^{2\pi ix}-1}-z\right]=\sum(e^{2\pi ikz}-1)\left(\frac{1}{x-k}+\frac{1}{k}\right), \qquad \left(\begin{smallmatrix}k=-\infty\ +\ldots\\ k=0\ \text{except}\end{smallmatrix}\right.$$

dont nous ferons usage dans un instant, et qui présente l'avantage d'ê applicable dans l'intervalle $0\leq z\leq 1$. La série du second membre en outre absolument convergente.

Considérons un deuxième exemple. Prenons cette fois

$$G(z)=\frac{e^{2\pi iz}-1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\pi i)^{n+1}}{\underline{|n+1}}z^n.$$

Nous trouvons

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1}{z^{n+1}},$$

série convergente pour $|z|>1$ et qui a pour somme $\lg\frac{z}{z-1}$.

Donc il vient

$$(44)\qquad F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\pi i)^{n+1}}{\underline{|n+1}}[\varphi_n(z)-\pi_{n,1}(z)]=\int\frac{e^{2\pi iz\zeta}-1}{e^{2\pi i\zeta}-1}\lg\frac{\zeta}{\zeta-1}d\zeta,$$

l'intégrale étant prise le long d'un cercle $|\zeta|=l$, dont le rayon l compris entre 1 et 2.

Le développement en série de Fourier de $F(z)$ sera d'après (24

$$(45)\qquad F(z)=\frac{1}{2}\alpha_0-\sum_{n=2}^{\infty}\left|\lg\frac{n}{n-1}e^{2\pi inz}+\lg\frac{n}{n+1}e^{-2\pi inz}\right|,$$

où la constante α_0 se trouve au moyen de la formule (25)

$$\frac{1}{2}\alpha_0=\pi i+\sum_{n=2}^{\infty}\left|\lg\frac{n}{n-1}+\lg\frac{n}{n+1}\right|=\pi i+\lg 2.$$

Remarquons que la fonction

$$\Psi(z) = (e^{2\pi iz} - 1)\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{46}$$

est une fonction entière satisfaisant à l'équation

$$\Psi(z+1) - \Psi(z) = \frac{e^{2\pi iz} - 1}{z}.$$

Par conséquent la fonction $F(z)$ ne peut différer de $\Psi(z)$ que par une fonction entière $\varphi(z)$ ayant la période 1. Maintenant je vais déterminer la fonction $\varphi(z)$ et réduire ainsi la fonction $F(z)$ à des fonctions élémentaires.

Dans ce but je reprends l'équation

$$F(z) = \int \frac{e^{2\pi iz\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} \lg \frac{\zeta}{\zeta - 1} d\zeta.$$

La détermination du logarithme qui figure au second membre doit être choisie de façon que le logarithme s'annule pour $\zeta = \infty$. En excluant par une coupure rectiligne les valeurs réelles $0 \leqq \zeta \leqq 1$ nous pouvons prolonger analytiquement $\lg \frac{\zeta}{\zeta - 1}$ à l'intérieur de la courbe d'intégration. La différence des deux valeurs du logarithme aux deux bords de la coupure sera alors $2\pi i$.

Cela posé, nous remarquons d'abord que la fonction sous le signe d'intégration a le pôle $\zeta = -1$. En prenant le résidu par rapport à ce pôle nous pouvons écrire d'après le théorème de Cauchy

$$F(z) = (1 - e^{-2\pi iz}) \lg 2 + \int \frac{e^{2\pi iz\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} \lg \frac{\zeta}{\zeta - 1} d\zeta = (1 - e^{-2\pi iz}) \lg 2 + J,$$

l'intégrale J s'étendant à un contour entourant la coupure $\zeta = 0 \ldots 1$. Pour pouvoir réduire ce contour aux deux bords de la coupure, il faut transformer d'abord l'intégrale parce que la fonction qui multiplie le logarithme devient infinie pour $\zeta = 1$. C'est pourquoi nous écrivons

$$J = \int \left[\frac{e^{2\pi iz\zeta} - 1}{e^{2\pi i\zeta} - 1} - \frac{e^{2\pi iz} - 1}{2\pi i(\zeta - 1)}\right] \lg \frac{\zeta}{\zeta - 1} d\zeta.$$

Cette transformation est légitime puisque l'intégrale $\int \frac{1}{\zeta - 1} \lg \frac{\zeta}{\zeta - 1}$ s'évanouit, la fonction à intégrer étant infiniment petite du deuxièm ordre pour $\zeta = \infty$. Maintenant nous faisons tendre le chemin d'intégr tion vers les deux bords de la coupure $\zeta = 0 \ldots 1$. Ainsi il vient

$$J = \int_0^1 \left(2\pi i \frac{e^{2\pi i z x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} - \frac{e^{2\pi i z} - 1}{x - 1} \right) dx$$

ou encore

$$F(z) = (1 - e^{-2\pi i z}) \lg 2 + C(e^{2\pi i z} - 1) + 2\pi i \int_0^1 \frac{dx}{e^{2\pi i x} - 1} [e^{2\pi i z x} - 1 - x(e^{2\pi i z} - 1)], \tag{48}$$

où nous avons posé

$$\int_0^1 \left[\frac{2\pi i x}{e^{2\pi i x} - 1} - \frac{1}{x - 1} \right] dx = C.$$

Cela étant, nous décomposons $\frac{F(z)}{e^{2\pi i z} - 1}$ en fractions simples en introduisa dans la formule

$$\frac{F(z)}{e^{2\pi i z} - 1} = e^{-2\pi i z} \lg 2 + C + 2\pi i \int_0^1 \frac{dx}{e^{2\pi i x} - 1} \left[\frac{e^{2\pi i z x} - 1}{e^{2\pi i z} - 1} - x \right]$$

le développement (comparez (43))

$$2\pi i \left[\frac{e^{2\pi i z x} - 1}{e^{2\pi i z} - 1} - x \right] = \sum (e^{2k\pi i x} - 1) \left[\frac{1}{z - k} + \frac{1}{k} \right].$$

De cette manière nous trouvons

$$\frac{F(z)}{e^{2\pi i z} - 1} = e^{-2\pi i z} \lg 2 + C + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k} + \frac{1}{k} \right). \tag{49}$$

Avant d'introduire ici la fonction $\Gamma(z)$, déterminons la constante C en faisant $z = \frac{1}{2}$ dans les équations (49) et (45). Il vient

$$-\tfrac{1}{2}F\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\lg 2 + C + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{2k-1} + \frac{2}{2k}\right) = -3\lg 2 + C,$$

$$F\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\alpha_0 - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \lg \frac{n\,.\,n}{(n-1)(n+1)} = \pi i + \lg 2 - \lg\left\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\},$$

où nous avons fait usage de la formule de WALLIS. En réduisant nous obtenons

$$C = \int_0^1 \left(\frac{2\pi i x}{e^{2\pi i x} - 1} - \frac{1}{x-1}\right)dx = \lg 2\pi - \frac{\pi i}{2}. \tag{50}$$

En remarquant maintenant que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}\right) = \frac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma(1-z)} - \Gamma'(1) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \Gamma'(1) + \pi i \frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1},$$

nous trouvons enfin

$$F(z) = (e^{2\pi i z} - 1)\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \varphi(z), \tag{51}$$

$\varphi(z)$ désignant la fonction entière périodique

$$\varphi(z) = \pi i + \frac{\pi i}{2}(e^{2\pi i z} + 1) + (1 - e^{-2\pi i z})\lg 2 + (e^{2\pi i z} - 1)(\lg 2\pi - \Gamma'(1)). \tag{52}$$

Les formules que nous venons d'écrire restent vraies si nous remplaçons l'unité imaginaire i par $-i$. Par conséquent en séparant les parties réelles et imaginaires en considérant z comme réel, nous trouvons des résultats restant valables pour toutes les valeurs réelles et complexes de z.

C'est ainsi que les équations (44), (51) et (52) nous donnent le théorème suivant:

Soit $\mathfrak{F}(z)$ la fonction entière définie par l'équation

$$\mathfrak{F}(z) = \sin \pi z \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\pi}{2}\cos \pi z + (\lg 2\pi - \Gamma'(1)) \sin \pi z. \tag{53}$$

Nous aurons pour toute valeur finie réelle ou complexe de z les développement

$$(54)\quad \begin{cases} 2\sin\pi z\,\mathfrak{F}(z) \\ = \lg 2.(1-\cos 2\pi z)+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{(2\pi)^{2n+2}}{\underline{|2n+2}}\varphi_{2n+1}(z)+\frac{1-\cos 2\pi z}{n+1}\right], \\ 2\cos\pi z\,\mathfrak{F}(z) \\ = -\pi+\lg 2.\sin 2\pi z+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{(2\pi)^{2n+1}}{\underline{|2n+1}}\varphi_{2n}(z)+\frac{2\sin 2\pi z}{2n+1}\right]. \end{cases}$$

De l'équation (45) nous déduisons les développements en série d FOURIER valables dans l'intervalle réel $0 < z < 1$:

$$(55)\quad \begin{cases} 2\sin\pi z\,\mathfrak{F}(z) = \lg\frac{1}{2}\cos 2\pi z+\sum_{n=2}^{\infty}\lg\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)\cos 2\pi nz, \\ 2\cos\pi z\,\mathfrak{F}(z) = \lg\frac{1}{2}\sin 2\pi z+\sum_{n=2}^{\infty}\lg\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\sin 2\pi nz. \end{cases}$$

En ajoutant les équations (55) après les avoir multipliées respectivemer par $\sin\pi z$ et $\cos\pi z$ on trouve aisément la belle série de M. LERCH:[1]

$$(56)\qquad \mathfrak{F}(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\lg\left(\frac{n}{n+1}\right)\sin(2n+1)\pi z,$$

laquelle multipliée par $2\sin\pi z$ et $2\cos\pi z$ reproduit les équations (55

Remarquons encore que l'équation que nous avons trouvé plus hau savoir

$$2\pi i\int_0^1\frac{dx}{e^{2\pi ix}-1}\left[\frac{e^{2\pi izx}-1}{e^{2\pi iz}-1}-x\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k}+\frac{1}{k}\right),$$

donne après quelques transformations faciles l'expression de la fonctio entière $\sin\pi z\frac{d\lg\Gamma(z)}{dz}$ sous la forme d'une intégrale définie:

---

[1] *Sur la différentiation d'une classe de séries trigonométriques,* Annales scien fiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3me série, tome 12. (1895.)

(57) $$2\sin\pi z\frac{d\lg\Gamma(z)}{dz}$$

$$= 2\Gamma''(1)\sin\pi z - \frac{\sin\pi z}{z} - \pi\cos\pi z + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x\sin\pi z - \pi\sin xz)\operatorname{tg}\frac{x}{2}dx.^1$$

On vérifie d'ailleurs aisément cette formule en partant de la relation

$$\frac{\sin xz}{\sin\pi z} - \frac{x}{\pi} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{z-k} - \frac{2}{k}\right)\sin kx,$$

laquelle multipliée par $\operatorname{tg}\frac{x}{2}dx$ et intégrée ensuite entre les limites 0 et π, donne le résultat

(58) $$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin xz}{\sin\pi z} - \frac{x}{\pi}\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k} - \frac{1}{k}\right),$$

qui ne diffère que par sa forme de l'équation (57).

Comme troisième exemple j'ai consideré l'équation

$$F(z+1) - F(z) = \frac{\sin^2\pi z}{z^2}$$

qui est évidemment satisfaite pour

$$F(z) = -\sin^2\pi z\frac{d^2\lg\Gamma(z)}{dz^2}.$$

Mais les calculs étant un peu longs je me contente de transcire ici quelques formules que j'ai obtenues et qui me paraissent dignes d'intérêt.

Ce sont les suivantes:

(59) $$\sin^2\pi z\frac{d^2\lg\Gamma(z)}{dz^2} = \frac{\pi^2}{2} - \int_0^{\pi}\frac{\pi - x}{\sin x}\sin(2zx - x)dx$$

---

[1] Cette formule (légèrement modifiée) a déjà été indiquée par M. Lerch dans son mémoire intitulé: *Různé výsledky v theorii funkce gamma.* (Rozpravy České Akademie Cisare Frantiska Josefa, 28. Unora 1896.)

ou encore

$$(59') \qquad \sin^2 \pi z \frac{d^2 \lg \Gamma(z)}{dz^2} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{\sin^2 \pi z}{2z^2} - \int_0^\pi (\pi - x) \cot x . \sin 2zx \, dx.$$

Ces relations mettent en évidence que $\sin^2 \pi z \frac{d^2 \lg \Gamma(z)}{dz^2}$ est une fonctio entière; elles donnent de suite les séries entières de $2z - 1$ et de représentant cette fonction dans tout le plan. Ainsi l'équation (59) donn

$$(60) \qquad \sin^2 \pi z \frac{d^2 \lg \Gamma(z)}{dz^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - c_1(2z - 1) + c_2 \frac{(2z-1)^3}{\underline{|3}} - + \ldots \pm c_n \frac{(2z-1)^{2n-1}}{\underline{|2n-1}} \mp \ldots,$$

où nous avons posé pour abréger

$$c_n = \int_0^\pi \frac{\pi - x}{\sin x} x^{2n-1} dx.$$

On déduit aussi très aisément de l'équation (59) les coefficients de série de Fourier représentant la fonction $\sin^2 \pi z \frac{d^2 \lg \Gamma(z)}{dz^2}$ dans l'inte valle $0 < z < 1$. Voici cette série

$$(61) \quad \sin^2 \pi z \frac{d^2 \lg \Gamma(z)}{dz^2} = \frac{\pi^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left((n-1) \lg \frac{n-1}{n} + (n+1) \lg \frac{n+1}{n} \right) \sin 2n\pi$$

où il faut remplacer $(n - 1) \lg \frac{n-1}{n}$ par zéro pour $n = 1$.

Revenons maintenant au cas général. L'équation

$$F(z + 1) - F(z) = G(z)$$

est contenue comme cas particulier dans l'équation

$$(62) \qquad F(z + 1) - aF(z) = G(z),$$

a désignant une constante donnée, ou dans l'équation plus générale enc

$$(63) \quad a_0 F(z+n) + a_1 F(z+n-1) + \ldots + a_{n-1} F(z+1) + a_n F(z) = G(z),$$

$_0, a_1, \ldots . a_n$ étant des constantes données. On peut réduire ces équa-
ions comme le fait M. GUICHARD, à l'équation $F(z+1) - F(z) = G(z)$.
Mais on peut aussi les traiter directement d'une manière entièrement
nalogue à celle que nous avons employée plus haut pour l'équation
$'(z+1) - F(z) = G(z)$.

Pour plus de simplicité considérons seulement l'équation (62)

$$F(z+1) - aF(z) = G(z),$$

ù nous supposerons a différent de 0 et de 1.

En premier lieu nous cherchons les fonctions rationnelles entières
$_n(z)$ satisfaisant à l'équation

$$\varphi_n(z+1) - a\varphi_n(z) = z^n. \tag{64}$$

emarquant que

$$e^{\zeta(z+1)} - ae^{\zeta z} = e^{\zeta z}(e^{\zeta} - a),$$

ous voyons que ce sont les coefficients du développement de $\frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} - a}$
ivant les puissances croissantes de ζ, qui fournissent les fonctions $\varphi_n(z)$.[1]

Ainsi nous avons

$$\frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} - a} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) \frac{\zeta^n}{\lfloor n}, \tag{65}$$

par conséquent

$$\varphi_n(z) = \frac{\lfloor n}{2\pi i} \int \frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} - a} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}, \tag{66}$$

ntégrale étant prise autour du point $\zeta = 0$ (le contour d'intégration
contenant à son intérieur aucune des racines de l'équation $e^{\zeta} - a = 0$).
intenant considérons l'intégrale

$$\psi_n(z) = \frac{\lfloor n}{2\pi i} \int \frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} - a} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} \tag{67}$$

ise le long d'un chemin entourant outre le point $\zeta = 0$ un certain

[1] Ce sont les fonctions considérées par M. HERMITE dans ses intéressantes re-
ches sur les polynômes de BERNOULLI. Voir: SONIN et HERMITE, *Sur les polynômes
Bernoulli*, Journal de Crelle, tome 116, p. 133.

nombre de racines de l'équation $e^{\zeta} - a = 0$. L'équation (64) est enco satisfaite si nous remplaçons $\varphi_n(z)$ par $\psi_n(z)$. De plus $\psi_n(z)$ ne diffè de la fonction $\varphi_n(z)$ que par un certain nombre de termes de la for

$$(68) \qquad -\frac{\lfloor n}{a}\frac{1}{(\lg a + 2k\pi i)^{n+1}} e^{(\lg a + 2k\pi i)z} \qquad (k \text{ entier}),$$

qui sont les résidus provenant des racines de l'équation $e^{\zeta} - a = 0$ q se trouvent à l'intérieur du contour d'intégration. Ainsi nous avons

$$(69) \qquad \psi_n(z) = \varphi_n(z) - \pi_n(z),$$

$\pi_n(z)$ désignant une somme de fonctions exponentielles de la forme (6

Cela posé, je passe à la solution de l'équation

$$(70) \qquad F(z+1) - aF(z) = G(z),$$

où je suppose que la fonction donnée

$$(71) \qquad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

est une fonction entière. On démontre, comme nous l'avons fait pl haut dans le cas $a = 1$, qu'il est toujours possible de choisir les in grales $\psi_n(z)$ de façon que la série

$$(72) \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\varphi_n(z) - \pi_n(z)]$$

converge uniformément dans toute région finie du plan et représente conséquent une fonction entière satisfaisant à l'équation (70).

Remarquons qu'en général il faut faire varier le chemin d'intég tion de l'intégrale $\psi_n(z)$ avec l'indice n et c'est ainsi que le nombre termes exponentiels dont se compose $\pi_n(z)$ croit indéfiniment en mê temps que l'indice n. L'unique cas où il suffit de prendre un chem d'intégration fixe, c'est à dire indépendant de n, est celui où le ra du cercle de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lfloor n\, a_n z^n$ ne s'évanouit pas.

Plaçons-nous dans ce cas et supposons que la série

$$(73) \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lfloor n\, a_n \frac{1}{z^{n+1}}$$

soit convergente pour $|z| > l$. Désignons de plus par C un cercle, dont le centre est à l'origine, dont le rayon est supérieur à l et qui n'a sur sa périphérie aucune racine de l'équation $e^{\zeta} - a = 0$.

Alors nous pourrons prendre l'intégrale $\psi_n(z)$ le long du cercle C et la fonction $F(z)$ se présentera sous la forme

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} - a} g(\zeta)\, d\zeta. \tag{74}$$

Prenons pour exemple $a = -1$ et $G(z) = -\frac{\sin \pi z}{z}$, de sorte que l'équation à résoudre devient

$$F(z+1) + F(z) = -\frac{\sin \pi z}{z}. \tag{75}$$

Elle est évidemment satisfaite par la fonction entière $\sin \pi z \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$.

Désignons avec M. Hermite les fonctions $\varphi_n(z)$ correspondant à la constante $a = -1$ par $\chi_n(z)$, de sorte que

$$\frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z) \frac{\zeta^n}{\underline{|n}}. \tag{76}$$

La fonction $G(z)$ étant égale à

$$-\frac{\sin \pi z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \pi^{2n+1} \frac{z^{2n}}{\underline{|2n+1}},$$

nous aurons

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{z^{2n+1}}. \tag{77}$$

Cette série est convergente pour $|z| > \pi$ et pour ces valeurs de z sa somme est égale à $\frac{1}{2i} \lg \frac{z - \pi i}{z + \pi i}$. Ainsi nous aurons d'après (74)

$$F(z) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} + 1} \lg \frac{\zeta + \pi i}{\zeta - \pi i}\, d\zeta, \tag{8}$$

l'intégrale étant prise le long du cercle $|\zeta| = l$, où l est compris entre π et 2π.

En transformant cette intégrale d'une manière semblable à cel que nous avons employée plus haut pour l'intégrale (44), on reconna que la fonction $F(z)$ est identique à la fonction $\mathfrak{F}(z)$ définie par l'équ tion (53). Ainsi notre analyse nous donne comme solution de l'équati (75) la fonction

$$(79) \qquad F(z) = \sin \pi z \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\pi}{2} \cos \pi z + (\lg 2\pi - \Gamma'(1)) \sin \pi z.$$

Le développement de cette fonction suivant les polynômes $\chi_n(z)$ se d'après (72)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n+1}}{\lfloor 2n+1} \psi_{2n}(z),$$

ou, puisque l'on a

$$\psi_{2n}(z) = \frac{\lfloor 2n}{2\pi i} \int \frac{e^{\zeta z}}{e^{\zeta} + 1} \frac{d\zeta}{\zeta^{2n+1}} = \chi_{2n}(z) + 2 \frac{\lfloor 2n}{\pi^{2n+1}} (-1)^{n+1} \sin \pi z,$$

$$(80) \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n+1}}{\lfloor 2n+1} \chi_{2n}(z) + \frac{2 \sin \pi z}{2n+1} \right].$$

Considérons encore l'équation

$$(81) \qquad F(z+1) - F(z) = \Phi(z),$$

la fonction donnée $\Phi(z)$ étant supposée méromorphe dans toute régi finie du plan. Je vais démontrer que *l'équation admet toujours une lution $F(z)$ elle-même méromorphe dans toute région finie du plan.* Co mençons par le cas spécial où il y a une droite verticale (c'est à d parallèle à l'axe des quantités purement imaginaires) telle que tous pôles de $\Phi(z)$ soient à gauche de cette droite. Je dis que l'on pe déterminer les fonctions entières rationnelles $g_0(z), g_1(z), \ldots$ de te façon que la série

$$(82) \qquad \begin{aligned} F_1(z) = &\{g_0(z) - \Phi(z)\} + \{g_1(z) - \Phi(z+1)\} + \ldots \\ &+ \{g_n(z) - \Phi(z+n)\} + \ldots \end{aligned}$$

représente une fonction méromorphe dans toute région finie du plan.

En effet, les parties réelles des pôles de $\Phi(z)$ étant inférieures à un certain nombre ρ, celles des pôles de $\Phi(z+n)$ seront inférieures à $\rho - n$. Soit k le plus petit nombre entier positif tel que $\rho - k$ est négatif: nous prendrons

$$g_0(z) = g_1(z) = \ldots = g_{k-1}(z) = 0.$$

Désignons maintenant par $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \ldots$ des quantités positives assujetties à la seule condition que la série

$$\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k+2} + \ldots$$

soit convergente. La fonction $\Phi(z+n)$, où $n \geq k$, est holomorphe dans un cercle dont le centre est à l'origine et dont le rayon est certainement supérieur à $n - \rho$. Par conséquent nous aurons

$$\Phi(z+n) = \mathfrak{P}_n(z),$$

$\mathfrak{P}_n(z)$ désignant une série entière uniformément convergente pour les valeurs de z satisfaisant à la condition $|z| \leq n - \rho$. Cela posé, nous prendrons pour $g_n(z)$ un certain nombre de termes de la série $\mathfrak{P}_n(z)$ en disposant du nombre de ces termes de façon que l'inégalité

$$|\Phi(z+n) - g_n(z)| < \varepsilon_n \tag{83}$$

ait lieu pour toute valeur de z, dont le module est inférieur à $n - \rho$. Soit maintenant R une région finie quelconque du plan. Comme la quantité $n - \rho$ croit indéfiniment avec n il est évident qu'à partir d'un certain indice n, soit à partir de $n = r$, l'inégalité (83) est satisfaite pour toute valeur de z appartenant à la région R. Donc la série

$$\{g_r(z) - \Phi(z+r)\} + \{g_{r+1}(z) - \Phi(z+r+1)\} + \ldots$$

est absolument et uniformément convergente dans la région R, d'où il suit que la série (82) représente une fonction méromorphe dans toute région finie du plan.

Maintenant la fonction $F_1(z)$ satisfait évidemment à l'équation

$$F_1(z+1) - F_1(z) = \Phi(z) - g_0(z) + \{g_0(z+1) - g_1(z)\} + \{g_1(z+1) - g_2(z)\} + \ldots$$

c'est à dire à une équation de la forme

$$F_1(z+1) - F_1(z) = \Phi(z) + G(z),$$

$G(z)$ désignant une fonction entière. Soit $E(z)$ une fonction entièr qui vérifie l'équation

$$E(z+1) - E(z) = G(z).$$

Alors la fonction

$$F(z) = F_1(z) - E(z)$$

sera une solution méromorphe de l'équation (81).

Remarquons encore que nous pouvons représenter $F(z)$ par une sér de la même forme que $F_1(z)$, puisque $E(z)$ peut être développée (d'u infinité de manières) en une série toujours convergente procédant suivant d fonctions entières rationnelles. Ainsi dans le cas qui nous occupe l'équ tion (81) admet une solution méromorphe représentée par une série la forme

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \{g_n(z) - \Phi(z+n)\}, \tag{84}$$

les $g_n(z)$ étant des fonctions entières rationnelles.

Considérons maintenant le cas où les pôles de la fonction donn $\Phi(z)$ sont tous situés à droite d'une certaine droite verticale. No pouvons procéder d'une manière analogue et démontrer ainsi qu'il exi une solution méromorphe de l'équation (81) représentée par une sé de la forme

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\Phi(z-n) - h_n(z)\}, \tag{85}$$

les $h_n(z)$ étant des fonctions entières rationnelles. D'ailleurs on ram ce cas au cas précédent en remarquant que la fonction $-F(1-z$ sera une solution de l'équation (81) si la fonction $F(z)$ vérifie l'équat $F(z+1) - F(z) = \Phi(-z)$.

Passons enfin au cas général. $\Phi(z)$ étant une fonction méromorp donnée quelconque nous prenons à volonté une droite verticale et divi buons les pôles de $\Phi(z)$ en deux groupes, contenant l'un tous les pô situés à droite, l'autre tous les pôles situés à gauche de la droite vertic Les pôles situés sur cette droite peuvent être repartis à volonté dans l ou l'autre des groupes. D'après le théorème de M. Mittag-Leffler il s toujours possible de décomposer $\Phi(z)$ en deux fonctions $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z$

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \tag{86}$$

le façon que les pôles de $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ coïncident respectivement avec es pôles de $\Phi(z)$ appartenant au premier ou au deuxième groupe.

Maintenant déterminons les fonctions méromorphes

87) $$F_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\Phi_1(z-n) - h_n(z)\}, \qquad F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \{g_n(z) - \Phi_2(z+n)\}$$

elles que

88) $$F_1(z+1) - F_1(z) = \Phi_1(z), \qquad F_2(z+1) - F_2(z) = \Phi_2(z).$$

Alors la fonction

89) $$F(z) = F_1(z) + F_2(z)$$

atisfera à l'équation (81). Ainsi notre théorème se trouve complètement démontré.

Remarquons encore que l'on peut construire d'une autre manière ne solution méromorphe de l'équation (81) dans le cas special où il xiste une fonction entière $H(z)$ ayant la période 1 et admettant tout ôle de $\Phi(z)$ d'ordre n comme zéro d'un ordre $\geq n$. En effet, dans ce as $H(z)\Phi(z)$ sera une fonction entière et, en désignant par $\Psi(z)$ une nction entière satisfaisant à l'équation $\Psi(z+1) - \Psi(z) = H(z)\Phi(z)$, fonction méromorphe $F(z) = \frac{\Psi(z)}{H(z)}$ sera une solution de l'équation $(z+1) - F(z) = \Phi(z)$.

Considérons maintenant le cas où tous les pôles de la fonction donnée (z) sont du premier ordre, les résidus des pôles étant en outre des nombres tiers positifs ou négatifs. Alors la fonction $F(z)$ définie par l'équation (9) sera une fonction méromorphe de même espèce que $\Phi(z)$. Or toute nction de cette espèce est la dérivée logarithmique d'une fonction mé- romorphe et réciproquement. Donc l'équation $\frac{F'(z+1)}{F(z+1)} - \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$, $\Phi(z)$ signant une fonction méromorphe donnée quelconque, admet une so- tion $F(z)$ elle-même méromorphe.

L'intégration nous conduit à la proposition suivante:

Si $\Phi(z)$ est une fonction méromorphe quelconque, il existe toujours une fonction méromorphe $F(z)$ telle que

(6) $$\frac{F(z+1)}{F(z)} = \Phi(z).$$

La solution la plus générale de cette équation sera évidemme $F(z)\Pi(z)$, où $\Pi(z)$ désigne une fonction arbitraire admettant la période

M. Guichard s'est occupé de la même équation (90) en suppos que $\Phi(z)$ est une fonction entière. Il a démontré que la condition cessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction entière $F(z)$ vérifi l'équation (90) consiste en ce que les zéros de $\Phi(z)$ soient tous situé gauche d'une droite verticale (et non à »droite» comme cela est impri par erreur sans doute, dans le mémoire de M. Guichard).

Démontrons, pour finir, que l'équation

$$\varphi_1(z)F(z+1) + \varphi_0(z)F(z) = \varphi(z), \tag{91}$$

$\varphi(z)$, $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ désignant des fonctions méromorphes données, ad toujours une solution $F(z)$ elle-même méromorphe.

En effet, d'après ce qui précède, nous pourrons déterminer la fo tion méromorphe $F_1(z)$ telle que

$$\frac{F_1(z+1)}{F_1(z)} = -\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_0(z)}. \tag{92}$$

Alors l'équation à résoudre peut s'écrire ainsi:

$$F_1(z+1)F(z+1) - F_1(z)F(z) = -\frac{\varphi(z)F_1(z)}{\varphi_0(z)}. \tag{93}$$

Donc en désignant par $F_2(z)$ une fonction méromorphe vérifiant l'équat

$$F_2(z+1) - F_2(z) = -\frac{\varphi(z)F_1(z)}{\varphi_0(z)}, \tag{94}$$

il est évident que la fonction

$$F(z) = \frac{F_2(z)}{F_1(z)} \tag{95}$$

sera une solution méromorphe de l'équation (91).

Zürich, 14 juillet 1896.

Je profite de cette occasion pour ajouter à mon mémoire »Über die Anzahl der Classen bi quadratischer Formen von negativer Determinante» (Tome 19 de ce journal) une citation que je à l'obligeance de M. Frobenius. L'idée de déterminer les sommes de signes de Legendre pa résidus des coefficients dans le développement de fonctions élémentaires se trouve déjà dans le mémoire de Cauchy »Sur la théorie des nombres». (Mémoires de l'Académie royale des sci de l'Institut de France, 1840, tome 17.)

r die Discriminante der Jacobi'schen Covariante dreier ternären quadratischen Formen.

Von **Dr. B. Igel.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. October 1876.)

I.

Die Resultante zweier binären quadratischen Formen

$$f = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$
$$f' = a'x_1^2 + 2b'x_1x_2 + c'x_2^2$$

bekanntlich

$$R = (ac' - a'c)^2 + 4(ba' - b'a)(bc' - b'c),$$

d in der Boole'schen Form

$$R = (ac' + a'c - 2bb')^2 - 4(ac - b^2)(a'c' - b'^2).$$

Die erste Form erscheint, wenn man von der Jacobi'schen ovariante

$$\tfrac{1}{4}J = \begin{vmatrix} ax_1 + bx_2, & bx_1 + cx_2 \\ a'x_1 + b'x_2, & b'x_1 + c'x_2 \end{vmatrix}$$

$$= x_1^2 \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} + x_1x_2 \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + x_2^2 \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

e Discriminante

$$H = \begin{vmatrix} \frac{d^2J}{dx_1^2} & \frac{d^2J}{dx_1dx_2} \\ \frac{d^2J}{dx_2dx_1} & \frac{d^2J}{dx_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^2 + 4 \begin{vmatrix} b & a \\ b' & a' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

lcl.

Die andere Form kommt zum Vorschein, wenn man die Discriminante von $\varkappa f+\lambda f'$ in Bezug auf x_1, x_2

$$\tfrac{1}{4} H = \begin{vmatrix} \varkappa a+\lambda a', & \varkappa b+\lambda b' \\ \varkappa b+\lambda b', & \varkappa c+\lambda c' \end{vmatrix}$$

und von dieser Discriminante die Discriminante in Bezug auf $\varkappa$ bildet

$$\left\{\begin{vmatrix} ab' \\ bc' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'b \\ b'c \end{vmatrix}\right\}^2 - 4 \begin{vmatrix} ab \\ bc \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a'b' \\ b'c' \end{vmatrix}.$$

Man sieht also, dass die Discriminante der Jacobi'schen Covariante mit der Discriminante von der Discriminante der linearen Verbindung beider Formen f, f' identisch ist.

Es lässt sich daher vermuthen, dass auch bei einem anderen Systeme von Formen die Discriminante der Jacobi'schen Covariante sowohl als auch die der Discriminante der linearen Verbindung der Formen die Resultante derselben zum Factor haben. In der That gelten nun folgende zwei Sätze:

I.[1] Der Jacobi'schen Covariante einer beliebigen Anzahl von Formen genügt jedes System von Werthen, das den Formen genügt; und auch den Differentialquotienten der Jacobi'schen Covariante, wenn die Formen von demselben Grade sind.

II.[2] „Bezeichnet man durch $R=0$ die Gleichung, welche ausdrückt, dass r homogenen Gleichungen zweiter Ordnung mit r Veränderlichen ein gemeinschaftliches System von Lösungen zulassen; multiplicirt man ferner die linken Theile der Gleichungen zweiter Ordnung mit willkürlichen Factoren, und bildet die Determinante der homogenen Function zweiter Ordnung, welche durch Addition dieser Producte entsteht; so ist die Function welche ausdrückt, dass die Differentialquotienten jener Determinante, nach den willkürlichen Factoren genommen, gleichzeitig

---

[1] Siehe Algebra der linearen Transformation von Salmon, pag. analytische Geometrie des Raumes von Hesse p. 101.

[2] Clebsch in Borchardts Journal Bd. 59, Theorem XI.

schwinden können, und welche eine rationale Function der achsten simultanen Invarianten von den linken Theilen der ebenen Gleichungen ist, immer durch R ohne Rest theilbar." Es schien mir von besonderem Interesse, die zweiten Factoren len genannten Discriminanten zu eruiren. Ich thue dies im genden für den Fall von drei Formen zweiten Grades. In sem Falle bieten folgende Umstände grosse Vortheile, dass sich ens in Folge des Satzes I die Resultante in Determinanten- m darstellen lässt und dass sich zweitens für diesen Fall hweisen lässt, dass beide Discriminanten bis auf etwa einen lenfactor identisch sind.

II.

Es sollen nun alle Formen, von denen im Folgenden Gebrauch acht werden wird, hier zusammengestellt werden. Es seien homogene Formen zweiter Ordnung mit drei Veränderlichen eben

$$(1)\quad \begin{cases} f_1(x_1x_2x_3) = \Sigma\, a_{ik}x_i x_k, \\ f_2(x_1x_2x_3) = \Sigma\, b_{ik}x_i x_k, \\ f_3(x_1x_2x_3) = \Sigma\, c_{ik}x_i x_k. \end{cases}$$

Ist nun die lineare Verbindung dieser Formen

$$\begin{aligned} N &= y_1\Sigma a_{ik}x_i x_k + y_2\Sigma b_{ik}x_i x_k + y_3\Sigma c_{ik}x_i x_k \\ &= (y_1a_{11}+y_2b_{11}+y_3c_{11})\,x_1^2 \qquad + d_{11}x_1^2 \\ &\quad + (y_1a_{22}+y_2b_{22}+y_3c_{22})\,x_2^2 \qquad + d_{22}x_2^2 \\ &\quad + (y_1a_{33}+y_2b_{33}+y_3c_{33})\,x_3^2 \qquad + d_{33}x_3^2 \\ &\quad + (y_1a_{12}+y_2b_{12}+y_3c_{12})\,x_1x_2 \quad = \quad + d_{12}x_1x_2 \\ &\quad + (y_1a_{13}+y_2b_{13}+y_3c_{13})\,x_1x_3 \qquad + d_{13}x_1x_3 \\ &\quad + (y_1a_{23}+y_2b_{23}+y_3c_{23})\,x_2x_3 \qquad + d_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

i die Hesse'sche Covariante (Discriminante)

$$\begin{vmatrix} d_{11}\,d_{12}\,d_{13} \\ d_{12}\,d_{22}\,d_{23} \\ d_{13}\,d_{23}\,d_{33} \end{vmatrix} = \underset{y}{H}(f_1 f_2 f_3)$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33})\,y_1^3 + (b_{11}b_{22}b_{33})\,y_2^3 + (c_{11}c_{22}c_{33})\,y_3^3 +$$
$$+ \{(a_{11}a_{22}b_{33}) + (a_{11}b_{22}a_{33}) + (b_{11}a_{22}a_{3}$$
$$+ \{(a_{11}a_{22}c_{33}) + (a_{11}c_{22}a_{33}) + (c_{11}a_{22}a_{33})\}\,y_1^2 y_3 +$$
$$\{(a_{11}b_{22}b_{33}) + (b_{11}b_{22}a_{33}) + (b_{11}a_{22}b_{33}$$
$$+ \{(a_{11}c_{22}c_{33}) + (c_{11}a_{22}c_{33}) + (c_{11}c_{22}a_{33})\}\,y_1 y_3^2 +$$
$$\{(b_{11}b_{22}c_{33}) + (b_{11}c_{22}b_{33}) + (c_{11}b_{22}b_{33}$$
$$+ \{(b_{11}c_{22}c_{33}) + (c_{11}b_{22}c_{33}) + (c_{11}c_{22}b_{33})\}\,y_2 y_3^2 +$$
$$\{(a_{11}b_{22}c_{33}) + (b_{11}a_{22}c_{33}) + (c_{11}a_{22}b_{3}$$
$$+ (b_{11}c_{22}a_{33}) + (a_{11}c_{22}b_{33}) + (c_{11}b_{22}a_{33})\}\,y_1 y_2 y_3.$$

Die Jacobi'sche Covariante der drei Formen ist

$$J = (a_{11}b_{12}c_{13})\,x_1^3 + (a_{12}b_{22}c_{23})\,x_2^3 + (a_{13}b_{23}c_{33})\,x_3^3 +$$
$$+ \{(a_{11}b_{12}c_{33}) + (a_{11}b_{23}c_{13}$$
$$+ \{(a_{11}b_{12}c_{23}) + (a_{11}b_{22}c_{13})\}\,x_1^2 x_2 + \{(a_{11}b_{22}c_{23}) + (a_{12}b_{22}c_{13})\}\,x$$
$$+ \{(a_{11}b_{23}c_{33}) + (a_{13}b_{12}c_{33})\}\,x_1$$
$$+ \{(a_{12}b_{22}c_{33}) + (a_{12}b_{22}c_{23})\}\,x_2^2 x_3 + \{(a_{12}b_{23}c_{33}) + (a_{13}b_{22}c_{33})\}\,x$$
$$+ \{(a_{11}b_{22}c_{33}) - 2(a_{12}b_{13}c_{23})\}\,x$$

Die Hermite'sche Contravariante ist

$$H^{te} = {}^{1}\,(a_{22}b_{33}c_{12})\,\xi_1^3 - (a_{11}b_{33}c_{13})\,\xi_2^3 + (a_{11}b_{22}c_{23})\,\xi_3^3 -$$
$$- \{(a_{22}b_{33}c_{13}) + 2(a_{33}b_{12}c_{23})\}\,\xi$$
$$+ \{(a_{11}b_{33}c_{23}) + 2(a_{11}b_{12}c_{13})\}\,\xi_2^2\xi_1 + \{2(a_{22}b_{13}c_{23}) - (a_{11}b_{22}c_{12})\}\,\xi$$
$$+ \{(a_{11}b_{33}c_{12}) + 2(a_{33}b_{13}c_{23})\}\,\xi$$
$$- \{(a_{11}b_{22}c_{13}) + 2(a_{11}b_{12}c_{23})\}\,\xi_2\xi_3^2 + \{2(a_{22}b_{12}c_{13}) - (a_{22}b_{33}c_{23})\}\,\xi$$
$$+ \{(a_{11}b_{22}c_{33}) - 4(a_{12}b_{13}c_{23})\}\,\xi$$

---

[1] S. Borchard's Journal, Bd. 57, p. 371 und Rosanes's Abhan über Systeme von Kegelschnitte in den Annalen der Mathem., Bd. V den Zusammenhang der Hermite'schen mit der Jacobi'schen For grosser Eleganz behandelt.

die Klammerausdrücke dreigliedrige Determinanten uten, deren Hauptglied sich in der Klammer befindet.

Setzt man

$$J = \Sigma A_{ik\lambda} x_i x_k x_\lambda$$
$$H^{te} = \Sigma B_{ik\lambda} \xi_i \xi_k \xi_\lambda,$$

t nach Hermite

$$\Sigma A_{ik\lambda} \frac{d^{i+k+\lambda} H^{te}}{d\xi_i d\xi_k d\xi_\lambda} = T$$

Combinante. Die analogen Bildungen

$$\Sigma a_{ik} \frac{d^{i+k} H}{d\xi_i d\xi_k} = l\,\xi_1 + m\,\xi_2 + n\,\xi_3$$

$$\Sigma b_{ik} \frac{d^{i+k} H}{d\xi_i d\xi_k} = l'\xi_1 + m'\xi_2 + n'\xi_3$$

$$\Sigma c_{ik} \frac{d^{i+k} H}{d\xi_i d\xi_k} = l''\xi_1 + m''\xi_2 + n''\xi_3$$

drei lineare simultane Contravarianten, deren Determinante

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix} = \Sigma$$

e alls eine Combinante ist. Aus diesen Combinanten T und Σ tz Hermite die Resultante zusammen in der Form

$$R = 64\,\Sigma - T^2.$$

ch hebe desshalb diese Zusammensetzung der Resultante r r, obwohl Cayley[1] eine andere Combinante für Σ gegeben, il wie sich im Folgenden zeigen wird, die Combinante Σ^2 der e Factor der Discriminante der Jacobi'schen Covariante

[1] Borchard's Journal für reine und angewandte Mathematik. , p. 143.

III.

Obwohl Clebsch (l. c.) den in I citirten von ihm renden Satz von der Discriminante der Discriminante d $y_1f_1+y_2f_2+y_3f_3+\cdots$ bewiesen hat, will ich ihn hier System von drei Formen mit drei Variabeln in der We einmal beweisen, dass ich die Identität beider Discri nachweise, damit auch im Folgenden bei der Ermittel zweiten Factors nur von der Discriminante der Jaco Form die Rede zu sein brauche. Ich bezeichne mit H criminante der Form

$$y_1f_1+y_2f_2+y_3f_3$$

und mit $J(f_1f_2f_3)$ die Jacobi'sche Covariante von $f_1f_2f_3$ $f_1f_2f_3$ die Ableitungen einer Form dritten Grades sind, s es sich ohne Weiteres, dass

$$H=J(f_1f_2f_3).$$

Dazu braucht man nur beide Formen als Determ hinzuschreiben. Sind die Formen nicht Ableitungen ein schen Form, so kann man sie als lineare Verbindung Ableitungen $\Theta_1\Theta_2\Theta_3$ einer cubischen Form Θ betrachte Hermite, l. c.) derart, dass

$$(1)\qquad \begin{aligned} f_1 &= \lambda_{11}\Theta_1+\lambda_{12}\Theta_2+\lambda_{13}\Theta_3\\ f_2 &= \lambda_{21}\Theta_1+\lambda_{22}\Theta_2+\lambda_{23}\Theta_3\\ f_3 &= \lambda_{31}\Theta_1+\lambda_{32}\Theta_2+\lambda_{33}\Theta_3, \end{aligned}$$

wenn man die Grössen $\frac{l}{3\Sigma}$, $\frac{m}{3\Sigma}$ ... durch die Buc $\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{13}$ ... ersetzt.

Führt man daher überdiess die Grössen z durch die l Gleichungen ein

$$(2)\qquad \begin{aligned} \lambda_{11}y_1+\lambda_{21}y_2+\lambda_{31}y_3 &= z_1\\ \lambda_{12}y_1+\lambda_{22}y_2+\lambda_{32}y_3 &= z_2\\ \lambda_{13}y_1+\lambda_{23}y_2+\lambda_{33}y_3 &= z_3, \end{aligned}$$

st

$$y_1 f_1(x)+y_2 f_2(x)+y_3 f_3(x) = z_1\Theta_1(x)+z_2\Theta_2(x)+z_3\Theta_3(x).$$

Die Discriminante von $z_1\Theta_1+z_2\Theta_2+z_3\Theta_3$ heisse $\underset{z}{H}(\Theta_1\Theta_2\Theta_3)$, st

$$\underset{z}{H}(\Theta_1\Theta_2\Theta_3) = \underset{y}{H}(f_1 f_2 f_3),$$

n zwischen den Variabeln $y_1y_2y_3$ $z_1z_2z_3$ die Beziehungen (2) usgesetzt werden. Nun ist vermöge der Gleichungen (1)

$$\underset{z}{J}(f_1 f_2 f_3) = L.\underset{z}{J}(\Theta_1\Theta_2\Theta_3),$$

$= \Sigma\pm\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33}$ und $J(\Theta_1\Theta_2\Theta_3)$ die Jacobi'sche Form von Θ_3 bedeuten soll, und wo der beigefügte Buchstabe z uten soll, dass die Formen in den Variabeln z geschrieben nommen sind.

Nach dem Früheren ist

$$\begin{aligned} \underset{z}{H}(\Theta) &= \underset{z}{J}(\Theta) \\ L.\underset{z}{H}(\Theta) &= \underset{z}{J}(f) \\ \underset{z}{J}(f) &= L.\underset{y}{H}(f), \end{aligned}$$

ch

r man links $z_1z_2z_3$ vermöge (2) durch $y_1y_2y_3$ ausdrückt. Die en J und H sind also im Allgemeinen nicht identisch, wohl können sie in einander übergeführt werden durch eine e Transformation der Variabeln. Demnach müssen die uten Invarianten übereinstimmen, d. i. das Verhältniss $S^3:T^2$ n Rücksicht auf die Grade müssen S und T, abgesehen von rischen Factoren, für beide übereinstimmen. Bezeichnet mit S_1, T_1 resp. S_2, T_2 die fundamentalen Invarianten von J H, so stellen sich die Discriminanten nach einem bekannten tz von Hesse folgendermassen dar

$$\begin{aligned} D_1 &= T_1^2 - gS_1^3 \\ D_2 &= T_2^2 - gS_2^3. \end{aligned}$$

Nach dem Früheren stimmen die Verhältnisse $S^3 : T^2$ üb
daraus folgt, dass die Discriminanten von J und H, abge
von einem Zahlenfactor, übereinstimmen.

IV.

Ich gehe nun dazu über, den zweiten Factor in der I
minante der Jacobi'schen Covariante anzugeben, und k
mich dabei eines Beweisverfahrens bedienen, dessen sich
Cayley (l. c.) bedient und das darin besteht, dass die abgele
Formen mit den bekannten Formen für eine cubische Form
einstimmen müssen, wenn man die drei Formen $f_1 f_2 f_3$ dur
Ableitungen dieser cubischen Form ersetzt. Die Berechtigu
diesem Verfahren beruht auf dem Principe, dass man, da m
hier mit Combinanten zu thun hat, statt der Formen bel
Verbindungen derselben

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$$
$$\lambda' f_1 + \lambda'_2 f_2 + \lambda'_3 f_3$$
$$\lambda'' f_1 + \lambda''_2 f_2 + \lambda''_3 f_3$$

wählen kann, wo die λ ganz beliebig sind und in Folge d
über dieselben so verfügt werden kann, dass die Verbindu
Ableitungen einer cubischen Form werden. Ich werde j
ein anderes, ebenso einfaches Verfahren anwenden. — Beze
man die Coëfficienten der Jacobi'schen Covariante J mi
und versteht unter[1] $(aa)^{k\lambda}$, $(ab)^{k\lambda}$, $(ac)^{k\lambda}$ u. s. w. die fundam
talen Aronholdi'schen Verbindungen der 18 Coëfficiente d
drei Formen, so behaupte ich, dass die Discriminante d
Jacobi'schen Form sich bis auf einen Zahlen-Factor wie
zusammensetzt:

---

[1] Borchardt's Journal Bd. 55, p. 103.

$$\Delta =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{12} & a_{13} & a_{23} \\ b_{11} & b_{22} & b_{33} & b_{12} & b_{13} & b_{23} \\ c_{11} & c_{22} & c_{33} & c_{12} & c_{13} & c_{23} \\ J_{111} & J_{122} & J_{133} & J_{122} & J_{113} & J_{123} \\ J_{112} & J_{222} & J_{233} & J_{122} & J_{123} & J_{223} \\ J_{113} & J_{223} & J_{333} & J_{123} & J_{133} & J_{233} \end{vmatrix} \times$$

$$\begin{vmatrix} (aa)^{11}(aa)^{22}(aa)^{33}2(aa)^{23}2(aa)^{13}2(aa)^{12} \\ (bb)^{11}(bb)^{22}(bb)^{33}2(bb)^{23}2(aa)^{13}2(aa)^{12} \\ (cc)^{11}(cc)^{22}(cc)^{33}2(cc)^{23}2(cc)^{13}2(cc)^{12} \\ (bc)^{11}(bc)^{22}(bc)^{33}2(bc)^{23}2(bc)^{13}2(bc)^{12} \\ (ac)^{11}(ac)^{22}(ac)^{33}2(ac)^{23}2(ac)^{13}2(ac)^{12} \\ (ab)^{11}(ab)^{22}(ab)^{33}2(ab)^{23}2(ab)^{13}2(ab)^{12} \end{vmatrix}^2$$

Beweis.

Zuvor bemerken wir jedoch Folgendes. Setzt man unter ei haltung der Bezeichnung des Abschnittes I

$$\begin{aligned} x_1 &= lX_1 + mX_2 + nX_3 \\ x_2 &= l'X_1 + m'X_2 + n'X_3 \\ x_3 &= l''X_1 + m''X_2 + n''X_3 \end{aligned}$$

d ennt die simultane Invariante

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix}$$

r rei Formen $f_1 f_2 f_3$ mit Hermite $\Sigma(f_1 f_2 f_3)$, oder kurz Σ, n hat dieselbe bekanntlich die Eigenschaft, im Falle $f_1 f_2 f_3$ l ungen einer cubischen Form werden, in die dritte Potenz r variante S derselben überzugehen.

Durch Einführung der Variabeln X gehen ferne
Hermite[1] bemerkt hat, die Formen $f_1 f_2 f_3$ in die Able
einer gewissen Form dritten Grades über. Nennt man
diese U, setzt ferner

$$\frac{1}{3}\frac{\partial U(X_1X_2X_3)}{\partial X_1} = U_1 \quad \frac{1}{3}\frac{\partial U(X_1X_2X_3)}{\partial X_2} = U_2 \quad \frac{1}{3}\frac{\partial U(X_1X_2X_3)}{\partial X_3}$$

so bestehen die Identitäten

$$f_1(x_1x_2x_3) = U_1(X_1X_2X_3)$$

$$f_2(x_1x_2x_3) = U_2(X_1X_2X_3)$$

$$f_3(x_1x_2x_3) = U_3(X_1X_2X_3).$$

Hieraus ergibt sich ohne Weiteres

$$\Sigma^3(f_1f_2f_3) = S(U).$$

Diese Formel gibt nun die Möglichkeit, die simultane
riante Σ in eine andere Form zu bringen.

Setzt man nämlich

$$U(X_1X_2X_3) = \Sigma U_{ik\lambda}X_iX_kX_\lambda \qquad \begin{pmatrix} \iota = 1, 2, 3 \\ \varkappa = 1, 2, 3 \\ \lambda = 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

und führt wie oben die Aronhold'schen fundamentalen Ve
dungen $(U_1U_1)^{11}$ u. s. w. ein, so findet bekanntlich die Gleic
statt

---

[1] l. c. p. 374.

$$= \begin{vmatrix} (U_1U_1)^{11}(U_1U_1)^{22}(U_1U_1)^{33}2(U_1U_1)^{23}2(U_1U_1)^{13}2(U_1U_1)^{12} \\ (U_2U_2)^{11}(U_2U_2)^{22}(U_2U_2)^{33}2(U_2U_2)^{23}2(U_2U_2)^{13}2(U_2U_2)^{12} \\ (U_3U_3)^{11}(U_3U_3)^{22}(U_3U_3)^{33}2(U_3U_3)^{23}2(U_3U_3)^{13}2(U_3U_3)^{12} \\ (U_2U_3)^{11}(U_2U_3)^{22}(U_2U_3)^{33}2(U_2U_3)^{23}2(U_2U_3)^{13}2(U_2U_3)^{12} \\ (U_1U_3)^{11}(U_1U_3)^{22}(U_1U_3)^{33}2(U_1U_3)^{23}2(U_1U_3)^{13}2(U_1U_3)^{12} \\ (U_1U_2)^{11}(U_1U_2)^{22}(U_1U_2)^{33}2(U_1U_2)^{23}2(U_1U_2)^{13}2(U_1U_2)^{12} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma^9(f_1f_2f_3).$$

ie analog gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} (aa)^{11}(aa)^{22}(aa)^{33}2(aa)^{23}2(aa)^{13}2(aa)^{12} \\ (bb)^{11}(bb)^{22}(bb)^{33}2(bb)^{23}2(bb)^{13}2(bb)^{12} \\ (cc)^{11}(cc)^{22}(cc)^{33}2(cc)^{23}2(cc)^{13}2(cc)^{12} \\ (bc)^{11}(bc)^{22}(bc)^{33}2(bc)^{23}2(bc)^{13}2(bc)^{12} \\ (ac)^{11}(ac)^{22}(ac)^{33}2(ac)^{23}2(ac)^{13}2(ac)^{12} \\ (ab)^{11}(ab)^{22}(ab)^{33}2(ab)^{23}2(ab)^{13}2(ab)^{12} \end{vmatrix} = \rho(f_1f_2f_3)$$

n Coëfficienten der Formen $f_1f_2f_3$ ist offenbar eine Inva-
folglich, da $U_1U_2U_3$ aus $f_1f_2f_3$ durch jene lineare
ation hervorgehen, findet die Beziehung statt

$$\rho(f_1f_2f_3) \quad \Sigma^8(f_1f_2f_3) = S^3(U) = \Sigma^9$$

$$= \begin{vmatrix} (aa)^{11}(aa)^{22}(aa)^{33}2(aa)^{23}2(aa)^{13}2(aa)^{12} \\ (bb)^{11}(bb)^{22}(bb)^{33}2(bb)^{23}2(bb)^{13}2(bb)^{12} \\ (cc)^{11}(cc)^{22}(cc)^{33}2(cc)^{23}2(cc)^{13}2(cc)^{12} \\ (bc)^{11}(bc)^{22}(bc)^{33}2(bc)^{23}2(bc)^{13}2(bc)^{12} \\ (ac)^{11}(ac)^{22}(ac)^{33}2(ac)^{23}2(ac)^{13}2(ac)^{12} \\ (ab)^{11}(ab)^{22}(ab)^{33}2(ab)^{23}2(ab)^{13}2(ab)^{12} \end{vmatrix} = \Sigma(f_1f_2f_3).$$

Dass die Determinante wirklich eine Invariante ist, ist leicht zu
enn bildet man von $y_1f_1(x)+y_2f_2(x)+y_3f_3(x) = R(x)$ die adjungirte
ist dieselbe quadratisch in den y und in den neuen (contragre-
n Variabeln ξ. Die Determinante dieser bi-ternären Form ist jene
e; e Determinante, die ich mit ρ bezeichnet habe.

Um nun die Discriminante $D_{J(f_1f_2f_3)}$ der Jacobi'schen von $f_1f_2f_3$ zu bilden, hat man nur die 6 Verbindungen

$$x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ x_2x_3,\ x_3x_1,\ x_1x_2$$

linear aus den 6 Ausdrücken

$$\frac{1}{3}\frac{\partial J(f_1f_2f_3)}{\partial x_1},\quad \frac{1}{3}\frac{\partial J(f_1f_2f_3)}{\partial x_2},\quad \frac{1}{3}\frac{\partial J(f_1f_2f_3)}{\partial x_3}$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial H(J)}{\partial x_1},\quad \frac{1}{3}\frac{\partial H(J)}{\partial x_2},\quad \frac{1}{3}\frac{\partial H(J)}{\partial x_3}$$

zu eliminiren, wenn man unter $H(J)$ die Hesse'sche Cova von $J(f_1f_2f_3)$ versteht. Nennt man daher $J_{ix\lambda}$, $H_{ix\lambda}$ die cienten von J, $H(J)$, so ist

$$D_J = \begin{vmatrix} J_{111} & J_{122} & J_{133} & J_{112} & J_{113} & J_{123} \\ J_{112} & J_{222} & J_{233} & J_{122} & J_{123} & J_{223} \\ J_{113} & J_{223} & J_{333} & J_{123} & J_{133} & J_{233} \\ H_{111} & H_{122} & H_{133} & H_{112} & H_{113} & H_{123} \\ H_{112} & H_{222} & H_{233} & H_{122} & H_{123} & H_{223} \\ H_{113} & H_{223} & H_{333} & H_{123} & H_{133} & H_{233} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Um diese auszurechnen und in ihre einfachsten Fa zu zerlegen, recurrire ich wieder auf die oben benützte $U(X_1X_2X_3)$. Bezeichnet man mit $R(\varphi\psi\chi)$ allgemein die Resu der drei quadratischen Formen φ, ψ, χ in ihrer bekannten so ist offenbar

$$R(U_1U_2U_3) = \Sigma^8 . R(f_1f_2f_3)$$

oder

$$(c) \qquad D_U = \Sigma^8 . R(f_1f_2f_3),$$

wo D_U die Discriminante der Form U bekanntlich nach H hold[1] durch die Determinante

[1] Borchard's Journal für reine und angewandte Math Bd. 55, p. 167.

$$D_U = \begin{vmatrix} a_{111} & a_{122} & a_{133} & a_{112} & a_{113} & a_{123} \\ a_{112} & a_{222} & a_{233} & a_{122} & a_{123} & a_{223} \\ a_{113} & a_{223} & a_{333} & a_{123} & a_{133} & a_{233} \\ b_{111} & b_{122} & b_{133} & b_{112} & b_{113} & b_{123} \\ b_{112} & b_{222} & b_{233} & b_{122} & b_{123} & b_{223} \\ b_{113} & b_{223} & b_{333} & b_{123} & b_{133} & b_{233} \end{vmatrix}$$

estellt ist, wo $b_{ik\lambda}$ in bekannter Weise die Coëfficienten der
$H(U)$ bedeuten.
Es ist aber ferner

$$(a) \quad J(U_1U_2U_3) = H(U) = \Sigma^2 . J(f_1f_2f_3)$$

ich

$$\Sigma^6 . H\left(J(f_1f_2f_3)\right) = H\left(H(U)\right),$$

lbst auf beiden Seiten dieselben Variabeln geschrieben
Nach Aronhold's Satze[1] ist nun bekanntlich

$$H\left(aU+bH(U)\right) = (3Sa^2b+6Tab^2+3S^2b^3)U+ \\ +(a^3-3Sab^2-2Tb^3)H(U)$$

ch für $a = 0,\ b = 1$

$$H\left(H(U)\right) = 3S_U^2 . U - T_U . H(U).$$

Dies oben eingesetzt gibt

$$(b) \quad \Sigma^6 . H(J) = 3S_U^2 U - T_U H(U).$$

Die Vergleichung der Coëfficienten in (a) und (b) liefert

$$\Sigma^6 . H_{ik\lambda} = 3S_U^2 a_{ik\lambda} - T_U b_{ik\lambda},\ b_{ik\lambda} = \Sigma^2 J_{ik\lambda}.$$

Ersetzt man auf solche Weise die Coëfficienten $J_{ik\lambda}$, $H_{ik\lambda}$
die neuen Werthe in der Determinante für D_J so ergibt

---

[1] l. c.p. 127.

$$D_J = \frac{3^3 S_u^6}{\Sigma^{18} \cdot \Sigma^6} \begin{vmatrix} b_{111} & b_{122} & b_{133} & b_{112} & b_{113} & b_{123} \\ b_{112} & b_{222} & b_{233} & b_{122} & b_{123} & b_{223} \\ b_{113} & b_{223} & b_{333} & b_{123} & b_{133} & b_{233} \\ a_{111} & a_{122} & a_{133} & a_{112} & a_{113} & a_{123} \\ a_{112} & a_{222} & a_{233} & a_{122} & a_{123} & a_{223} \\ a_{113} & a_{223} & a_{333} & a_{123} & a_{133} & a_{233} \end{vmatrix},$$

da der von $T_U \cdot b_{i\lambda}$ herrührende Theil der drei letzten Hor talreihen offenbar durch passende Subtraction der drei e zerstört wird.

Es wird sonach

$$\Sigma^6 \cdot D_J = -27 \cdot D_U$$

und nach der oben (a) gefundenen Formel

$$D_J = -27 \Sigma^2 \cdot R(f_1 f_2 f_3).$$

Ersetzt man noch Σ^2 durch die neue oben angegebene so hat man

$$D_J = -27 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{12} & a_{13} & a_{23} \\ b_{11} & b_{22} & b_{33} & b_{12} & b_{13} & b_{23} \\ c_{11} & c_{22} & c_{33} & c_{12} & c_{13} & c_{23} \\ J_{111} & J_{122} & J_{133} & J_{122} & J_{113} & J_{123} \\ J_{112} & J_{222} & J_{233} & J_{122} & J_{123} & J_{223} \\ J_{113} & J_{223} & J_{333} & J_{123} & J_{133} & J_{233} \end{vmatrix} \times$$

$$\begin{vmatrix} (aa)^{11} & (aa)^{22} & (aa)^{33} & 2(aa)^{23} & 2(aa)^{13} & 2(aa)^{12} \\ (bb)^{11} & (bb)^{22} & (bb)^{33} & 2(bb)^{23} & 2(bb)^{13} & 2(bb)^{12} \\ (cc)^{11} & (cc)^{22} & (cc)^{33} & 2(cc)^{23} & 2(cc)^{13} & 2(cc)^{12} \\ (bc)^{11} & (bc)^{22} & (bc)^{33} & 2(bc)^{23} & 2(bc)^{13} & 2(bc)^{12} \\ (ac)^{11} & (ac)^{22} & (ac)^{33} & 2(ac)^{23} & 2(ac)^{13} & 2(ac)^{12} \\ (ab)^{11} & (ab)^{22} & (ab)^{33} & 2(ab)^{23} & 2(ab)^{13} & 2(ab)^{12} \end{vmatrix}^2 = R(f_1 f_2 f_3)^2$$

bis auf einen Zahlenfactor.

V.

Es ist schon oft gesagt worden, dass man solche lineare indungen der drei Formen wählen kann, dass sie Ablei- en einer cubischen werden. Solche Verbindungen gibt nun ıite in der Form

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}\frac{d\Theta}{dx_1} &= L_1 f_1 + L_2 f_2 + L_3 f_3 \\
\tfrac{1}{3}\frac{d\Theta}{dx_2} &= M_1 f_1 + M_2 f_2 + M_3 f_3 \qquad \Theta = f_1 X_1 + f_2 Y + f_3 Z, \\
\tfrac{1}{3}\frac{d\Theta}{dx_3} &= N_1 f_1 + N_2 f_2 + N_3 f_3
\end{aligned} \tag{1}$$

, M, N die partiellen Determinanten der Determinante Σ und

$$\begin{aligned}
X_1 &= L_1 x_1 + M_1 x_2 + N_1 x_3 \\
Y &= L_2 x_1 + M_2 x_2 + N_2 x_3 \\
Z &= L_3 x_1 + M_3 x_2 + N_3 x_3
\end{aligned}$$

Bildet man die Jacobi'sche Covariante von beiden Seiten leichung (1), so erhält man

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2\Theta}{dx_1^2} & \frac{d^2\Theta}{dx_1 dx_2} & \frac{d^2\Theta}{dx_1 dx_3} \\ \frac{d^2\Theta}{dx_2 dx_1} & \frac{d^2\Theta}{dx_2^2} & \frac{d^2\Theta}{dx_2 dx_3} \\ \frac{d^2\Theta}{dx_3 dx_1} & \frac{d^2\Theta}{dx_3 dx_2} & \frac{d^2\Theta}{dx_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d}{dx_1}\Sigma L_i f_i & \frac{d}{dx_1}\Sigma M_i f_i & \frac{d}{dx_1}\Sigma N_i f_i \\ \frac{d}{dx_2}\Sigma L_i f_i & \frac{d}{dx_2}\Sigma M_i f_i & \frac{d}{dx_2}\Sigma N_i f_i \\ \frac{d}{dx_3}\Sigma L_i f_i & \frac{d}{dx_3}\Sigma M_i f_i & \frac{d}{dx_3}\Sigma N_i f_i \end{vmatrix}$$

$$= (L_1 M_2 N_3) \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_3}{dx_1} \\ \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_2} & \frac{df_3}{dx_2} \\ \frac{df_1}{dx_3} & \frac{df_2}{dx_3} & \frac{df_3}{dx_3} \end{vmatrix}.$$

Bildet man nun die Discriminanten auf beiden Seit
(2), so erhält man

$$(3) \qquad (T_1^2 - S_1^3)\, S_1^6 = T_2^2 - S_2^3,$$

wo S_1 und T_1 die fundamentalen Invarianten von Θ und
die der Hesse'schen Covariante von Θ bedeuten. Diese
gibt über die Beschaffenheit dieser Invarianten Aufschlu
die ich aber bei Gelegenheit zurückzukommen gedenke.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

OVER

GELIJKMATIGE

EN

ONGELIJKMATIGE

NVERGENTIE VAN REEKSEN

DOOR

H. VAN DER KAMP

EN

C. D. A. ZIMMERMANN.

MIDDELBURG.
J. C. & W. ALTORFFER.

—

1907.

er gelijkmatige en ongelijkmatige convergentie van reeksen.

I.

llen wij ons voor de som te bepalen van de reeks:

$$-x)\sqrt{x}+(1-x)^2\sqrt{x}+(1-x)^3\sqrt{x}+\ldots.$$

n eenvoudigheidshalve aan x slechts reëele waarden en worden tusschen 0 en 2 (nul inbegrepen) omdat eks voor zulke waarden convergeert, en voor alle e waarden van x divergeert, dan vinden wij op bekende voor de som van n termen

$$S_n=(1-x)\sqrt{x}\,.\,\frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)}$$

alle waarden van x tusschen 0 en 2 zal nu $(1-x)$ reuk zijn, waarvan de absolute waarde kleiner dan 1 dat $(1-x)^n$ tot nul nadert als n steeds grooter wordt. geval is dus de som der reeks:

$$S \text{ of } \lim_{n=\infty} S_n=\frac{(1-x)\sqrt{x}}{x}$$

$$S=x^{-1/2}-x^{1/2}\ldots\ldots\quad(1)$$

: $x=0$ is de som ook nul, evenals voor $x=1$; voor

$x = 2$ is de reeks divergent. Deze waarden van d
voor $x = 0$ en $x = 2$ worden echter niet verkregen
resp. $x = 0$ en $x = 2$ te substitueeren in (1), wa
krijgt men in het eerste geval ∞, en in het tweede $\frac{1}{\sqrt{2}}$ —
Wij komen daarop later terug.

Daar $S = \frac{(1-x)\sqrt{x}}{x}$ en $S_n = (1-x)\sqrt{x}\,\frac{1-(1}{1-(1}$

is dus R_n, dat is de som der termen die op den
volgen,

$$R_n = S - S_n = (1-x)\sqrt{x}\left[\frac{1}{x} - \frac{1-(1-x)}{1-(1-x)}\right.$$

$$R_n = (1-x)\sqrt{x}\,\frac{(1-x)^n}{x}$$

$$R_n = (x^{-1/2} - x^{1/2})(1-x)^n.$$

Men ziet hieruit dat, voor waarden van x tussch
genoemde grenzen, R_n altijd tot nul nadert voor
grooter wordende waarden van n, want voor

$$0 < x < 2$$

is $x^{-1/2} - x^{1/2}$ altijd eindig, terwijl

$$\lim_{n=\infty} (1-x)^n = 0$$

zoodat

$$|R_n| < \varepsilon \quad ^1)$$

---

1) Met $|z|$ duiden wij in het vervolg de absolute waarde (
van z aan.

ijn, als ε een willekeurig gekozen kleine positieve
heid is, als men n maar groot genoeg neemt.
derstellen wij nu echter eens dat x een waarde heeft
eer dicht bij nul ligt, bv. $x = \eta$, dan hebben wij hier
genaardigheid dat die waarde van n waarvoor

$$|R_n| < \varepsilon$$

$$|(x^{-1/2} - x^{1/2})(1-x)^n| < \varepsilon$$

t ∞ nadert, naarmate η tot nul nadert. Immers voor
n geschreven worden

$$R_n = \frac{(1-x)^{n+1}}{\sqrt{x}}$$

s de volstrekte waarde hiervan kleiner dan ε moet
zal dus

$$\left|\frac{(1-x)^{n+1}}{\sqrt{x}}\right| < \varepsilon$$

$$|(1-x)^{n+1}| < \varepsilon\,|\sqrt{x}|$$

$$\left|\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right| > \frac{1}{\varepsilon\,|\sqrt{x}|}$$

$$\left|\frac{1}{1-x}\right|^{n+1} > \frac{1}{\varepsilon\,|\sqrt{x}|}$$

$$n+1 > \frac{\log \dfrac{1}{\varepsilon\,|\sqrt{x}|}}{\log \left|\dfrac{1}{1-x}\right|}$$

it blijkt dat n tot ∞ nadert, als x nadert tot 0.

Men zou dus, als x een waarde had in de nabijhei
0, een oneindig groot aantal termen moeten nemen
som der reeks te hebben, want pas na een oneindig
aantal termen wordt R_n zoo klein, dat zij verwaarloos
worden. In dit geval noemt men de reeks *ongelijk*
convergent.

Wij geven thans de

Bepaling: *Gegeven een reeks, welker termen functie*
x *zijn. Voor die waarden van* x *waarvoor de reeks c*
gent is, is het mogelijk een zoodanige waarde m te bepale

$$|R_n| < \varepsilon \quad \text{voor } n \geqq m,$$

d. i. de absolute waarde van de som der termen, die o
n^{den} *term volgen, kleiner is dan een willekeurig gegeven*
positief getal ε. *De waarde, die men daartoe aan m*
geven hangt in het algemeen af van de waarde van x.
voor alle waarden van x tusschen de grenzen $x = a$ *en*
de gezochte waarde van n beneden een bepaald eindig
dan noemt men de reeks tusschen a en b gelijkm
convergent. Geeft men echter aan x waarden
buurt van $x = c$, *en groeit daarbij tevens de waard*
men aan m moet geven, tot in het oneindige aan, dan
men de reeks ongelijkmatig convergent
buurt van $x = c$.

Hieruit blijkt dat van gelijk- of ongelijkmatige converg

n sprake is bij reeksen, welker termen functies zijn een veranderlijke grootheid x. De limiet der som van een reeks is ook een functie van x, zoodat men kan

n

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots,$$

in $u_1(x)$ enz. verondersteld worden continue functies x voor te stellen. Wel is de som van een *eindig* aantal nue functies weer een continue functie van x, maar een oneindig aantal termen, zooals de reeks bevat, gaat regel niet meer door, en de som, d. i. $f(x)$, kan inder- discontinuïteiten vertoonen. Om te laten zien dat dit bij de behandelde reeks het geval is, willen wij er, dui- heidshalve, een grafische voorstelling bij voegen. (fig. 1). volledige kromme, voltooid met de stippellijnen, stelt de functie

$$y = x^{-1/2} - x^{1/2} \ldots . (a)$$

l het getrokken gedeelte de som der reeks

$$f(x) = (1-x)\sqrt{x} + (1-x)^2\sqrt{x} + \ldots .$$

elt. De ij-as is asymptoot aan de kromme (a). De tinuïteit van $f(x)$ springt nu duidelijk in het oog, terwijl zoowel de kromme (a) als $f(x)$, tusschen de n $x = 0$ en $x = 2$, door het getrokken gedeelte der nne worden voorgesteld, behoort het punt

$$x = 0$$
$$y = \infty$$

wel tot de kromme (a) maar niet tot $f(x)$. In pla
dit punt behoort de oorsprong der assen ($x = 0$

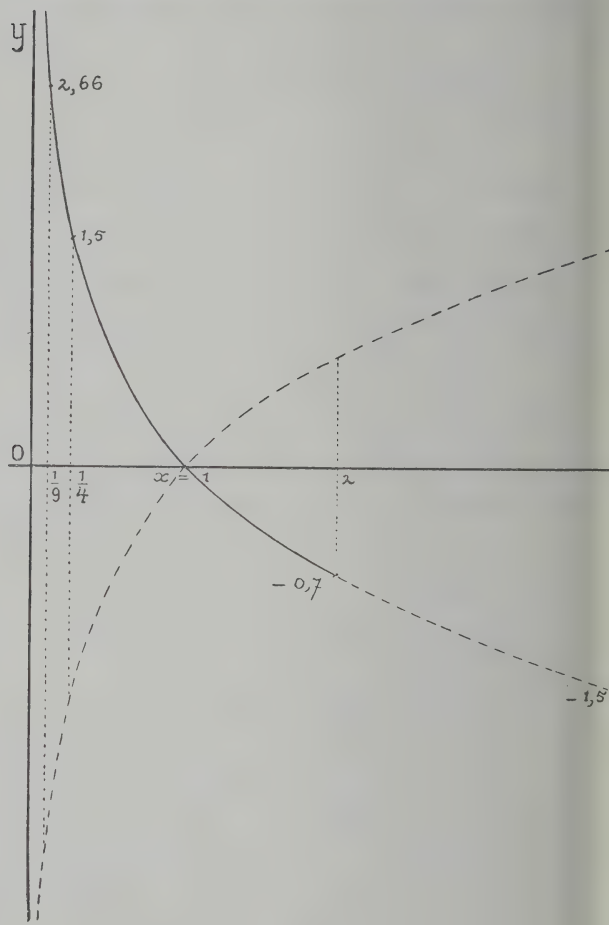


Fig. 1.

(als geïsoleerd punt) tot $f(x)$. Dit was het wat reed
werd opgemerkt, nl. dat men de waarde van de s

:s, d. i. van $f(x)$ niet vinden kan door $x = 0$ in (a) te
stitueeren. Men vindt dan wel een punt der kromme
, maar niet van $f(x)$, omdat $f(x)$ voor $x = 0$ discon-
. is.

)eze *discontinuïteit* staat nu dikwijls met *ongelijkmatige*
ergentie in verband. Uit dit voorbeeld blijkt het duidelijk:
() is discontinu bij $x = 0$, en de reeks welke de functie
egenwoordigt, wordt in de buurt van $x = 0$ ongelijk-
ig convergent.

eschouwen wij nu nog een tweede voorbeeld,

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \ldots.$$

$$S_n = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$$

)eze reeks is convergent voor alle reëele waarden van
, ook voor $x = 0$ omdat dan alle termen der reeks nul
den.

emakkelijk blijkt weer, dat

$$S = \lim_{n=\infty} S_n = 1 + x^2$$

$$\text{dus } R_n = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$$

)nderzoeken wij weer hoe groot m genomen moet worden,
te voldoen aan

$$|R_n| < \varepsilon \text{ voor } n \geqq m$$

of

$$\frac{1}{|1+x^2|^{n-1}} < \varepsilon$$

$$|1+x^2|^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n-1 > \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log |1+x^2|}$$

dan zien wij, dat, wanneer x in de buurt van
$\log |1+x^2|$ tot nul, dus de breuk tot ∞ zal naderen en
mede tevens de waarde van m. Men zou dus ook hier
als x een waarde heeft dicht bij nul, om de waarde
$f(x)$ met een fout kleiner dan ε, te berekenen, een
eindig groot aantal termen der reeks moeten nemen,
pas na een oneindig groot aantal termen $|R_n| < \varepsilon$
De reeks is derhalve ongelijkmatig convergent in de
van $x = 0$.

In fig. 2 is de parabool de meetkundige voorstelling

$$S = 1 + x^2$$

of

$$y = 1 + x^2 \ldots\ldots$$

ook behooren al hare punten tot de voorstelling van
behalve de top A der parabool.

)or waarden van x zeer dicht bij nul, b. v. $\frac{1}{10^{20}}$ is

$$S_n = 1 + \frac{1}{10^{20}} - \frac{1}{(1+10^{20})^{n-1}}$$

$$\text{dus } \lim_{n=\infty} S_n = 1 + \frac{1}{10^{20}}$$

d. i. nagenoeg $= 1$

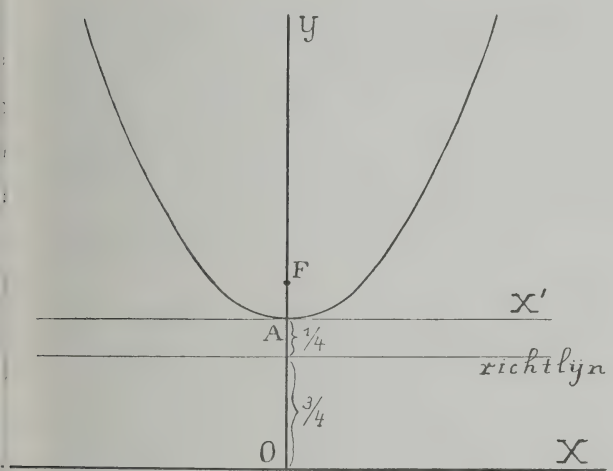


Fig. 2.

l de waarden van y en van $f(x)$ des te dichter bij 1
e naarmate x dichter bij 0 genomen wordt. Maar neemt
: juist $= 0$, dan is y juist $= 1$ terwijl $f(x)$ plotseling
ordt. Het punt A ($x = 0$, $y = 1$) behoort wel tot de
rie (a) maar niet tot $f(x)$; in plaats van dit punt be-

hoort de oorsprong der assen ($x = 0$, $y = 0$) (als geïs
punt) tot de meetkundige voorstelling van $f(x)$.

Wij zien derhalve in dit voorbeeld opnieuw

1°. dat de reeks *ongelijkmatig convergent* wordt
buurt van $x = 0$, en

2°. dat de functie, welke door de reeks gerepresee
wordt, *discontinu* is bij $x = 0$.

Uit het behandelde make men echter niet de g
trekking dat *ongelijkmatige convergentie* eener reeks
zakelijk samengaat met discontinuiteit der functie, di
de reeks wordt voorgesteld. Wel is het omgekeerde
hetgeen wordt uitgedrukt door de

Stelling I.

Als gegeven is

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots = S_n(x) + R_n(x$$

waarin $u_1(x)$ *enz., voor waarden van* x *tusschen* $x =$
$x = b$, *continue functies van* x *voorstellen, en de reek*
lijkmatig convergent is voor waarden van x
gebied, dan is $f(x)$ *tusschen de genoemde grenzen con*

Bewijs:

Als x en x' twee waarden van x voorstellen tusscl
genoemde grenzen, dan volgt uit de continuïteit v

tiës $u_1(x)$ enz. dat men, door x en x' dicht genoeg bij
ar te nemen, de waarden

$$| u_1(x) - u_1(x') |$$
$$| u_2(x) - u_2(x') | \text{ enz.}$$

: kleiner kan maken dan een willekeurig klein positief
, en dat dus ook de absolute waarde van het verschil

$$S_n(x) - S_n(x')$$

kkeurig klein gemaakt kan worden, mits $S_n(x)$ en $S_n(x')$
ommen van een *eindig aantal* der functies $u(x)$ en $u(x^1)$
stellen.

it de gelijkmatige convergentie volgt dat $R_n(x)$ en
x') eveneens door het kiezen van een *eindige* waarde
n willekeurig klein genomen kunnen worden.

n daar nu

$$(f(x) - f(x') = S_n(x) - S_n(x') + R_n(x) - R_n(x')$$

$$) - f(x') | \leqq | S_n(x) - S_n(x') | + | R_n(x) | + | R_n(x') |$$

jt dat ook de absolute waarde van het eerste lid tot
willekeurig klein bedrag gemaakt kan worden, waaruit
ontinuiteit van $f(x)$ volgt.

et kan echter gebeuren dat een reeks ongelijkmatig
ergent is in de buurt van een bepaalde waarde van x
och de functie, door de reeks vertegenwoordigd, niet
ntinu wordt voor diezelfde waarde van x.

Als voorbeeld hiervan geven wij de reeks:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x\{n(n+1)x^2 - 1\}}{\{1 + n^2 x^2\}\{1 + (n+1)^2 x^2\}}$$

De n^{de} term dezer reeks kan aldus

$$\frac{n x}{1 + n^2 x^2} - \frac{(n+1)x}{1 + (n+)\,1^2 x^2}$$

worden geschreven.

De som is dus $\frac{x}{1+x^2}$, en $R_n = \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2 x^2}$ en

zien, dat voor $x = \frac{1}{n+1}$, dit is een waarde zeer

bij nul, als n zeer groot is, $R_n = \frac{1}{2}$, waaruit blijkt,

om aan de bekende voorwaarde

$$|R_n(x)| < \varepsilon \quad \text{voor } n \geqq m$$

te voldoen, een waarde van m gevonden zal worden,

onbepaald aangroeit, dus de reeks ongelijkmatig conver

is in de buurt van $x = 0$.

De functie door de reeks voorgesteld is echter co

voor $x = 0$.

In het tweede gedeelte van onze behandeling zal pa

belangrijkheid van ons onderwerp in het oog vallen, wa

dan tevens duidelijk zal worden, in welke gevallen

onderzoek naar de al of niet gelijkmatige converge

eener reeks noodig is. Dit onderzoek is echter zeer

celijk wanneer het kan geschieden door gebruik te
n van een der twee volgende stellingen.

elling II.

s, *voor waarden van x binnen zekere grenzen, de abso-*
waarden van de termen der reeks

$$S = u_1(x) + u_2(x) + \ldots.$$

n $u_1(x)$ *enz. continue functies van x zijn, respectieve-*
kleiner zijn dan die van een convergente reeks van
ve constanten

$$T = K_1 + K_2 + \ldots.$$

is voor die waarden van x de eerste reeks g e l ij k-
i g c o n v e r g e n t.

t bewijs is eenvoudig; uit de convergentie van de
T volgt nl. dat bij deze reeks

$$|R_n| < \varepsilon$$

kt kan worden, als ε een willekeurig kleine positieve
eid is, zonder dat n tot in het oneindige zal aan-
n.

absolute waarde der overeenkomstige rest nu bij de
S is nog kleiner voor de dezelfde waarde van n,
it de juistheid der stelling volgt.

rbeeld: De reeks

$$\sin x + \frac{1}{2^2}\sin^2 x + \frac{1}{3^2}\sin^3 x +$$

ijkmatig convergent voor alle waarden van x, omdat

de absolute waarde der termen kleiner zijn dan d
eenkomstige termen van

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots.$$

welke laatste een convergente reeks is van positie
stanten.

Stelling III.

Elke machtreeks

$$f(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots.$$

*is steeds gelijkmatig convergent voor alle waarden
waarvoor zij convergeert, d. i. dus binnen den conv
cirkel.*

Het bewijs volgt uit de voorgaande stelling. Stel
convergentiestraal r en zij m de modulus van z.
men dan een positieve grootheid k tusschen m en
zijn de moduli van de termen der gegeven reeks,
termen der reeks

(1) $$a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3 + \ldots.$$

kleiner dan de overeenkomstige termen der reeks

(2) $$a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + \ldots.$$

Deze laatste is echter een convergente reeks v
tieve constanten, zoodat volgens Stelling II de r
gelijkmatig convergent is.

n gevolg van Stelling I en II is de Stelling op pag. 383
de *Hoogere Algebra* van LOBATTO (5de druk):
De *limiet voor* $x = x_1$ *van de som eener reeks, welker*
en *doorloopende functies zijn van* x, *kan steeds gevonden*
en door toepassing van den regel voor de bepaling van
limiet eener som, als bij de nadering van x *tot* x_1 *de*

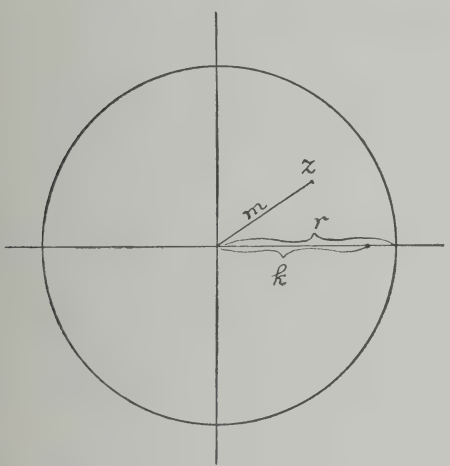


Fig. 3.

lus van elken term der gegeven reeks kleiner blijft dan,
ogstens gelijk wordt aan den overeenkomstigen term eener
ositieve getallen bestaande, convergente reeks P.

merking *in verband met de bekende afleiding van de*
voor $\log(1+x)$:

Uit $$1+x=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

volgt: $$z=n\left\{(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\right\} . \quad . \quad . \quad .$$

Ontwikkelen we het tweede lid van (a) in eene
wat mogelijk is, zoolang de absolute waarde van $\frac{z}{n}$
dan 1 is, dan ontstaat de reeks:

$$1+z+\frac{1\,.\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\,.\,2}z^2+\frac{1\,.\left(1-\frac{1}{n}\right).\left(1-\frac{2}{n}\right.}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Daar dit een machtreeks is, die convergent en d
lijkmatig convergent is en, als $n=\infty$, voor *alle* w
van z, mogen we, om te verkrijgen $\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right.$
termen van (c) door hun limieten voor $n=\infty$ verv
zoodat

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=1+z+\frac{z^2}{1\,.\,2}+\frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots.$$

De functie van z in (a) blijft dus continu als $n=$
deze continuïteit staat in verband met de gelijkmatig
vergentie van machtreeksen.

Op dezelfde wijze kunnen we het tweede lid van
een reeks ontwikkelen als de absolute waarde van x
dan 1 is.

Er komt:

$$x - \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}x^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}x^3. \quad . \quad (d)$$

dezelfde reden als in het vorige geval kunnen we ven:

$$n\left\{(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1\right\} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots\ldots = \log(1+x).$$

in (b) hebben we dus een functie van x, die continu voor $n = \infty$, welke continuïteit weer een gevolg is e gelijkmatige convergentie van (d).

nu de *omkeering* van de functies bij (a) en (b) ook geldt voor $n = \infty$ is een gevolg van deze continuïteit. men in andere gevallen met dergelijke omkeeringen chtig moet zijn, kan het volgende voorbeeld leeren:

$$x = \frac{z}{1.(z+1)} + \frac{z}{(z+1)(2z+1)} + \ldots\ldots$$

$$\frac{z}{\{(n-1)z+1\}\{nz+1\}} = 1 - \frac{1}{nz+1}.$$

e reeks is voor waarden van z in de buurt van 0 *on-atig* convergent. Bij $n = \infty$ is $x = 1$ voor *alle* waar-an z, behalve voor $z = 0$; voor $z = 0$ is $x = 0$.

ren we nu de functie om, dan krijgen we:

$$z = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1-x} - 1\right\}. \quad \text{Bij } n = \infty \text{ is } z$$

lke waarde van x (behalve voor $x = 1$) nul.

Hier is dus de omkeering der functies bij $n = \infty$ meer mogelijk.

Voorbeelden:

1°. Onderzoeken we de reeks:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{z^n - 1}{(1 - z^n)(1 - z^{n+1})}.$$

Men kan den n^{den} term aldus schrijven:

$\frac{1}{z(1-z)} \left\{ \frac{1}{1-z^n} - \frac{1}{1-z^{n+1}} \right\}$, zoodat de som termen is $S_n = \frac{1}{z(1-z)} \left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z^n} \right)$. De hiervan voor $n = \infty$ is:

voor $\quad |z| > 1 \ldots\ldots \frac{1}{z(1-z)^2}$

en voor $\quad |z| < 1 \ldots\ldots \frac{1}{1-z^2}$.

Voor $|z| = 1$ is de reeks blijkbaar divergent.

Voor $|z| > 1$ is $R_n = \frac{1}{z(1-z)} \times \frac{1}{1-z^n}$ en

$|z| < 1$ is $R_n = \frac{z^n - 1}{(1-z)(1-z^n)}$.

Bepalen we nu de waarde van n waarvoor $|R_n| <$ ε een willekeurig klein positief getal voorstelt.

In het eerste geval vinden we achtereenvolgens:

$\frac{1}{-1)(z^n-1)}\Big| < \varepsilon$, dus $\Big|\frac{1}{z^n-1}\Big| < \varepsilon|z(z-1)|$ en

$$|z^n-1| > \frac{1}{\varepsilon|z(z-1)|}$$

ar $|z^n|+1 > |z^n-1|$:

$$|z^n| > -1+\frac{1}{\varepsilon|z(z-1)|}$$

ar $|z^n| = |z|^n$:

$$n > \frac{\log\left\{-1+\frac{1}{\varepsilon|z(z-1)|}\right\}}{\log|z|}.$$

r waarden van $|z|$ weinig meer dan 1 groeit n tot oneindige aan hoe meer $|z|$ tot 1 nadert.

het tweede geval is:

$\frac{z^n-1}{z)(1-z^n)}\Big| < \varepsilon$ en hieruit volgt achtereenvolgens :

$\frac{n-1}{-z^n}\Big| < \varepsilon|1-z|$ dus $\Big|\frac{1-z^n}{z^{n-1}}\Big| > \frac{1}{\varepsilon|1-z|}$ en daar

$^{-1}+|z| > \frac{1-z^n}{z^{n-1}}$ is $\Big|\frac{1}{z}\Big|^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon|1-z|}-|z|$

$$-1 > \frac{\log\left\{\frac{1}{\varepsilon|1-z|}-|z|\right\}}{\log\frac{1}{|z|}}.$$

: waarden van $|z|$ kleiner dan 1 groeit n tot in het ige aan als $|z|$ tot 1 nadert.

Voor waarden van $|z|$ in de buurt van 1 is de
dus *ongelijkmatig* convergent. Hier gaat dit weer g
met *discontinuïteit.*

2°. *Toon aan dat de reeks*

$$2 \sin \frac{1}{3\,z} + 4 \sin \frac{1}{9\,z} + \ldots . \; 2^n \sin \frac{1}{3^n\,z}$$

absoluut convergent is voor alle waarden van z, maar
lijkmatig convergent in de buurt van $z = 0$.

Bij deze reeks is:

$$R_n = 2^{n+1} \sin \frac{1}{3^{n+1}\,z} + \ldots .$$

Voor waarden van z dicht bij nul, bijv. $\frac{1}{3^{p+1}}$,
$R_p = 2^{p+1} \sin 1 +$ enz. Dus om $|R_n| < \varepsilon$ te maken
n veel grooter van p worden genomen, de waarde
groeit dus in het oneindige aan als z tot nul nadert. De
is dus voor waarden van z in de buurt van nul, *on*
matig convergent.

De *absolute* convergentie van de beschouwde reeks
hieruit, dat de absolute waarden der termen ten slotte
zijn dan die der reeks $\frac{2^{p+1}}{3^{p+1}\,z} + \frac{2^{p+2}}{3^{p+2}\,z}$ enz. die
baar convergent is. Voor $z = 0$ heeft de reeks geen

vele gevallen is het direkte onderzoek naar de waarde
, die $|R_n|(x)$ kleiner dan ε maakt, op de wijze zooals
behandelde voorbeelden is geschied, niet gemakkelijk.
j kunnen echter opmerken, dat $R_n(x) = f(x) - s_n(x)$
(x) de som van de n eerste termen en $f(x)$ de limiet
som voor $n = \infty$ is. Is nu eene reeks voor een zeker
d van waarden van x gelijkmatig convergent, dan moet
or dat gebied een waarde m te vinden zijn, waarvoor
$- s_n(x)| < \varepsilon$ *in dat geheele gebied* als $n \geqq m$. Con-
ren we nu de krommen $y = s_n(x)$ en $y = f(x)$ dan
de voorwaarde voor gelijkmatige convergentie in het
undige beeld deze, dat de krommen $s_n(x)$ voor de
lde waarden van n over het *geheele gebied* moeten lig-
sschen de strook gevormd door de krommen $y = f(x) + \varepsilon$
$= f(x) - \varepsilon$.

ongelijkmatige convergentie zullen er plaatsen zijn,
de kromme $s_n(x)$ *buiten* dit gebied treedt. Eene dus-
meetkundige voorstelling kan ons dus de plaatsen
vinden, waar de ongelijkmatige convergentie optreedt.
nen we als voorbeeld $s_n(x) = (2\,n\,x^2 - 1)\,e^{-n\,x^2}$.
$) = 0$ voor alle waarden van x behalve voor $x = 0$.
$= -1$.

deze *discontinuïteit* mogen we besluiten tot het be-
van *ongelijkmatige convergentie*, daar bij *gelijkmatige*
entie de *continuïteit* is bewezen.

Teekenen we nu de krommen $y = s_n(x)$ (fig. 4), blijkt dat deze allen een *top* hebben, waarvan de ord is $2 \cdot e^{-\frac{3}{2}}$ in het punt $x = \sqrt{\frac{3}{2n}}$. (We beschouwen

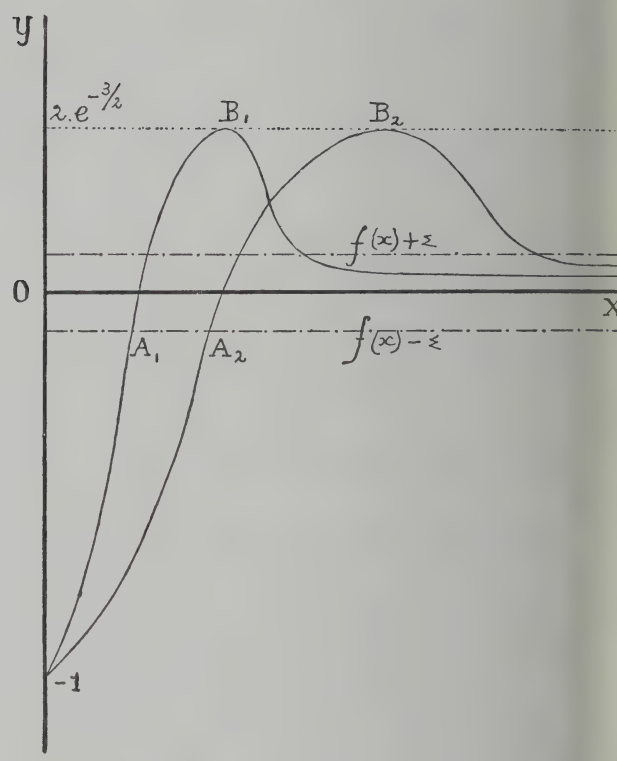


Fig. 4.

voudigheidshalve slechts positieve waarden van x, da negatieve hetzelfde resultaat geven). Deze toppen verpla zich bij toenemende waarden van n naar de y-as, waaru

ıgelijkmatige convergentie in de buurt van $x = 0$ blijkt.

e abscissen van B_1 en B_2 zijn het $\sqrt{3}$ vond van die A_1 en A_2 (de snijpunten met de x-as). Ter weerszijden le toppen bevinden zich buigpunten wier abscissen zijn:

$$\frac{1}{n} \pm \frac{1}{2n}\sqrt{6}.$$

ın kan zich in O een loodlijn denken op het vlak van ning en deze als n-as beschouwen. De verschillende men $y = s_n(x)$ kunnen dan als projecties van doorsneden en beschouwd van het oppervlak $y = s_n(x)$ met vlak- evenwijdig aan het xy-vlak.

krommen in fig. 4 zijn nagenoeg de voorstellingen $y = s_2(x)$ en $y = s_8(x)$.

anneer men bij gegeven ε het gebied der waarden van ar den kant van nul uitbreidt, neemt het getal m toe vel *onbepaald* bij nadering tot nul. Hier hebben we veer het kenmerk van *ongelijkmatige convergentie.*]

n ander voorbeeld zij: $s_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1 + n^3 x^2}$.

erbij is $f(x) = 0$ voor alle waarden van x. De kromme $_n(x)$ vertoont een top voor $x = \sqrt{\dfrac{1}{2n^5}}$ waarvan de or- t is: $\dfrac{2n^2}{(1+2n^2)\sqrt{2n}}$. Deze toppen naderen voor groote len van n tot de x-as en zullen dus binnen de strook

tusschen $y = f(x) + \varepsilon$ en $y = f(x) - \varepsilon$ kunnen w
gebracht.

Wij hebben hier dus *gelijkmatige convergentie.*

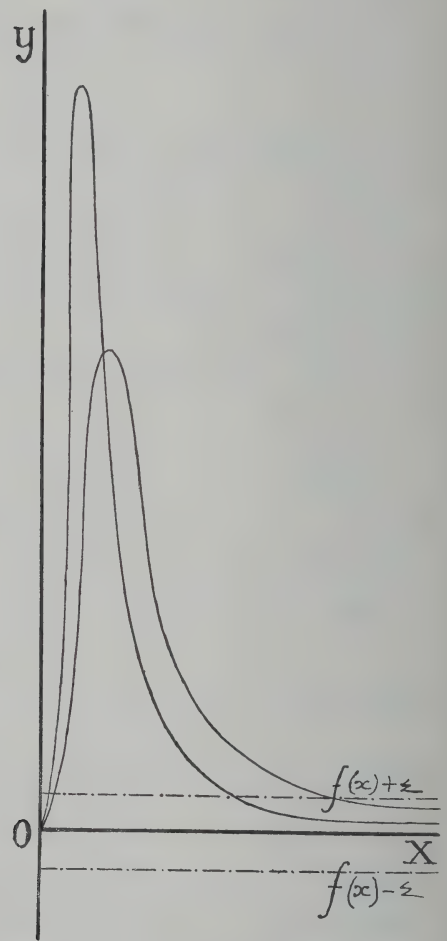


Fig. 5.

s derde voorbeeld nemen we $s_n(x) = \frac{n^3 x^2}{1 + n^6 x^6}$.

er is $f(x) = 0$ voor alle waarden van x.

; kromme $y = s_n(x)$ vertoont een top bij $x = \frac{1}{n}\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$

s ordinaat is: $^2/_3\, n \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Deze top verplaatst zich bij mende waarde van n naar de y-as en neemt daarbij s in hoogte toe (fig. 5). Hier is dus *ongelijkmatige rgentie.*

$s_n(x) = n x e^{-n x^2}$ vindt men een top bij $x = \sqrt{\frac{1}{2n}}$ een ordinaat: $\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}$. Dus hier *ongelijkmatige* con- ntie in de buurt van $x = 0$.

$x) = 0$ voor alle waarden van x.

$s_n(x) = x e^{-n^2 x^2}$ vindt men $f(x) = 0$ voor alle waar- van x en verder *gelijkmatige convergentie.*

II.

gelijkmatige convergentie van een reeks is van groote enis bij de volgende 4 vragen:

Of men dezelfde waarde krijgt bij het integreeren der term na term en de som te nemen van deze inte-, als bij het integreeren van de limiet der som

van de gegeven reeks. Deze vraag drukt men kortweg

„of het geoorloofd is een reeks term na term te integree

Met een dergelijke bekorting de volgende vragen:

b. Of een reeks term na term gedifferentieerd mag wo

c. Of men bij een dubbele integraal de volgorde der gratie mag omkeeren, als een of beide integratieinterv oneindig zijn.

d. Of men mag differentieeren onder het integraalte als het intergratieinterval oneindig is.

a. *Integreeren van reeksen term na term.*

Stelling IV.

Als de reeks

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x_2) + \ldots.$$

waarin $u_n(x)$ *continue functies van* x *voorstellen, gelijk convergent is voor alle waarden van* x *tusschen de gre*

$$x = a \quad \text{en} \quad x = b$$

dan zal, als

$x_2 - x_1$ *een eindig interval is tusschen* a *en* b, *de*

$$\int_{x_1}^{x_2} u_1(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} u_2(x)\,dx + \ldots.$$

1e convergent zijn, en

2e convergeeren tot

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

wijs:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots\ u_n(x) + R_n(x)$$

is

$$(A)\ \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} u_1(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} u_2(x)\,dx + \ldots\ldots$$
$$\int_{x_1}^{x_2} u_n(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} R_n(x)\,dx$$

rond van de gelijkmatige convergentie der gegeven zal voor alle waarden van x tusschen x_1 en x_2 de ute waarde van $R_n(x)$ kleiner zijn dan ε, bij een *eindige* de van n. Dus

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} R_n(x)\,dx\right|$$
$$\int_{x_1}^{x_2} |R_n(x)|\,|\,dx\,| < \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon\,|\,dx\,|$$
$$< \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} |\,dx\,|$$

aar ε willekeurig klein genomen kan worden, en vol- onderstelling $\int_{x_1}^{x_2} |\,dx\,|$ *eindig* is, zal derhalve de vol- e waarde der laatste term van het tweede lid van (A) klein gemaakt kunnen worden als men wil. Daaruit dat, aangezien n eindig is, het eerste lid van (A) de is van

$$\int_{x_1}^{x_2} u_1(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} u_2(x)\,dx + \ldots\ldots\ \int_{x_1}^{x_2} u_n(x)\,dx$$

volgens den regel dat de limiet eener som gelijk is a
som van de limieten der termen, als het aantal terme
som *eindig* is; zoodat dus de reeks der integralen co
gent is en tot limiet heeft $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$.

Voorbeelden van integratie van reeksen term na term

1°. Voor $x^2 < 1$ is:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 +$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots.$$

Daar deze reeks als machtreeks gelijkmatig conve
is, mag ze term na term geïntegreerd worden.

Integratie geeft:

$$bg\ \sin.\ x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 +$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}x^7 + \ldots.$$

Ook deze gelijkheid geldt dus slechts voor $x^2 < 1$.

2°. Uit $\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2.!} + \frac{(2x)^4}{4.!} - \frac{(2x)^6}{6.!} + \ldots$

volgt: $\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2.!} + \frac{2^3x^4}{4.!} - \frac{2^5x^6}{6.!} + \ldots.$

ellen we nu $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + b_6 x^6 + \ldots.$

vinden we voor de berekening der coëfficienten dezer

s:

$$1,\ b_4 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2^3}{4.!} & -1 \end{vmatrix},\ b_6 = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{2^3}{4.!} & -1 & 1 \\ -\frac{2^5}{6.!} & \frac{2^3}{4.!} & -1 \end{vmatrix}$$

$$b_8 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2^3}{4.!} & -1 & 1 & 0 \\ -\frac{2^5}{6.!} & \frac{2^3}{4.!} & -1 & 1 \\ \frac{2^7}{8.!} & -\frac{2^5}{6.!} & \frac{2^3}{4.!} & -1 \end{vmatrix}$$

enz.

oor nl. te bedenken, dat de reeksen voor $\cos^2 x$ en $\frac{1}{\cos^2 x}$ vermenigvuldiging 1 moeten geven, vindt men betrek-en tusschen de coëfficienten, waarvan bovenstaande den de oplossingen zijn.

tegratie geeft:

$$tg\, x = \int_0^x \frac{d\,x}{\cos^2 x} = x + t_3 x^3 + t_5 x^5 + t_7 x^7 + \ldots.$$

in $$t_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} b_{2n}.$$

Men vindt: $t_3 = \frac{1}{3}$ $t_5 = \frac{2}{15}$ $t_7 = \frac{17}{315}$ enz.

Verdere integratie geeft nog:

$$\log \cos x = \int_0^x tg\, x\, dx = -$$

$$= -\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}t_3 x^4 + \frac{1}{6}t_5 x^6 + \ldots\right).$$

Al deze ontwikkelingen gelden voor *alle* waarden v
omdat de reeks voor $\cos 2x$ voor *alle* waarden van
lijkmatig convergent is.

3°. $$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots.$$

als $$z^2 < 1.$$

Integratie geeft:

$$bg\, tg\, z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots.$$

4°. $$\frac{1}{1+x} = -x + x^2 - x^3 \ldots.$$

voor $$|x| < 1.$$

Integratie geeft:

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots.$$

. *Als een reeks*

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin(2\nu+1)\, z\, \pi$$

urin $c_0 = 0$ *en* $\lim_{\nu=\infty} \frac{c_\nu}{\nu} = 0$)

n interval gelijkmatig convergeert, dan is

$$g(z)\, \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

geleide van de reeks

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \sin 2\nu z\, \pi.$$

wijs:

reeks

$$\sum_{\nu=0}^{\nu} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin(2\nu+1)\, \pi z$$

ook aldus worden geschreven:

$$c_\nu \{\sin(2\nu+1)\pi z - \sin(2\nu-1)\pi z\} - c_{\nu+1} \sin(2\nu+1)\pi z =$$

$$= 2 c_\nu \sin \pi z \cos 2\nu \pi z - c_{\nu+1} \sin(2\nu+2)\, \pi z,$$

Vermenigvuldigen we dit met $\frac{\pi\, dz}{\sin \pi z}$ en integreeren, krijgen we:

$$\frac{c_\nu}{\nu} \sin 2\nu \pi z - \int^{z} \pi c_{\nu+1} (\sin 2\nu \pi z \cot \pi z + \cos 2\nu \pi z)\, dz.$$

Wegens de voorwaarde $\lim_{\nu=\infty} \frac{c_\nu}{\nu} = 0$ en het optreden van

den factor $\frac{c_\nu + 1}{2\,\nu}$ bij integratie van den tweeden te
deze term voor $\nu = \infty$ tot nul naderen als de integra
het punt $z = 0$ (of $k\,\pi$) niet bevat.

Nemen we nu $g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin(2\,\nu +$

dan hebben we bewezen, dat $\int^{z} g(z)\,\frac{\pi}{\pi \sin z}\,dz =$

$= C + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \sin 2\,\nu\,\pi\,z = C + f(z)$ (C is integra
stante)

dus $$g(z)\,\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{d\,f(z)}{d\,z}.$$

6°. De reeks $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \ldots.$

is gelijkmatig convergent voor $0 \leqq x$, daar de termen k
zijn dan die der convergente reeks $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} +$.

De reeks kan dus term na term geïntegreerd w
maar neemt men één der grenzen $+\infty$ dan ontsta
divergente reeks. Hieruit blijkt dus de noodzakelijkhe
voorwaarde van de *eindigheid* van het integratiegebie

7°. Daar $s_n(x) = n\,x\,e^{-n\,x^2}$ bij $x = 0$ niet gelijk
convergent is (zie pag. 25) behoeft het ons niet te v
deren, dat

$$\int_0^1 \left[\lim_{n=\infty} s_n(x)\right] dx = 0 \qquad \text{en} \lim_{n=\infty} \int_0^1 s_n(x)\,dx =$$

het t. a. p. behandelde blijkt, dat de laatste integraal ppervlak voorstelt tusschen de x-as en de kromme $s_n(x)$ en top, die naar het oneindige loopt voor $n = \infty$.

b. *Differentieeren van reeksen term na term.*

lling V.

de reeks

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots \quad \text{(A)}$$

gent is (gelijk-, of ongelijkmatig) waarbij

$$u_1(x), \qquad u_2(x) \quad \text{enz.}$$

ue functies zijn tusschen de grenzen $x = a$ *en* $x = b$,

$$\frac{d}{dx} u_1(x), \qquad \frac{d}{dx} u_2(x) \quad \text{enz.}$$

en bepaalde limieten zijn, en als de reeks

$$\frac{d}{dx} u_1(x) + \frac{d}{dx} u_2(x) + \ldots.$$

kmatig convergent is tusschen de grenzen en $x = b$, *zoodat men zetten kan*

$$\frac{d}{dx} u_1(x) + \frac{d}{dx} u_2(x) + \ldots. = \mathrm{F}(x) \quad \text{(B)}$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

ijs. Op grond van de gelijkmatige convergentie van volgens stelling IV

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} u_1(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} u_2(x)\,dx + \ldots. = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{F}(x$$

of

$$u_1(x_2) - u_1(x_1) + u_2(x_2) - u_1(x_1) \ldots. = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{F}(x)\,d$$

Daar de reeks (A) convergent is, zullen ook de

$$u_1(x_2) + u_2(x_2) + \ldots. = \mathrm{S}(x_2)$$

en $$u_1(x_1) + u_2(x_1) + \ldots. = \mathrm{S}(x_1)$$

het zijn, maar dan is ook de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ u_n(x_2) - u_n(x_1) \}$$

convergent, en heeft tot limiet

$$\mathrm{S}(x_2) - \mathrm{S}(x_1)$$

Men kan dus voor (C) zetten

$$[u_1(x_2) + u_2(x_2) + \ldots.] - [u_1(x_1) + u_2(x_1) + \ldots.] = \int_{x_1}^{x}$$

of $$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{F}(x)\,dx$$

waaruit volgt

$$\frac{d}{dx} f(x) = \mathrm{F}(x).$$

Voorbeelden van het differentieeren van gelijkmatig gente reeksen:

$1^0.$ $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots.$$

geldt voor $$-1 < x \leqq +1.$$

ferentiatie van het tweede lid geeft:

$$1 - x + x^2 - x^3 \ldots .$$

ar deze reeks slechts voor $-1 < x < +1$ *gelijkmatig* rgent is, geldt ook alleen voor *die* waarden van x (en voor $x = 1$), dat het differentiaal quotient van het e lid gelijk is aan dat van het 1ste lid, dus dat

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \ldots .$$

ekend resultaat.

Daar $1 + e^{ia} = 1 + \cos a + i \sin a =$

$$\cos\frac{1}{2}a\left(\cos\frac{1}{2}a + i\sin\frac{1}{2}a\right) = 2\cos\frac{1}{2}a \times e^{\frac{1}{2}ia},$$

ij blijkbaar $\cos\frac{1}{2}a$ *pos.* is en dus de boog $^1/_2\,a$ met leinste absolute waarde, tusschen $+\frac{1}{2}\pi$ en $-\frac{1}{2}\pi$ n is, is

$$\log(1 + e^{ia}) = \log\left(2\cos\frac{1}{2}a\right) + i\left(\frac{1}{2}a + 2k\pi\right).$$

hebben evenwel ook:

$$+ e^{ia}) = e^{ia} - \frac{1}{2}e^{2ia} + \frac{1}{3}e^{3ia} \ldots . =$$

$$\left(\cos a - \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{1}{3}\cos 3a \ldots .\right) +$$

$$i\left(\sin a - \frac{1}{2}\sin 2a + \frac{1}{3}\sin 3a \ldots .\right),$$ zoodat, door ge-

lling van de reëele en imaginaire gedeelten, er komt:

$$\log\left(2\cos\frac{1}{2}a\right) = \cos a - \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{1}{3}\cos 3a \ldots$$

en $$\frac{1}{2}a = \sin a - \frac{1}{2}\sin 2a + \frac{1}{3}\sin 3a \ldots$$

In (2) moeten we in het eerste lid blijkbaar die voor $^1/_2\,a$ nemen, die de kleinste absolute waarde daar alleen in dit geval beide leden van $\sin a = 0$ o stemmen.

Differentiatie van de tweede leden van (1) en (2 de reeksen:

$$-\sin a + \sin 2a - \sin 3a \ldots.$$

en $$\cos a - \cos 2a + \cos 3a \ldots.$$

geen van beide zijn gelijkmatig convergent voor willek waarden van a, het is dus niet geoorloofd hun som te stellen aan het differentiaalquotient van het eerste

Men zou dan deze *foutieve* uitkomsten verkrijgen:

$$-\frac{1}{2}\,tg\,\frac{1}{2}a = -\sin a + \sin 2a - \sin 3a \ldots$$

en $$\frac{1}{2} = \cos a - \cos 2a + \cos 3a \ldots.$$

[Vervangt men in (2) a door $\pi - a$, dan verkrijgt

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}a = \sin a + \frac{1}{2}\sin a + \frac{1}{3}\sin 3a \ldots.$$

deze reeks vindt men in „Excercices methodiques de differentiel" par M. Ed. Brahy, p. 59, Gauthiers V 1905, en daaruit wordt *foutief* afgeleid:

$$-\frac{1}{2} = \cos a + \cos 2a + \cos 3a \ldots .].$$

Uit $\log \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = 2\left(e^{i\theta} + \frac{1}{3}e^{3i\theta} + \ldots .\right)$

, daar $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i \cot \frac{1}{2}\theta = \cot \frac{1}{2}\theta \,.\, e^{i\frac{1}{2}\pi}$:

$$_2 \log \cot \frac{1}{2}\theta = \cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta \ldots .$$

$$\frac{\pi}{4} = \sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta \ldots .$$

ook $\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + \frac{1}{3}\sin 3\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) +$

$\sin 5\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \ldots . \quad = \cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta \ldots .$

n dezelfde reden als in het vorige voorbeeld mogen de eiden van beide leden dezer laatste gelijkheden *niet* elkaar gelijk worden gesteld.

Met behulp van het op pag. 25 behandelde overtuige zich dat de reeks waarbij $s_n(x) = x \,.\, e^{-n^2 x^2}$ niet term rm kan worden *gedifferentieerd*, wel *geïntegreerd*.

Bij een dubbele integraal blijft de waarde onveranderd, ien de volgorde der integratie omkeert, indien de inteintervallen *eindig* zijn. Wanneer echter een of meer rallen oneindig zijn, geldt dit niet meer in alle gevallen.

het algemeen mag dus *niet* $\int_{x_0}^{x} dx \int_{0}^{\infty} f(xy) \,.\, dy$ gelijk

aan $\int_0^{\infty} dy \int_{x_0}^{x} f(x\,y)\,dx$ gesteld worden zonder nad
derzoek.

We zullen aantoonen, dat de voorwaarde, waaronde
gelijkheid geldt, kan neerkomen op de gelijkmatige c
gentie van een reeks.

We kunnen nl. $\int_0^{\infty} f(x\,y)\,dy$ aldus schrijven:

$$\operatorname{Lim}_{n=\infty}\left[\int_0^{1} f(x\,y.)\,dy + \int_1^{2} f(x\,y.)\,dy + \ldots \int_{n-1}^{n} f(x\,y\right.$$

Is nu deze reeks *gelijkmatig convergent*, dan kunn
haar term na term integreeren en bij elken term de
orde der integratie, wegens de eindigheid der gr
omkeeren.

Zoodat bij *gelijkmatige convergentie* geldt:

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_0^{\infty} f(x\,y)\,dy = \operatorname{Lim}_{n=\infty}\left[\int_0^{1} dy \int_{x_0}^{x} f(x\,y)\,dx + \right.$$

$$+ \int_1^{2} dy \int_{x_0}^{x} f(x\,y)\,dx + \ldots \int_{n-1}^{n} dy \int_{x_0}^{x} f(x\,y)$$

$$= \int_0^{\infty} dy \int_{x_0}^{x} f(x\,y)\,dx \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Nemen we als voorbeeld $f(x\,y) = \frac{d}{dy}\frac{3\,x^2\,y^3}{1+x^6\,y^6}$

$$\int_p^{p+1} f(x\,y)\,dy = \frac{3\,x^2\,(p+1)^3}{1+x^6\,(p+1)^6} - \frac{3\,x^2\,p^3}{1+x^6\,p^6}.$$

Voor alle intervallen binnen dat van de positieve

van x is de reeks van integralen gelijkmatig conver-
In de buurt van $x = 0$ hebben we echter ongelijk-
ge convergentie (zie voorbeeld op pag. 25). We kun-
dus verwachten dat

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{0}^{\infty} f(xy)\,dy = \int_{0}^{\infty} dy \int_{x_0}^{x} f(xy)\,dx,$$

$_0$ en x beide pos. of beide neg. zijn.
t blijkt bij uitwerking juist te zijn, daar beider waarden
n *nul* zijn. Liggen echter x_0 en x ter weerszijden van
dan is de eerste integraal *nul* en de tweede π.
$x_0 = 0$ en $x > 0$ dan is de tweede integraal $\frac{1}{2}\pi$, is
0 en $x < 0$ dan is ze $-\frac{\pi}{2}$.

en bedenke hierbij dat $\int \frac{3x^2y^3}{1+x^6y^6}\,dx = bgtg\,x^3y^3 + f(y)$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{3x^2y^3}{1+x^6y^6}\,dx = bgtg\,x^3y^3 - bgtg\,x_0{}^3y^3 \text{ enz.}$$

at $\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dy}\,\Phi(x\,y.)\,dx = \frac{d}{dy}\int_{x_0}^{x} \Phi(x\,y)\,dx$, als het in-
l $x_0 - x$ *eindig* is.
t de vroeger (pag. 25) gevonden ongelijkmatige con-
ntie van $s_n(x) = n\,x\,e^{-nx^2}$ kan men verklaren dat
$\lim_{n=\infty} s_n(x)\,]\,dx = 0$ en $\lim_{n=\infty}[\int_0^1 s_n(x)\,dx\,] = \frac{1}{2}$, dus
eze twee integralen *niet* gelijk zijn.

d. Ook de voorwaarde, waaronder

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(x\,y)\,dy = \int_0^\infty \frac{d\,f(x\,y)}{dx}\,dy$$

of kortheidshalve, waaronder men onder het integraa
mag differentiëeren, is *de gelijkmatige convergentie*
reeks:

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x\,y)\,dy + \frac{d}{dx}\int_1^2 f(x\,y)\,dy + \ldots\ \frac{d}{dx}\int_{n-1}^n f(x\right.$$

Immers als deze reeks gelijkmatig convergent is,
som gelijk aan $\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(x\,y)\,dy$ zooals vroeger is be

Daar nu echter bij elk der termen der reeks de inte
intervallen eindig zijn, mag men hare som aldus sch

$$\int_0^\infty \frac{d\,f(x\,y)}{dx}\,dy.$$

Als voorbeeld nemen we: $\frac{d}{dx}\int_0^\infty x^3\,e^{-x^2y}\,dy.$

Hier is $\int_0^\infty x^3\,e^{-x^2y}\,dy = x$ voor alle waarden va

dus $$\frac{d}{dx}\int_0^\infty x^3 e^{-x^2y}\,dy = 1.$$

Nu is $\int_0^\infty \frac{d}{dx}(x^3\,e^{-x^2y})\,dy = \int_0^\infty (3x^2 - 2x^4y)e^{-x^2y}dy =$

als x niet *nul* is.

Men bedenke hierbij, dat $\int x^3 e^{-x^2y}\,dy = -x\,e^{-x^2y}$

$(3x^2 - 2x^4 y)\, e^{-x^2 y}\, dy = (2x^2 y - 1)\, e^{-x^2 y} + f(x)$.

schouwen we nu de reeks:

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 x^3 e^{-x^2 y}\, dy + \frac{d}{dx}\int_1^2 x^3 e^{-x^2 y}\, dy + \ldots.$$

$- e^{-n x^2} + 2 n x^2 e^{-n x^2}$. Uit voorbeeld op pag. 21 is ge-
n, dat deze niet gelijkmatig convergent is voor waarden
in de buurt van *nul*. Sluiten we dit gebied dus uit,
noet de verwisseling van differentiatie en integratie
loofd zijn, hetgeen ook blijkt bij berekening. Is echter
dan wordt de tweede integraal van (4) *nul* en geldt
lijkheid niet meer.

n overtuige zich nog van:

$$s_n(x) = x\, e^{-n^2 x^2},\quad f(x) = 0,\quad \frac{d}{dx} s_n(x)\Big|_{x=0} = 1,$$

$f'(0) = 0$ terwijl $\lim_{n=\infty} \frac{d}{dx} s_n(x)\Big|_{x=0} = 1$

deze reeks *niet* term na term kan *gedifferentieerd*
n, wel *geïntegreerd*.

lezer overtuige zich van de overeenstemming van dit
at met de behandelde stellingen. Hij constateere nl.
$(x) = x\, e^{-n^2 x^2}$ *gelijkmatig* convergent is, daarentegen
$x)$ *ongelijkmatig* convergent.

RECAPITULATIE.

Oneindig voortloopende convergente reeksen kunn
aanzien van sommige eigenschappen als reeksen die
eindig aantal termen bestaan behandeld worden.

Herinneren wij er aan dat zulks het geval is m
absoluut convergente reeks, in zoover dat men de
schikking der termen veranderen, en twee reeksen ond
vermenigvuldigen mag op de wijze zooals men twee
termen vermenigvuldigt. Bij *gelijkmatig convergente* r
geldt die overeenstemming ten aanzien van andere
schappen. Uit het voorgaande is ons nl. gebleken, d
gelijkmatig convergente reeks van continue functies eene
anderlijke grootheid x zelf een continue functie v
grootheid is, en dat de limiet van de som harer te
als x nadert tot een waarde x', gelijk is aan de so
de limieten der termen (zie LOBATTO § 233). Op de
genoemde eigenschappen berusten alle in de vorige
zijden behandelde stellingen.

Verder willen wij nog opmerken dat *continuiteit*
functie een gevolg is van *gelijkmatige convergentie*, n
omgekeerde, d. i. dat men uit *continuiteit* tot *gelijk*
convergentie kan besluiten. Wel mag men uit *disconti*
ongelijkmatige convergentie afleiden, maar *niet omgekee*
ongelijkmatige convergentie discontinuiteit.

ERRATUM.

Op blz. 25 *staat*: Bij $s_n(x) = x\, e^{-n^2 x^3}$;

lees: Bij $s_n(x) = x\, e^{-n^2 x^2}$.

SUR

LE CALCUL NUMÉRIQUE

DE

LA SÉRIE $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 s^2)^{\frac{q}{2}}}$

PAR

W. KAPTEYN

En effet, en posant $q = 2v + 2$, on a, d'après le calcul des résidus,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+1}} = -\frac{1}{2c^{2v+2}} - \frac{1}{2}\mathcal{E}\frac{\pi \cot \pi z}{((c^2 + \pi^2 z^2)^{v+1}))}$$

$$= -\frac{1}{2c^{2v+2}} - \frac{1}{\pi^{2v+1} v!}\frac{d^v}{dz^v}\left[\frac{\cot \pi z}{\left(z + \frac{ic}{\pi}\right)^{v+1}}\right]_{z=\frac{ic}{\pi}}.$$

Or, d'après la formule de Leibnitz,

$$\frac{d^v}{dz^v}\left[\frac{\cot \pi z}{(z+a)^{v+1}}\right] = (-1)^v \sum_{s=0}^{v} (-1)^s \frac{(2v-s)!}{s!(v-s)!} \frac{\frac{d^s}{dz^s}\cot \pi z}{(z+a)^{2v+1-s}},$$

par suite

$$\frac{d^v}{dz^v}\left[\frac{\cot \pi z}{(z+a)^{v+1}}\right]_{z=a=\frac{ic}{\pi}}$$

$$= -i\frac{\pi^{2v+1}}{2^{2v+1}c^{2v+1}} \sum_{s=0}^{v} (-i)^s \frac{(2v-s)!}{s!(v-s)!}\left(\frac{2c}{\pi}\right)^s \frac{d^s}{dz^s}[\cot \pi z]_{z=\frac{ic}{\pi}}$$

et

$$(1). \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+1}} = -\frac{1}{2c^{2v+2}} + \frac{(2v)!}{2^{2v+1}(v!)^2 c^{2v+1}} \frac{e^{2c}+1}{e^{2c}-1}$$

$$+ i\frac{1}{2^{2v+1} v! c^{2v+1}} \sum_{s=1}^{v} (-i)^s \frac{(v-s)!}{s!(v-s)!}\left(\frac{2c}{\pi}\right)^s \frac{d^s}{dz^s}[\cot \pi z]_{z=\frac{ic}{\pi}}.$$

3. Quand $q = 2v + 1$ nous introduirons d'abord l'hypothèse $c < \pi$.

Dans ce cas, la formule du binôme nous permet d'écrire

$$\frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\pi^{2v+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(v + m + \frac{1}{2})}{m!\Gamma(v+\frac{1}{2})} \frac{c^{2m}}{\pi^{2m}} \frac{1}{s^{2v+2m+1}},$$

d'où, en posant

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^p} = S_p$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\pi^{2v+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(v + m + \frac{1}{2})}{m!\Gamma(v+\frac{1}{2})} \frac{c^{2m}}{\pi^{2m}} S_{2v+2m+1}$$

Si l'on ajoute à cette équation la relation évidente

$$0 = \frac{1}{(c^2 + \pi^2)^{v+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\pi^{2v+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(v + m + \frac{1}{2})}{m!\,\Gamma(v + \frac{1}{2})} \frac{c^{2m}}{\pi^{2m}},$$

n obtient

$$\text{)} \ldots \left\{ \begin{aligned} &\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(c^2 + \pi^2)^{v+\frac{1}{2}}} \\ &+ \frac{1}{\pi^{2v+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(v + m + \frac{1}{2})}{m!\,\Gamma(v + \frac{1}{2})} \frac{c^{2m}}{\pi^{2m}} (S_{2v+2m+1} - 1). \end{aligned} \right.$$

Cette formule convient très bien pour le calcul de la série roposée, parce qu'on possède pour les quantités S_p (*) des tables ui montrent la convergence très rapide de la série.

Dans la supposition de $c < \pi$, on a :

$$\frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(v + \frac{1}{2}) 2^v c^v} \int_0^{\infty} J^v(ct) e^{-\pi s t} t^v \, dt,$$

ı $J^v(ct)$ représente la fonction cylindrique de première espèce : rang v (**). On voit donc que

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(v + \frac{1}{2}) 2^v c^v} \int_0^{\infty} \frac{J^v(ct)}{e^{\pi t} - 1} t^v \, dt$$

où résulte que notre série est en rapport intime avec les fonc-ons cylindriques.

4. Il nous reste à étudier la série proposée, q étant $2v + 1$, and c est quelconque par rapport à π. Avant d'aborder ce rnier cas, il importe d'étudier une intégrale définie qui nous ra utile plus loin.

*) Legendre, *Exercices de calcul intégral*, t. III, p. 65; Stieltjes, *Acta th.*, t. X, p. 299.

**) Nielsen, *Handbuch der Cylinderfunctionen*, p. 106.

Posons

$$(3). \quad \ldots \quad \mathfrak{I}^v(b) = \int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-1} dt$$

où v désigne un nombre entier et b une quantité arbitraire ma positive. Cette intégrale se rencontre déjà dans une étude Kummer (*). Il trouve

$$\int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{\mu-1} dt = \Gamma(\mu)\psi(1-\mu, b^2) + \Gamma(-\mu)b^{2\mu}\psi(1+\mu, b^2)$$

où

$$\psi(q, x) = 1 + \frac{x}{q} + \frac{x^2}{2!q(q+1)} + \frac{x^3}{3!q(q+1)(q+2)} + \ldots$$

μ étant un nombre quelconque mais non entier.

Pour évaluer l'intégrale dans la supposition v entier, pourrait substituer $\mu = v - \varepsilon$ dans la formule de Kummer chercher la limite pour $\varepsilon = 0$. Mais il vaut mieux suivre u autre méthode.

Si l'on différentie l'équation (3) par rapport à b, on obtie

$$-\frac{1}{2b}\frac{d\mathfrak{I}^v}{db} = \int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-2} dt$$

$$-\frac{1}{2b}\frac{d^2\mathfrak{I}^v}{db^2} + \frac{1}{2b^2}\frac{d\mathfrak{I}^v}{db} = -2b\int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-3} dt.$$

Or, en intégrant entre les limites 0 et ∞ les deux membs de l'identité

$$t^{v-1} d\left(e^{-t-\frac{b^2}{t}}\right) = -e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-1} dt + b^2 e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-3} dt,$$

on voit que

$$-(v-1)\int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-2} dt = -\int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-1} dt + b^2 \int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-3},$$

(*) *Journal de Crelle*, t. XVII.

ar conséquent, on a

$$\frac{v-1}{2b}\frac{d\mathfrak{H}^v}{db} = -\mathfrak{H}^v + b^2\left[\frac{1}{4b^2}\frac{d^2\mathfrak{H}^v}{db^2} - \frac{1}{4b^3}\frac{d\mathfrak{H}^v}{db}\right]$$

u

$$\frac{d^2\mathfrak{H}^v}{db^2} - \frac{2v-1}{b}\frac{d\mathfrak{H}^v}{db} - 4\mathfrak{H}^v = 0. \quad (4)$$

L'intégration de cette équation différentielle se déduit aisément e celle de Bessel

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)w = 0$$

n changeant dans celle-ci x en $2ib$ et w en $\frac{\mathfrak{H}^v}{b^v}$.

L'intégrale générale de l'équation (4) prend donc la forme

$$\mathfrak{H}^v(b) = b^v[\mathrm{AJ}^v(2ib) + \mathrm{BY}^v(2ib)]$$

^{v} et Y^v représentant les fonctions cylindriques de première t de seconde espèce.

Pour déterminer convenablement les constantes A et B, nous emarquons que l'intégrale (3) remplit les deux conditions suiantes :

$$\mathfrak{H}^v(0) = (v-1)! \qquad \mathfrak{H}^v(\infty) = 0.$$

Or, on sait que

pour $b = 0$ $\quad b^v\mathrm{J}^v(2ib) \equiv 0$

id. $\quad b^v\mathrm{Y}^v(2ib) \equiv -(-i)^v\frac{(v-1)!}{\pi}$

t

pour $b = \infty$ $\quad b^v\mathrm{J}^v(2ib) \equiv \frac{b^v}{2\sqrt{\pi b}}e^{2b+\frac{vi\pi}{2}}$

id. $\quad b^v\mathrm{Y}^v(2ib) \equiv \frac{b^v}{2\sqrt{\pi b}}e^{2b+\frac{(v+1)i\pi}{2}}$

'où résulte

$$\pi = -(-i)^v\mathrm{B}$$
$$0 = \mathrm{A} + \mathrm{B}i$$

t

$$\mathfrak{H}^v(b) = \pi i^{v+1}b^v[\mathrm{J}^v(2ib) + i\,\mathrm{Y}^v(2ib)]. \quad (5)$$

La combinaison $J^v + iY^v$ que l'on rencontre ici est précisément la fonction que M. Nielsen (*) appelle une fonction cylindrique de troisième espèce et qu'il désigne par la notation H_1^v q rappelle le nom de Hankel.

Avec cette notation, l'intégrale cherchée prend la forme

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathfrak{C}^v(b) = \pi i^{v+1} b^v H_1^v(2ib).$$

Une troisième forme s'obtient si l'on développe les fonctio J^v et Y^v. En effet,

$$\pi Y^v(2ib) = 2J^v(2ib)\left(\lg b + \frac{i\pi}{2}\right) - (ib)^v \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b^{2s}}{s!(v+s)!}\left[\psi(s+1)+\psi(s+v+1)\right.$$

$$- (-i)^n \frac{1}{b^n} \sum_{s=0}^{v-1} (-1)^s \frac{(v-s-1)!}{s!} b^{2s}$$

et

$$2i^v b^v J^v(2ib) = (-1)^v 2b^{2v} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b^{2s}}{s!(v+s)!},$$

par suite,

$$(7) \begin{cases} \mathfrak{C}^v(b) = \sum_{s=0}^{v-1} (-1)^s \frac{(v-s-1)!}{s!} b^{2s} \\ + (-1)^{v+1} b^{2v} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b^{2s}}{s!(v+s)!}\left[2\lg b - \psi(s+1) - \psi(s+v+1)\right]. \end{cases}$$

5. Revenons maintenant à la sommation de la série

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}}.$$

D'après une formule connue, on a

$$\frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{2^{v+1}}{1.3 \ldots (2v-1)\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-c^2y^2 - \pi^2 s^2 y^2} y^{2v} dy,$$

d'où

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{2^{v+1}}{1.3 \ldots (2v-1)\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-c^2y^2} y^{2v} dy \sum_{s=1}^{n} e^{-\pi^2 s^2 y^2}$$

n étant un nombre entier quelconque.

(*) *Loc. cit.*, p. 16.

Pour évaluer la somme sous le signe d'intégration, j'écris

$$e^{-\pi^2 s^2 y^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2\pi s y x)\, dx$$

et

$$\sum_{s=1}^{n} e^{-\pi^2 s^2 y^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \sum_{s=1}^{n} \cos(2\pi s y x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\pi} y} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\pi^2 y^2}} \sum_{s=1}^{n} \cos(2sz)\, dz$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi} y} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\pi^2 y^2}} \left(\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} - 1 \right) dz$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\sqrt{\pi} y} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\pi^2 y^2}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz.$$

En introduisant cette valeur, on obtient

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2c^{2v+1}} + \frac{2^{v+1}}{1.3 \ldots (2v-1)\pi^2}$$

$$\times \int_0^\infty e^{-c^2 y^2} y^{2v-1} dy \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\pi^2 y^2}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz.$$

ou, en posant

$$c^2 y^2 = t$$

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2c^{2v+1}} + \frac{2^v}{1.3 \ldots (2v-1) c^{2v} \pi^2}$$

$$\times \int_0^\infty e^{-t} t^{v-1} dt \int_0^\infty e^{-\frac{c^2 z^2}{\pi^2 t}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz.$$

Dans le second membre de la dernière équation, on reconnaîtra aisément l'intégrale du paragraphe précédent. On aura donc

$$\int_0^\infty e^{-t - \frac{c^2 z^2}{\pi^2 t}} t^{v-1} dt = \pi i^{v+1} \frac{c^v z^v}{\pi^v} \left[\mathrm{J}^v\left(\frac{2icz}{\pi}\right) + i\, \mathrm{Y}^v\left(\frac{2icz}{\pi}\right) \right],$$

et, par suite,

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2c^{2\nu+1}} + \frac{i^{\nu+1}2^{\nu}}{1.3 \ldots (2\nu-1)c^{\nu}\pi^{\nu+1}}$$
$$\times \int_0^{\infty} z^{\nu}\left[\mathrm{J}^{\nu}\left(\frac{2icz}{\pi}\right) + i\,\mathrm{Y}^{\nu}\left(\frac{2icz}{\pi}\right)\right] \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz.$$

Passons maintenant à la limite pour $n = \infty$.

En posant

$$f(z) = z^{\nu}\left[\mathrm{J}^{\nu}\left(\frac{2icz}{\pi}\right) + i\,\mathrm{Y}^{\nu}\left(\frac{2icz}{\pi}\right)\right]$$

on sait que

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\infty} f(z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz = \pi\left[\frac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \cdots\right.$$

Si donc on introduit

$$f(0) = \frac{(-i)^{\nu+1}(\nu-1)!\,\pi^{\nu-1}}{c^{\nu}},$$

on trouve

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2c^{2\nu+1}} + \frac{2^{\nu-1}(\nu-1)!}{1.3 \ldots (2\nu-1)c^{2\nu}\pi}$$
$$+ \frac{i^{\nu+1}2^{\nu}}{1.3 \ldots (2\nu-1)c^{\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu}\left[\mathrm{J}^{\nu}(2icn) + i\,\mathrm{Y}^{\nu}(2icn)\right],$$

ce qui s'écrit encore

$$(8). \quad \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2c^{2\nu+1}} + \frac{2^{\nu-1}(\nu-1)!}{1.3 \ldots (2\nu-1)c^{2\nu}\pi} \right.$$
$$\left. + \frac{2^{\nu}}{1.3 \ldots (2\nu-1)c^{\nu}\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}^{\nu}(nc). \right.$$

De cette manière, la série du premier membre est ramen
à $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}^{\nu}(nc)$. Il nous reste encore le calcul de la dernière séri

6. En considérant la formule (7), on voit qu'elle ne convient guère pour le calcul des termes de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}^{\nu}(nc)$ à cause du facteur $\frac{(nc)^{2s}}{s!(\nu+s)!}$ qui ne tend vers zéro que pour s, très grand par rapport à nc.

Pour éviter cette difficulté, nous déterminerons la valeur asymptotique de $\mathcal{K}^{\nu}(b)$. Cette valeur dépend évidemment des valeurs asymptotiques des fonctions J^{ν} et Y^{ν}. En effet, on a (*) asymptotiquement

$$e^{-2b}J^{\nu}(2ib) \equiv \frac{P(2ib) + iQ(2ib)}{2\sqrt{\pi b}} e^{-4b-\frac{\nu+1}{2}\pi i} + \frac{P(2ib) - iQ(2ib)}{2\sqrt{\pi b}} e^{\frac{\nu\pi i}{2}}$$

$$ie^{-2b}Y^{\nu}(2ib) \equiv \frac{P(2ib) + iQ(2ib)}{2\sqrt{\pi b}} e^{-4b-\frac{\nu+1}{2}\pi i} - \frac{P(2ib) - iQ(2ib)}{2\sqrt{\pi b}} e^{\frac{\nu\pi i}{2}};$$

par suite,

$$\mathcal{K}^{\nu}(b) \equiv \sqrt{\pi} b^{\frac{2\nu-1}{2}} e^{-2b}\left[P(2ib) + iQ(2ib)\right],$$

où

$$P(2ib) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\nu^2 - \frac{1^2}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{3^2}{4}\right)\cdots\left(\nu^2 - \frac{(4s-1)^2}{4}\right)}{(2s)!\,2^{4s}b^{2s}}$$

$$iQ(2ib) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\nu^2 - \frac{1^2}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{3^2}{4}\right)\cdots\left(\nu^2 - \frac{(4s+1)^2}{4}\right)}{(2s+1)!\,2^{4s+2}b^{2s+1}}.$$

La valeur asymptotique de $\mathcal{K}^{\nu}(b)$ s'écrit donc

$$(9)\quad \left\{ \mathcal{K}^{\nu}(b) \equiv \sqrt{\pi} b^{\frac{2\nu-1}{2}} e^{-2b}\left[1 + \frac{4\nu^2 - 1^2}{2^4 b} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!\,2^8 b^2} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)(4\nu^2 - 5^2)}{3!\,2^{12}b^3} + \cdots\right].\right.$$

Si l'on arrête cette série divergente à un terme quelconque, on obtient une valeur qui diffère de la valeur exacte de moins que le dernier terme calculé. Comme on peut admettre $c > \pi$, on voit qu'avec la formule (9) on déterminera aisément les différents termes de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}^{\nu}(nc)$ avec telle approximation qu'on

(*) Nielsen, *loc. cit.*, p. 156.

voudra. Du reste, les termes consécutifs diminueront rapid ment à cause des facteurs exponentiels e^{-2c}, e^{-4c}, etc.

Pour donner un exemple, soit $v = 1$, $c = 5\pi$; dans ce cas, aura

$$\mathfrak{C}^1(5\pi) < \pi\sqrt{5}e^{-10\pi}$$
$$\mathfrak{C}^1(10\pi) < \pi\sqrt{10}e^{-20\pi}, \text{ etc.},$$

quantités parfaitement négligeables par rapport aux termes pr cédents.

Il en résulte que dans ce cas on peut négliger entièrement série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}^v(nc)$ et se contenter d'écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^5(25 + s^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{250\pi^5} + \frac{1}{25\pi^5} = \frac{9}{250\pi^5} = 0.0011605,$$

la différence étant moindre que

$$0,\quad 00000\quad 00000\quad 00000\quad 4$$

7. Avant de terminer, nous présenterons encore une rema que. Il est bien évident que les considérations des paragr phes 4 et 5 sont presque entièrement applicables quand v e un nombre fractionnaire. Si donc nous posons $v = \mu + \frac{1}{2}$, μ éta un nombre entier, nous obtiendrons une nouvelle forme pour série du paragraphe 2.

En effet, on a, dans ce cas,

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{\mu+1}} = -\frac{1}{2c^{2\mu+2}}$$
$$+ \frac{i^{\mu+\frac{3}{2}}}{\mu!\pi^{\mu+1}c^{\mu+\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} z^{\mu+\frac{1}{2}} \left[\mathrm{J}^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{2icz}{\pi}\right) + i\mathrm{Y}^{\mu\cdot\frac{1}{2}}\left(\frac{2icz}{\pi}\right) \right] \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z},$$

où

$$\mathrm{J}^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{2icz}{\pi}\right) + i\mathrm{Y}^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{2icz}{\pi}\right) = \mathrm{H}_1^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{2icz}{\pi}\right)$$
$$= -\frac{1}{i^{\mu-\frac{1}{2}}} \frac{\pi^{\mu} e^{-\frac{2cz}{\pi}}}{2^{2\mu}c^{\mu+\frac{1}{2}}z^{\mu+\frac{1}{2}}} \sum_{s=0}^{\mu} \frac{(2\mu - s)!}{s!(\mu - s)!} \left(\frac{4cz}{\pi}\right)^s (*).$$

(*) Nielsen, *loc. cit.*, p. 32.

En posant

$$f(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} \mathrm{H}_1^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{2icz}{\pi}\right),$$

on a

$$f(o) = -\frac{1}{i^{\mu-\frac{1}{2}}} \frac{\pi^\mu}{2^{2\mu} c^{\mu+\frac{1}{2}}} \frac{(2\mu)!}{\mu!},$$

par suite

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{\mu+1}} = -\frac{1}{2c^{2\mu+2}} + \frac{(2\mu)!}{2^{2\mu+1}(\mu!)^2 c^{2\mu+1}}$$
$$+ \frac{1}{2^{2\mu}\mu!\, c^{2\mu+1}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2cn} \sum_{s=0}^{\mu} \frac{(2\mu - s)!}{s!\,(\mu - s)!} (4cn)^s.$$

En séparant le premier terme de la série $\sum_{s=0}^{\mu}$ du reste, et en introduisant

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2cn} = \frac{1}{e^{2c} - 1},$$

ce résultat s'écrit

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{\mu+1}} = -\frac{1}{2c^{2\mu+2}} + \frac{(2\mu)!}{2^{2\mu+1}(\mu!)^2 c^{2\mu+1}} \frac{e^{2c} + 1}{e^{2c} - 1}$$
$$+ \frac{1}{2^{2\mu}\mu!\, c^{2\mu+1}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2cn} \sum_{s=1}^{\mu} \frac{(2\mu - s)!}{s!\,(\mu - s)!} (4cn)^s.$$

Posons, pour développer le second membre de cette équation,

$$e^{-2c} = a, \qquad \frac{1}{1-a} = \mathrm{P},$$

alors on aura successivement

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-2nc} = a \frac{d}{da}\left(\frac{1}{1-a}\right) = a \frac{d}{da} \mathrm{P}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-2nc} = a \frac{d}{da}\, a \frac{d}{da}\left(\frac{1}{1-a}\right) = \left(a \frac{d}{da}\right)^2 \mathrm{P}, \text{ etc.}$$

De cette manière, on trouve

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2+\pi^2 s^2)^{\mu+1}} &= -\frac{1}{2c^{2\mu+2}} + \frac{(2\mu)!}{2^{2\mu+1}(\mu!)^2 c^{2\mu+1}} \frac{e^{2c}+1}{e^{2c}-1} \\ &\quad + \frac{1}{2^{2\mu}\mu!\,c^{2\mu+1}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2\mu-s)!}{s!\,(\mu-s)!} (4c)^s \left(a\frac{d}{da}\right)^s \mathrm{P}. \end{aligned} \right.$$

En comparant cette formule à l'équation (**1**), on est conduit à l'identité

$$2^{s+1}\pi^s \left(a\frac{d}{da}\right)^s \mathrm{P} = (-i)^{s-1} \frac{d^s}{dz^s}[\cos \pi z]_{z=\frac{ic}{\pi}}$$

que l'on vérifiera aisément.

QUADRATUREN

VON

PROF. DR. HERMANN KINKELIN

WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE

ZUM

JAHRESBERICHT 1901—1902 DER OBEREN REALSCHULE

ZU BASEL

BASEL
BENNO SCHWABE, VERLAGSBUCHHANDLUNG
1902

Quadraturen.

Die nachstehenden Untersuchungen befassen sich mit der Bestimmung des ıhaltes und des statischen Momentes einer gewissen Klasse von Körpern und mit ɔren Anwendung auf die näherungsweise Berechnung von bestimmten Integralen, ›wie auf die Ausgleichung beobachteter Zahlenreihen. Machen auch nicht alle rgebnisse Anspruch auf Neuheit, so dürfte doch die Methode der Behandlung einiges ıteresse beanspruchen und die Veröffentlichung rechtfertigen.

1. Der Inhalt des Obelisken.

Man hat einen Körper, der begrenzt ist von zwei Vielecken mit bezüglich parallelen ɔiten (Grundflächen) und von Trapezen mit den parallelen Seiten als Grundlinien ɔeitenflächen) einen *Obelisken* oder ein *Prismatoid* genannt. Mag auch die zweite enennung vielleicht zutreffender sein, so ziehe ich doch die erste als die kürzere und ohl auch schönere vor. Der Abstand der beiden Grundflächen wird als die Höhe ɔs Obelisken bezeichnet.

Einzelne Seiten an den Grundflächen können zu Punkten zusammenschrumpfen, ıd die entsprechenden Seitenflächen in Dreiecke übergehen. Unter diesen Gesichts- ınkten gelten als besondere Formen des Obelisken u. a. das Prisma, die Pyramide, ɔ abgestutzte Pyramide, das Zelt.

Ebene Schnitte durch den Obelisken parallel zu den Grundflächen sind Vielecke, ren Seiten denen der Grundflächen parallel sind. Besonders hervorzuheben ist der ttelschnitt, der die Höhe und die Seitenkanten halbiert.

I. Lehrsatz. *Am Obelisken ist ein zu den Grundflächen paralleler Schnitt ıe quadratische Funktion seines Abstandes von einer Grundfläche.*

1. Beweis. Man bezeichne die Inhalte des Schnittes, der beiden Grundflächen und ɔs Mittelschnittes bezüglich mit F, g, G und m, die Höhe mit h und die Abstände ɔs Schnittes von den Grundflächen G und g mit z und y, wobei G als die untere ıd g als die obere gedacht wird. Schneidet man aus dem Obelisken das Prisma ı der Grundfläche g mittelst Projektion derselben auf die Grundfläche G heraus, kann der übrig bleibende Körper zerlegt werden in Zelte, die dem Prisma angefügt ɔr weggenommen sind. Ein solches Zelt besteht aus einer Pyramide und einem ɔiseitigen Prisma, das mit einer Seitenfläche G aufliegt (Fig. 1). Man bezeichne am Zelte Inhalte des Schnittes, der Grundfläche ıl des Mittelschnittes mit φ, γ, μ, die ent- echenden Grössen am Prisma mit φ_1, γ_1, μ_1 ıl an der Pyramide mit φ_2, γ_2, μ_2, so dass

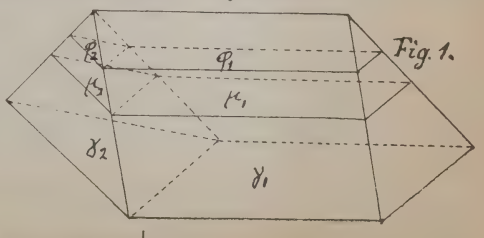


Fig. 1.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Alsdann ist $\mu_1 = \frac{1}{2}\gamma_1, \quad \mu_2 = \frac{1}{4}\gamma_2,$

folglich $\mu = \frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{1}{4}\gamma_2,$

und da $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2,$

so folgt hieraus $\gamma_1 = 4\mu - \gamma, \quad \gamma_2 = 2\gamma - 4\mu.$

Nun ist

$$\varphi_1 = \gamma_1 \frac{y}{h} = \frac{4\mu - \gamma}{h} \cdot y, \quad \varphi_2 = \gamma_2 \frac{y^2}{h^2} = \frac{2\gamma - 4\mu}{h^2} \cdot y^2,$$

daher wird $$\varphi = \frac{4\mu - \gamma}{h} \cdot y + \frac{2\gamma - 4\mu}{h^2} \cdot y^2.$$

Diese Gleichung gilt für jedes dem Prisma angefügte oder weggenommene
folglich auch für ihre Summe. Nimmt man demnach das Prisma von der Grundfläch
dessen Schnitte ebenfalls = g sind, hinzu, so kommt

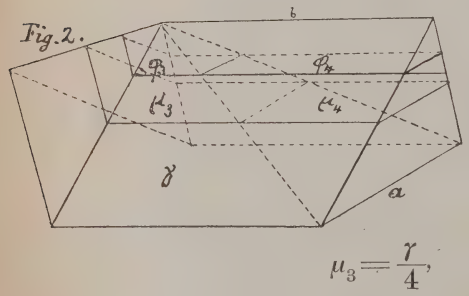
$$F - g = \frac{4(m-g) - (G-g)}{h} y + \frac{2(G-g) - 4(m-g)}{h^2} \cdot y^2$$

oder $$F = g + \frac{4m - G - 3g}{h} \cdot y + \frac{2G + 2g - 4m}{h^2} \cdot y^2.$$

Soll endlich F nicht durch y, sondern durch z ausgedrückt werden, so setze
$y = h - z$ ein oder, was einfacher ist, ersetze y durch z und vertausche g mit G, wod

$$F = G + \frac{4m - 3G - g}{h} \cdot z + \frac{2G + 2g - 4m}{h^2} \cdot z^2.$$

Fig. 2.



2. Beweis. Das Zelt im vorigen Be
kann auch zerlegt werden in eine Pyra
und ein Tetraeder, von dem zwei Gegenka
a und b in den Grundflächen des Obeli
liegen (Fig. 2). Die Schnitte an der Pyra
seien φ_3, μ_3 und am Tetraeder φ_4, μ_4, so

$$\mu_3 = \frac{\gamma}{4}, \quad \varphi_3 = \frac{\gamma \cdot y^2}{h^2}$$

$$\mu_4 = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}, \quad \varphi_4 = \frac{ay}{h} \cdot \frac{b(h-y)}{h} = \frac{4\mu_4 y(h-y)}{h^2}$$

oder, da $$\mu_4 = \mu - \mu_3 = \mu - \tfrac{1}{4}\gamma,$$

$$\varphi_4 = \frac{(4\mu - \gamma)(h-y)y}{h^2},$$

daher wird $$\varphi = \varphi_3 + \varphi_4 = \frac{\gamma \cdot y^2}{h^2} + \frac{(4\mu - \gamma)(h-y)y}{h^2}$$

oder endlich $$\varphi = \frac{4\mu - \gamma}{h} \cdot y + \frac{2\gamma - 4\mu}{h^2} \cdot y^2$$

wie vorhin.

3. Beweis. Die im 1. Beweis angegebene Konstruktion zeigt, dass der Obelisk legt werden kann in ein Prisma von der Grundfläche g, in dreiseitige auf einer itenfläche aufliegende Prismen und in Pyramiden. Der Inhalt eines Schnittes durch s Prisma ist konstant, der des Schnittes durch die dreiseitigen Prismen proportional y und der des Schnittes durch die Pyramiden proportional zu y^2. Die allgemeine rmel für F muss demnach aus drei Gliedern bestehen und die Form haben:

$$F = \alpha + \beta y + y\gamma^2,$$

der die Werte von α, β, γ durch drei gegebene Schnitte bestimmt werden. Die nahmen $y = 0, \frac{1}{2}h$ und h geben

$$g = \alpha$$
$$m = \alpha + \tfrac{1}{2}\beta h + \tfrac{1}{4}\gamma h^2$$
$$G = \alpha + \beta h + \gamma h^2,$$

raus man erhält:

$$\alpha = g, \quad \beta = \frac{4m - 3G - g}{h}, \quad \gamma = \frac{2G + 2g - 4m}{h^2},$$

iche Werte, in F eingeführt, sofort die Gleichung (1) ergeben.

Die letzte Rechnung zeigt, dass die Gleichungen (1) und (2) nicht nur für den Obeken Gültigkeit geben, sondern für alle Körper (Säulen), deren zu einer Grundfläche allele Schnitte quadratische Funktionen ihres Abstandes von der Grundfläche sind. raus folgt weiter, dass, wenn die Schnitte an einer Säule durch eine quadratische nktion ihres Abstandes von einer Grundfläche sind, sie gleichen Inhalt haben mit ausgedrückt d entsprechenden Schnitten an einem Obelisken von ebenso grossen Grundflächen, nsolchem Mittelschnitt und derselben Höhe.

Die Bedingung, dass der Schnitt eine quadratische Funktion seines Abstandes v der Grundfläche sei, ist dahin zu verallgemeinern, dass er eine solche Funktion d Abstandes von irgend einem Punkte sei. Denn ist y′ der Abstand des Schnittes d δ der Abstand der Grundfläche g von diesem Punkt, so ist

$$y = \delta - y',$$

durch der Inhalt des Schnittes

$$F = \alpha + \beta y + \gamma y^2$$

rgeht in $$F = (\alpha + \beta\delta + \gamma\delta^2) - (\beta + 2\gamma\delta)\,y' + \gamma\delta^2 y'^2,$$

auch eine quadratische Funktion von y′ ist.

II. Lehrsatz. *Körper, deren parallele Schnitte in gleichen Abständen von en Grundflächen gleich gross sind, haben gleichen Inhalt.*

Beweis. Für Prismen beweist sich der Satz durch Zusammenfügung von konenten, positiv oder negativ genommenen Teilen, sodass sich der Inhalt eines inders im allgemeinen Sinne ergibt als das Produkt aus dessen Grundfläche und he. Allein schon bei der Pyramide versagt diese Beweisart, und man ist genötigt, Grenzbetrachtungen Zuflucht zu nehmen.

Es seien zwei Körper A und B von gleich grosser Grundfläche und gleicher he gegeben, und deren zu den Grundflächen parallele Schnitte in gleichen Abständen

von der einen Grundfläche gleich gross sind. Man teile die Höhe h in belieb $h_1, h_2, \ldots h_n$ und lege durch die Teilpunkte ebene Schnitte parallel zu den Grun so werden beide Körper in n Platten von bezüglich inhaltsgleichen Grur geteilt. Angenommen nun, A sei grösser als B, so umgebe man einerseits jed von A mit einem aussen anschliessenden Zylinder und lege andrerseits in jec von B einen innen anschliessenden Zylinder. Die Zylinder bei A mögen die flächen $a_1, a_2, \ldots a_n$ und die bei B die Grundflächen $b_1, b_2, \ldots b_n$ haben. Als

$$A-B<(a_1h_1+a_2h_2+\cdots a_nh_n)-(b_1h_1+b_2h_2+\cdots b_nh_n)$$

oder

$$A-B<(a_1-b_1)h_1+(a_2-b_2)h_2+\cdots(a_n-b_n)h_n.$$

Ist $a-b$ die grösste der Differenzen zweier einander entsprechenden grundflächen, so ist um so mehr

$$A-B<(a-b)\cdot(h_1+h_2+\cdots h_n)$$

oder

$$A-B<(a-b)\cdot h.$$

Rückt man nun die Teilpunkte der Höhe unendlich nahe an einander, s sich $a-b$ dem Grenzwert null, und damit auch A—B, w.z.b.w.

An der Hand dieses Satzes erhält man sodann auf bekannte Weise de eines Kegels im allgemeinen Sinne.

III. Lehrsatz. *Der Inhalt eines Obelisken ist gleich dem Produkt Höhe und dem arithmetischen Mittel der beiden Grundflächen und des genommenen Mittelschnittes.*

1. Beweis. Die Zerlegung des Obelisken gemäss dem 1. Beweise des satzes (s. d.) gibt den Inhalt des Prisma $=\frac{1}{2}\gamma_1 h$ und den der Pyramide daher den des Zeltes gleich

$$\tfrac{1}{2}\gamma_1 h+\tfrac{1}{3}\gamma_2 h=\tfrac{1}{6}(3\gamma_1+2\gamma_2)h=\tfrac{1}{6}(4\mu+\gamma)h,$$

was für sämtliche Zelte, somit auch für ihre Summe gilt. Nimmt man das von der Grundfläche g hinzu, so wird der Inhalt des Obelisken:

$$V=g\,h+\tfrac{1}{6}h\big(4(m-g)+(G-g)\big)$$

oder

$$V=\frac{h(G+g+4m)}{6},$$

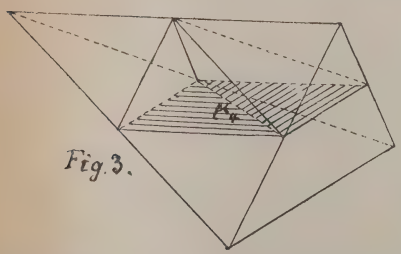


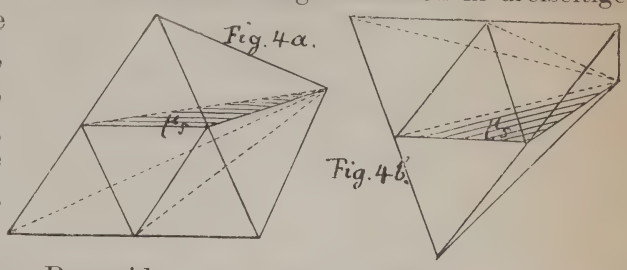
Fig. 3.

2. Beweis. Bei der Zerlegung gemä 2. Beweise des I. Lehrsatzes ist der Inhalt d mide $=\frac{1}{3}\gamma h$. Das Tetraeder wird durch den schnitt in zwei Teile geteilt, und jeder vo lässt sich von der Mitte der dem Mittel parallelen Kante aus in vier inhaltsgleiche miden zerlegen (Fig. 3), von denen die e Grundfläche $\frac{1}{2}\mu_4$ und die Höhe $\frac{1}{2}h$, also den Inhalt $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}h\mu_4$ hat. Demnach Inhalt des Zeltes gleich

$$\tfrac{1}{3}\gamma h+8\cdot\frac{h\mu_4}{12}=\tfrac{1}{6}(2\gamma+4\mu_4)h=\tfrac{1}{6}(4\mu+\gamma)h$$

wie vorhin.

3. Beweis. Man teile von einem Punkt O des Mittelschnittes aus den Obelisken
Pyramiden mit der gemeinschaftlichen Spitze O, und deren Grundflächen die Seiten-
hen des Obelisken sind, und teile diese wieder durch Diagonalebenen in dreiseitige
amiden. Alsdann lässt sich jede
diesen (Fig. 4) abermals in vier,
ltsgleiche, Pyramiden zerlegen,
denen die eine ihre Grundfläche μ_5
dem Mittelschnitt hat und die
e $\frac{1}{2}$h, daher den Inhalt $\frac{1}{6}\mu_5$h be-
. Die Summe derselben ist somit
$\cdot\frac{1}{6}\cdot$m$\cdot$h. Nimmt man die beiden Pyramiden von den Grundflächen G und g
der Höhe $\frac{1}{2}$h, deren Inhalte beziehungsweise $\frac{1}{3}\cdot G\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{6}Gh$ und $\frac{1}{6}gh$ sind,
u, so kommt sofort



$$V=\frac{h(G+g+4m)}{6}.$$

4. Beweis. Die Formel (2)

$$F=G+(4m-3G-g)\cdot\frac{z}{h}+(2G+2g-4m)\cdot\frac{z^2}{h^2}$$

aus, dass man sich den Obelisken zusammengesetzt denken kann aus einem
na von der Grundfläche G, aus einem auf eine Seitenfläche vom Inhalt
-3G—g gelegten dreiseitigen Prisma und aus einer Pyramide von der Grund-
e 2G + 2g — 4m, alle drei von der Höhe h. Demnach ist ihr Gesamtinhalt:

$$V=Gh+\tfrac{1}{2}(4m-3G-g)h+\tfrac{1}{3}(2G+2g-4m)h$$

$$V=\tfrac{1}{6}h(G+g+4m)$$

Mit Umgehung der Formel (2) kann dieser Beweis auch direkt mittelst der im
nne des 3. Beweises des I. Lehrsatzes begründeten Formel

$$F=\alpha+\beta z+\gamma z^2$$

$$F=\alpha+\beta h\cdot\frac{z}{h}+\gamma h^2\cdot\frac{z^2}{h^2}$$

rt werden. Man erhält auf gleiche Weise wie vorhin

$$V=\alpha h+\tfrac{1}{2}\beta h\cdot h+\tfrac{1}{3}\gamma h^2\cdot h$$

$$V=\alpha h+\tfrac{1}{2}\beta h^2+\tfrac{1}{3}\gamma h^3.$$

Es ist aber aus der Formel für F

für $z=0$: $G=\alpha$

» $z=\frac{1}{2}h$: $m=\alpha+\frac{1}{2}\beta h+\frac{1}{4}\gamma h^2$

» $z=h$: $g=\alpha+\beta h+\gamma h^2$.

Aus den letzten vier Gleichungen ergibt sich sodann durch Elimination von α, β, γ
Wert von V.

IV. Lehrsatz. *Der Inhalt eines Obelisken ist gleich dem Produkt Höhe und dem arithmetischen Mittel aus einer Grundfläche und dem teren dreifach genommenen Drittelschnitt.*

1. Beweis. In der Formel (3) ist der Inhalt des Obelisken ausgedrüc die beiden Grundflächen und den Mittelschnitt. Der letztere kann aber du beliebigen andern Schnitt ersetzt werden. Aus der Gleichung (2)

$$F = G + \frac{4m - 3G - g}{h} z + \frac{2G + 2g - 4m}{h^2} \cdot z^2$$

erhält man

$$4m = \frac{G(h-z)(2z-h) - gz(2z-h) + \mathfrak{F} h^2}{z(z-h)}.$$

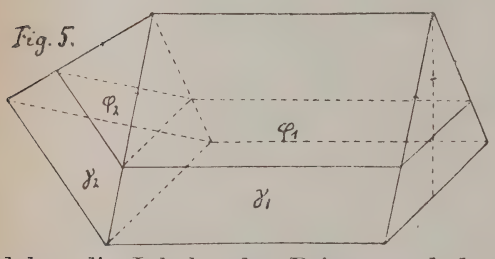
Dies in (3) eingesetzt gibt nach leichter Reduktion:

$$V = h \cdot \frac{G(h-z)(3z-h) + gz(2h-3z) + \mathfrak{F} h^2}{6z(h-z)}.$$

Einen sehr einfachen Ausdruck erhält man unter den Annahmen $z =$ $z = \frac{2}{3} h$. Belegt man in diesen Fällen die F mit dem Namen *Drittelsch* bezeichnet sie mit D und d, so wird

$$V = \frac{h(g + 3D)}{4} = \frac{h(G + 3d)}{4}.$$

Fig. 5.



2. Beweis. Bei der Zerlegung lisken gemäss dem 1. Beweis des I. L (s. d.) ist für $y = \frac{2}{3} h$ (Fig. 5)

$$\varphi_1 = \frac{2}{3} \gamma_1, \quad \varphi_2 = \frac{4}{9} \gamma_2,$$

woraus umgekehrt

$$\gamma_1 = \frac{3}{2} \varphi_1, \quad \gamma_2 = \frac{9}{4} \varphi_2,$$

daher die Inhalte des Prisma und der Pyramide bezüglich gleich

$$\frac{1}{2} \gamma_1 h = \frac{3}{4} \varphi_1 h, \quad \frac{1}{3} \gamma_2 h = \frac{3}{4} \varphi_2 h,$$

folglich des Inhaltes des Zeltes:

$$\frac{3}{4} h (\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{3}{4} h \varphi,$$

welcher Ausdruck auch für die Summe der Zelte gilt. Nimmt man dazu da von der Grundfläche g, so kommt

$$V = gh + \frac{3}{4} h (D - g) = \frac{h}{4} (g + 3D)$$

wie oben, worin selbstverständlich g und D gleichzeitig auch durch G und werden können.

Zusatz. Wenn insbesondere die Grundfläche $g = 0$, so wird einfach

$$V = \frac{3D \cdot h}{4}.$$

V. Lehrsatz. *Wenn eine Gerade längs den Umfängen zweier parallelen ndflächen herumläuft und in sich selbst zurückkehrt, so ist der einge-ossene Körper inbezug auf die zu den Grundflächen parallelen Schnitte als lisk zu betrachten.*

Beweis. Es seien (Fig. 6) AB = a und CD = b ine Seite der Grundflächen G und g, so liegt eine ade HJ, die ihnen entlang läuft, im Innern des aeders ABCD. Es sei μ der Mittelschnitt des aeders, φ irgend ein anderer zu den Grundflächen lleler Schnitt im Abstand y von g, und α der Winkel chen a und b, so ist

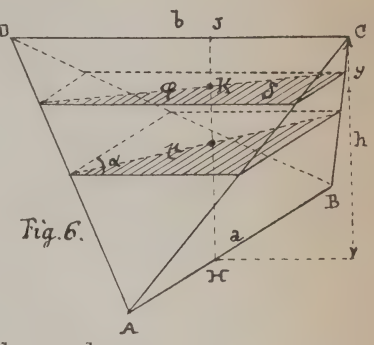


Fig. 6.

$$\varphi = \frac{a\,y}{h} \cdot \frac{b\,(h-y)}{h} \operatorname{Sin}\alpha = \frac{a\,b \cdot y\,(h-y)}{h^2} \operatorname{Sin}\alpha,$$

hat seinen grössten Wert $\mu = \frac{1}{4}\,a\,b \operatorname{Sin}\alpha$ für $y = \frac{1}{2}\,h$, so dass

$$\varphi \leqq \tfrac{1}{4}\,a\,b.$$

Der Schnittpunkt K von JH auf dem Schnitte φ beschreibt eine Linie, die von n Dreieck $\delta < \varphi < \frac{1}{4}\,a\,b$ abschneidet. Lässt man nun HJ um beide Grundflächen mlaufen, so unterscheidet sich das von HJ auf dem Schnitte umschriebene henstück von dem Obeliskenschnitt selbst, der durch die Seitenflächen ACD, C, · · · begrenzt ist, um

$$\Sigma\delta < \tfrac{1}{4}\Sigma\,a\,b.$$

Es sei β der grösste Wert von b, so ist

$$\Sigma\delta < \tfrac{1}{4}\beta \cdot \Sigma a \text{ oder } < \tfrac{1}{4}\beta \cdot U,$$

n U den Umfang der Grundfläche G bezeichnet. Lässt man endlich die Seiten b damit auch β gegen Null abnehmen, was erlaubt und im besondern der Fall ist, n die Grundfläche g von einer krummen Linie begrenzt wird, so nähert sich vorige Ausdruck der Null, folglich auch $\Sigma\delta$, w.z.b.w.

1. Zusatz. Die Formeln (1) und (2) für den Flächeninhalt eines Obelisken n auch für den von einer beliebig umlaufenden Geraden umschriebenen Körper chen den beiden Grundflächen.

2. Zusatz. Für diesen Körper gelten auch die Inhaltsformeln (3), (4), (5) und (6).

Bemerkung. Die für den Inhalt des Obelisken entwickelten Formeln (3) und ind so einfach in ihrer Herleitung, von so allgemeiner Anwendbarkeit und, we-ens die erste, schon so lange bekannt, dass man sich wundern muss, sie in den büchern der Elementargeometrie nur selten zu finden. Sie können auch bei der mmung des Inhaltes ebener Figuren benutzt werden, indem man diese als un-ch dünne Platten ansieht. Da sie überdies ihre Gültigkeit behalten, wenn die itte nur lineare Funktionen der Abstände von einer Grundfläche sind (quadratische tionen, in denen der Koeffizient des quadratischen Gliedes null ist), so ersetzen lle andern in der elementaren Geometrie vorkommenden Inhaltsformeln.

Es mögen einige Beispiele folgen.

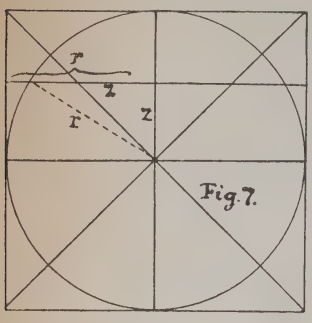


Fig. 7.

1. Die **Kugel** kann bekanntlich direkt mit einer lisken verglichen werden, indem man ihr einen Zylind schreibt und aus diesem auf seiner Grundfläche einen ausschneidet (Fig. 7), dessen Spitze im Kugelmittelpunk Der Inhalt eines Schnittes an der Kugel ist dann glei des entsprechenden Schnittes an dem ausgehöhlten Z $= \pi(r^2 - z^2)$. Der ausgehöhlte Zylinder ist in der Obelisk, von welchem

$$G = 0, \quad g = 0, \quad 4m = 4\pi r^2, \quad h = 2r,$$

so dass nach (3)

$$V = \frac{2r \cdot 4\pi r^2}{6} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

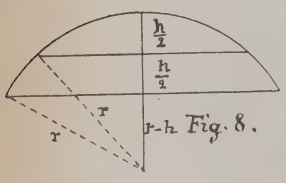


Fig. 8.

2. Das **Kugelsegment** (Fig. 8)

$$G = \pi\left(r^2 - (r-h)^2\right) = \pi h(2r - h), \quad g = 0,$$

$$4m = 4\pi\left(r^2 - \left(r - \frac{h}{2}\right)^2\right) = \pi h(4r - h),$$

daher nach (3)

$$V = \frac{\pi h^2(2r - h + 4r - h)}{6} = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3}.$$

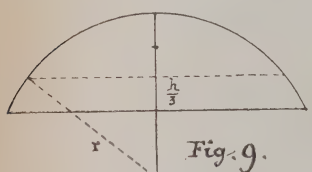


Fig. 9.

Oder (Fig. 9)

$$g = 0, \quad D = \pi\left(r^2 - \left(r - \frac{2h}{3}\right)^2\right) = \frac{4\pi h}{9} \quad (3$$

daher nach (5)

$$V = \frac{3 \cdot 4\pi h(3r - h)h}{4 \cdot 9} = \frac{\pi h^2(3r}{3}$$

3. Der **abgestutzte Kegel**.

$$G = \pi R^2, \quad g = \pi r^2, \quad 4m = 4\pi\left(\frac{R + r}{2}\right)^2,$$

daher nach (3)

$$V = \frac{\pi(R^2 + r^2 + (R + r)^2)}{6} = \frac{\pi(R^2 + Rr + r^2)}{3}.$$

Oder

$$g = \pi r^2, \quad D = \pi\left(\frac{2R + r}{3}\right)^2,$$

daher nach (5)

$$V = \frac{\pi}{4}\left(r^2 + \tfrac{1}{3}(2R + r)^2\right).$$

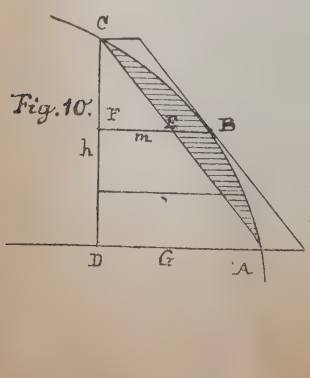


Fig. 10.

Bei der abgestutzten Pyramide ist $m = \frac{1}{2}(\sqrt{G}$ wodurch sich ebenfalls die bekannte Inhaltsformel erg

4. Das **Parabelsegment.** Über der Sehne AC lie Parabelbogen ABC, und die Axe der Parabel sei para AD (Fig. 10), so ist F eine quadratische Funktion von

$$G = AD, \quad g = 0, \quad 4m = 4 \cdot BF,$$

er das Segment $ABC = \frac{h(AD + 4BF)}{6} - \frac{h \cdot AD}{2} = \frac{h(4BF - 2AD)}{6}$

$$= \frac{2h}{3}\left(BF - \frac{AD}{2}\right) = \frac{2}{3} h \cdot BE,$$

. gleich zwei Dritteln des umgeschriebenen Parallelogramms.

5. Das **Segment eines Ellipsoides.** Das Ellipsoid habe die Gleichung

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 = 1$$

eine Schnittebene die Normalgleichung

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = z,$$

α, β, γ die Kosinus der Winkel ihrer Normalen mit den Koordinatenaxen bedeuten, z ihren Abstand vom Anfangspunkt O. Man lege durch O die zum Schnitt llele Ebene

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0,$$

at die Projektion ihres Schnittes mit dem Ellipsoid auf der xy-Ebene die Gleichung

$$(a\gamma^2 + c\alpha^2)\xi^2 + 2c\alpha\beta\xi\eta + (b\gamma^2 + c\beta^2)\eta^2 - \gamma^2 = 0.$$

Bezeichnet man die Haupthalbaxen dieser Ellipse mit A_1 und B_1, so ergibt sich bekannten Formeln der Inhalt der Projektion gleich

$$\pi A_1 B_1 = \frac{\pi\gamma}{\sqrt{\triangle}}.$$

der Kürze wegen $\quad bc\alpha^2 + ca\beta^2 + ab\gamma^2 = \triangle$

tzt wurde, und daraus der Inhalt des Zentralschnittes selbst

$$F' = \frac{\pi}{\sqrt{\triangle}}.$$

Der Inhalt des gegebenen Schnittes ergibt sich nun durch folgende Überlegung. Mittelpunkte sämtlicher parallelen Schnitte liegen auf einem Durchmesser, der h den Berührungspunkt der parallelen Berührungsebene geht. Bezeichnet man en Koordinaten mit ξ_1, η_1, ζ_1 und den Abstand der Berührungsebene von O mit Z, t

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{aZ}, \quad \eta_1 = \frac{\beta}{bZ}, \quad \zeta_1 = \frac{\gamma}{cZ}$$

hieraus, weil $\quad a\xi_1^2 + by_1^2 + c\zeta_1^2 = 1,$

$$Z = \sqrt{\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c}} = \sqrt{\frac{\triangle}{abc}}.$$

Die parallelen Schnitte selbst sind ähnlich und ähnlich liegend, daher sind ihre taxen alle parallel zu den Hauptaxen des Zentralschnittes und stellen die zu genannten Durchmesser konjugierten Sehnen in zwei Ebenen dar. Sind dem- r das von der gegebenen Ebene abgeschnittene Stück des Durchmessers, R r Durchmesser selbst, ferner A und B die Haupthalbaxen des Schnittes, so hat in den beiden die Hauptaxen der Schnitte enthaltenden Ebenen die Gleichungen

$$\frac{r^2}{R^2} + \frac{A^2}{A'^2} = 1, \qquad \frac{r^2}{R^2} + \frac{B^2}{B'^2} = 1,$$

as $\quad A = A'\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}, \quad B = B'\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}};$

folglich ist der Inhalt des Schnittes:

$$F = \pi A B = \pi A' B' \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

oder, da $\frac{r}{R} = \frac{z}{Z}$ und $\pi A' B' = F' = \frac{\pi}{\sqrt{\triangle}} = \frac{\pi}{Z\sqrt{abc}}$,

$$F = \frac{\pi}{Z\sqrt{abc}} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{Z^2}\right).$$

Es ist somit F eine quadratische Funktion von z, und die Obelisken kann auf das Segment angewendet werden.

Sei p der Abstand der Grundfläche des Segmentes von O, und h dessen so ist $p = Z - h$, ferner der Abstand des Drittelschnittes D von O gleich

$$p + \frac{h}{3} = \frac{3Z - 2h}{3},$$

welcher Wert, für z in F eingeführt, ergibt:

$$D = \frac{4\pi h(3Z - h)}{9Z^3\sqrt{abc}}.$$

Demnach ist nach (6) der Inhalt des Segmentes

$$V = \frac{\pi h^2}{3\sqrt{abc}} \cdot \frac{3Z - h}{Z^3}, \text{ wo } z = \sqrt{\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c}}.$$

Will man V durch die Haupthalbaxen A, B, C des Ellipsoides ausdrück hat man zu setzen

$$a = \frac{1}{A^2}, \quad b = \frac{1}{B^2}, \quad c = \frac{1}{C^2},$$

wodurch man erhält:

$$V = \frac{\pi \cdot ABC \cdot h^2(3Z - h)}{3Z^3}, \quad Z = \sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\gamma^2}.$$

Aus dieser Formel geht hervor, dass Segmente eines Ellipsoides, welche g Höhen und gleiche Abstände der Grundflächen vom Mittelpunkt haben, inhalts sind.

Diese Aufgabe hätte man auch, wie bei der Kugel, durch direkte Verglei des Segments mit dem Obelisken lösen können, den man erhält, wenn man das soid mit einem Zylinder umhüllt und aus diesem einen Kegel ausschneidet.

6. Das **Segment eines elliptischen Paraboloids.** Es werden die näm Bezeichnungen gebraucht, wie im vorigen Beispiele. Die Gleichungen des Parab und einer Schnittebene seien

$$\xi^2 + n\eta^2 = 2q\zeta,$$
$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = z,$$

so ist die Projektion des elliptischen Schnittes auf die xy-Ebene:

$$\gamma\xi^2 + n\gamma\eta^2 + 2q\alpha\xi + 2q\beta\eta - 2qz = 0,$$

deren Halbaxen sind:

$$A_1 = \frac{\sqrt{q}}{\gamma\sqrt{n}} \cdot \sqrt{q(n\alpha^2 + \beta^2) + 2n\gamma z}, \quad B_1 = \frac{\sqrt{q}}{\gamma n}\sqrt{q(n\alpha^2 + \beta^2) + 2n\gamma z},$$

aus der Inhalt des Schnittes selbst folgt:

$$F = \frac{\pi A_1 B_1}{r} = \frac{\pi q}{r^3 n \sqrt{n}} \left(q (n\alpha^2 + \beta^2) + 2n\gamma z \right).$$

Im Berührungspunkt der parallelen Berührungsebene ist $F = 0$, woraus sich n Abstand Z vom Anfangspunkt O ergibt:

$$Z = - \frac{q (n\alpha^2 + \beta^2)}{2n\gamma}.$$

Dadurch geht der Inhalt des Schnittes über in

$$F = \frac{2\pi q (z - Z)}{r^2 \sqrt{n}}$$

ist nur eine lineare Funktion von z.

Nunmehr ist $p = Z + h$, und für den Drittelschnitt ist

$$z = p - \frac{h}{3} = \frac{3Z + 2h}{3},$$

schliesslich nach (6)

$$V = \frac{\pi q h^2}{r^2 \sqrt{n}}.$$

Segmente eines Paraboloides sind demnach inhaltsgleich, wenn sie gleiche Höhe gleiche Neigung der Grundfläche zur Axe des Paraboloids besitzen.

Aus dem Werte von F als linearer Funktion von z, der sich somit zur Grund- e $\frac{2\pi q (p - Z)}{r^2 \sqrt{n}} = \frac{2\pi q h}{r^2 \sqrt{n}}$ ebenso verhält, wie in einem Dreieck ein zur Grund- paralleler Schnitt zur Grundlinie, hätte man übrigens den Wert von V auch ch als Produkt der Grundfläche mit der halben Höhe $\frac{1}{2}$ h erhalten.

II. Das statische Moment des Obelisken.

Unter dem statischen Moment eines Körpers inbezug auf eine Ebene wird im nden verstanden das Produkt aus dessen Inhalt und dem Abstand des Schwer- tes von der Ebene. Es ist gleich der Summe der statischen Momente seiner . Kennt man das statische Moment des Körpers inbezug auf eine Ebene sowie n Inhalt, so hat man umgekehrt den Abstand seines Schwerpunktes von der e und hieraus diesen selbst, falls man noch einen geometrischen Ort für ihn ben kann. Beim Obelisken insbesondere ist ein solcher Ort die Verbindungs- e (Schwerlinie) der Schwerpunkte der Grundflächen.

Das statische Moment eines Prisma inbezug auf die Grundfläche ist gleich dem akt aus dessen Inhalt und der halben Höhe.

VI. Lehrsatz. *Der Schwerpunkt eines Dreieckes schneidet von einer Schwer- den dritten Teil ab, der Schwerpunkt eines Tetraeders den vierten Teil.*

Beweis. Die Beweise dieser zwei Behauptungen werden in der Elementargeo- getrennt gegeben; die folgende Betrachtung liefert beide miteinander.

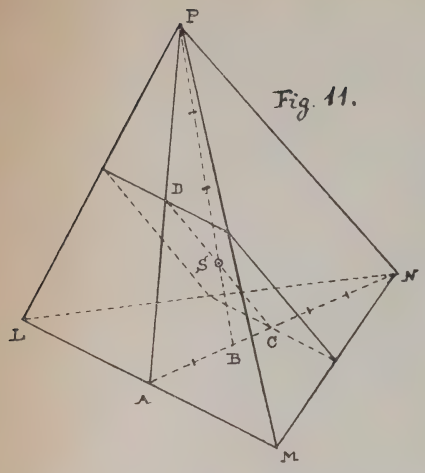


Fig. 11.

Es sei (Fig. 11) das Tetraeder LMNP g
Legt man den zu den Gegenkanten LM u
parallelen Mittelschnitt, so wird dessen Mitte
Schwerpunkt des Tetraeders sein und zugleich
Ebene ANP liegen, die durch die Kante
die Schwerlinie AN der Grundfläche LMN
wird. Die Gerade PS trifft somit diese Gru
in ihrem Schwerpunkt B. Es sei CD der
schnitt der Ebene ANP auf dem Mittelschn
folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCS un

$$BS : BP = CS : NP = 1 : 4,$$

$$BS = \frac{1}{4} BP.$$

Ebenso ist $BC : BN = CS : NP = 1 : 4,$

woraus $BN = 4 \cdot BC,$

folglich $AC = CN = 3 \cdot BC,$

$$AB = 2 \cdot BC = \frac{1}{2} BN = \frac{1}{3} AN, \text{ w.z.b.w.}$$

1. Zusatz. Der Abstand des Schwerpunktes eines Dreiecks von der linie beträgt den dritten Teil der Höhe.

Daraus folgt weiter: Der Abstand des Schwerpunkts eines dreiseitigen Pris einer als Grundfläche angenommenen Seitenfläche ist gleich dem dritten T entsprechenden Höhe.

2. Zusatz. Der Abstand des Schwerpunkts einer Pyramide von der fläche beträgt den vierten Teil der Höhe.

3. Zusatz. Das Moment eines dreiseitigen Prisma inbezug auf eine als fläche angenommene Seitenfläche ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt u Drittel der entsprechenden Höhe.

Das Moment einer Pyramide inbezug auf die Grundfläche ist gleich dem P aus dem Inhalt und dem Viertel der Höhe.

VII. Lehrsatz. *Das statische Moment eines Obelisken inbezug a Grundfläche ist gleich dem Moment eines Zylinders von gleicher Höhe, Grundfläche das arithmetische Mittel ist aus der andern Grundfläche u zweifachen Mittelschnitt.*

1. Beweis. Das Moment soll sich im folgenden stets auf die Grundfl beziehen. Bei der Zerlegung des Obelisken gemäss dem 1. Beweise des I. Leh (Fig. 1) ist das Moment des Prisma gleich $\frac{1}{3} h \cdot \frac{1}{2} \gamma_1 h = \frac{1}{6} h^2 \gamma_1$, und das Mome Pyramide gleich $\frac{1}{4} h \cdot \frac{1}{3} \gamma_2 h = \frac{1}{12} h^2 \gamma_2$, folglich das Moment des Zeltes gleich $\frac{1}{6} h^2 (\gamma_1$

oder da $\gamma_1 = 4\mu - \gamma, \ \frac{1}{2}\gamma_2 = \gamma - 2\mu,$

$\cdot h\frac{1}{3}h^2\mu$, was auch für die Summe der Momente aller Zelte gelten wird. Da er das Moment des Zylinders von der Grundfläche g gleich $\frac{1}{2}h\cdot g\,h=\frac{1}{2}h^2g$, so l das Moment des Obelisken:

$$M=\tfrac{1}{2}h^2g+\tfrac{1}{3}h^2(m-g)$$

· endlich

$$M=\frac{h^2(g+2m)}{6}. \qquad (7)$$

Schreibt man dies in der Form $\frac{1}{2}h\cdot\frac{1}{2}(g+2m)h$, so ist der Satz bewiesen.

2. Beweis. Bei der Zerlegung des Obelisken gemäss dem 2. Beweise des I. Lehr- es (Fig. 2) ist der Inhalt des Tetraeders $=\frac{1}{6}\cdot 4h\mu_4$ und der Abstand seines Schwer- ktes von der Grundfläche $=\frac{1}{2}h$, folglich sein Moment $=\frac{1}{3}h^2\mu_4$; ferner ist das ment der Pyramide $=\frac{1}{4}h\cdot\frac{1}{3}\gamma h=\frac{1}{4}h\cdot\frac{1}{3}\cdot 4\mu_3 h=\frac{1}{3}h^2\mu_3$. Daraus folgt das Mo- t des Zeltes $=\frac{1}{3}h^2(\mu_3+\mu_4)=\frac{1}{3}h^2\mu$, u.s.w. wie vorhin.

3. Beweis. (Siehe den 4. Beweis des III. Lehrsatzes.) Das Moment des Prisma der Grundfläche G ist gleich $\frac{1}{2}h\cdot hG=\frac{1}{2}h^2G$, das des dreiseitigen Prisma von Grundfläche $4m-3G-g$ ist gleich $\frac{2}{3}h\cdot\frac{1}{2}h(4m-3G-g)=\frac{1}{3}h^2(4m-3G-g)$, das der Pyramide von der Grundfläche $2G-2g-4m$ ist gleich $\frac{3}{4}h\cdot\frac{1}{3}h(2G$ $g-4m)=\frac{1}{2}h^2(2G+2g-4m)$, folglich das Moment des Obelisken

$$M=\tfrac{1}{2}h^2G+\tfrac{1}{3}h^2(4m-3G-g)+\tfrac{1}{2}h^2(G+g-2m)$$

$$M=\frac{h^2(g+2m)}{6}.$$

Auch hier kann, wie in dem oben zitierten Beweise (s. d.), das Moment mit gehung der Formel (2) direkt gefunden werden, wie folgt:

$$F=\alpha+\beta h\cdot\frac{y}{h}+\gamma h^2\cdot\frac{y^2}{h^2}.$$

Das Moment des Prisma von der Grundfläche a ist $=\frac{1}{2}h^2\alpha$, das des dreiseitigen na von der Grundfläche βh ist $=\frac{1}{3}h^3\beta$ und das der Pyramide von der Grund- e γh^2 ist $=\frac{1}{4}h^4\gamma$, daher das Moment des Obelisken:

$$M=\tfrac{1}{2}\alpha h^2+\tfrac{1}{3}\beta h^3+\tfrac{1}{4}\gamma h^4.$$

Dazu kommen die Gleichungen

$$G=a,\quad m=\alpha+\tfrac{1}{2}\beta h+\tfrac{1}{4}\gamma h^2,\quad g=\alpha+\beta h+\gamma h^2,$$

n Verbindung mit der vorigen durch Elimination von α, β, γ den Wert von M t.

1. Zusatz. Um eine Formel für M zu erhalten, in der statt des Mittelschnittes Drittelschnitt vorkommt, hat man m durch d oder D auszudrücken. In dem weise des IV. Lehrsatzes (Seite 8) ist m aus Gleichung (2) allgemein durch F aus- ickt. Setzt man das eine Mal $z=\frac{2}{3}h$, das andere Mal $z=\frac{1}{3}h$, so kommt

$$8m = G - 2g + 9d = g - 2G + 9D,$$

welche Werte, in Gleichung (7) eingeführt, ergeben:

$$M = \frac{h^2(G + 2g + 9d)}{24} = \frac{h^2(5g - 2G + 9D}{24}.$$

Mit Umgehung der Gleichung (2) ergeben sich die beiden Werte von 8 aus der Vergleichung der drei Formeln für den Inhalt des Obelisken

$$\frac{h(G + g + 4m)}{6} = \frac{h(G + 3d)}{4} = \frac{h(g + 3D)}{4}.$$

Ebenso können die beiden Werte von M selbst nach der im vorigen angewandten Methode gefunden werden, indem man statt der Gleichung fü Gleichung für d oder D verwendet:

$$d = \alpha + \tfrac{2}{3}\beta h + \tfrac{4}{9}\gamma h^2,$$
$$D = \alpha + \tfrac{1}{3}\beta h + \tfrac{1}{9}\gamma h^2.$$

2. *Zusatz.* Das statische Moment des Obelisken dividiert durch desse gibt endlich den Abstand s des Schwerpunktes von der Grundfläche G:

$$s = \frac{M}{V} = h \cdot \frac{g + 2m}{G + g + 4m} = \frac{h}{6} \cdot \frac{G + 2g + 9d}{G + 3d} = \frac{h}{6} \cdot \frac{5g - 2G + 9D}{g + 3D}.$$

Nachschrift. Im Vorhergehenden sind nur elementare Beweisformen wendung gebracht worden, um den Gegenstand dem Unterricht auf der mittler stufe zugänglich zu machen. Mit Hilfe der Integralrechnung wird die Beh übersichtlicher. Es sei der Inhalt eines ebenen Schnittes im Abstand z v Grundfläche einer Säule von der Höhe h:

$$F = \alpha \cdot z^m + \beta z^n + \cdots \varrho \cdot z^r,$$

eine algebraische Funktion von z mit ganzen oder gebrochenen Exponent p Gliedern bestehend, so ist

$$V = \int_0^h F\,dz = \frac{\alpha h^{m+1}}{m+1} + \frac{\beta z^{n+1}}{n+1} + \cdots \frac{\varrho z^{r+1}}{r+1}. \qquad (a)$$

Kennt man nun Schnitte in den Abständen $z_1, z_2, \cdots z_p$ von der Grun so bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \alpha z_1^m + \beta z_1^n + \cdots \varrho z_1^r \\ F_2 &= \alpha z_2^m + \beta z_2^n + \cdots \varrho z_2^r \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_r &= \alpha z_r^m + \beta z_z^n + \cdots \varrho z_r^r \end{aligned}\right\}, \qquad (b)$$

welche, mit (a) durch Elimination von $\alpha, \beta, \cdots \varrho$ verbunden, den Inhalt V als F von $F_1, F_2, \cdots F_r$ geben.

Ferner ist

$$M = \int_0^h z F \cdot dz = \frac{\alpha h^{m+2}}{m+2} + \frac{\beta h^{n+2}}{n+2} + \cdots \frac{\varrho h^{r+2}}{r+2} \qquad (c)$$

und liefert, in gleicher Weise mit (X) verbunden, den entsprechenden Ausdruck

Durch die Annahme $h = 1$ kann man sich die Rechnung erleichtern.

1. Beispiel. Sollen der Inhalt und das Moment eines Obelisken durch die den Drittelschnitte und den Mittelschnitt ausgedrückt werden, so hat man

$$F = \alpha + \beta z + \gamma z^2,$$

raus die Gleichungen (b)

$$\begin{aligned} D &= \alpha + \tfrac{1}{3}\beta h + \tfrac{1}{9}\gamma h^2 \\ d &= \alpha + \tfrac{2}{3}\beta h + \tfrac{4}{9}\gamma h^2 \qquad (b) \\ m &= \alpha + \tfrac{1}{2}\beta h + \tfrac{1}{4}\gamma h^2, \end{aligned}$$

l sodann für den Inhalt und das Moment inbezug auf G:

$$V = \alpha h + \tfrac{1}{2}\beta h^2 + \tfrac{1}{3}\gamma h^3 \qquad (a)$$

$$M = \tfrac{1}{2}\alpha h^2 + \tfrac{1}{3}\beta h^3 + \tfrac{1}{4}\gamma h^4. \qquad (c)$$

Durch die angegebene Elimination erhält man

$$V = \frac{h}{2}(3D + 3d - 4m); \qquad M = \frac{h^2}{2}(D + 2d - 2m).$$

2. Beispiel. Es sei F eine kubische Funktion von z

$$F = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3.$$

Unter der vorläufigen Annahme $h = 1$ hat man

$$\begin{aligned} G &= \alpha \\ D &= \alpha + \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{9}\gamma + \tfrac{1}{27}\delta \\ d &= \alpha + \tfrac{2}{3}\beta + \tfrac{4}{9}\gamma + \tfrac{8}{27}\delta \\ g &= \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ V &= \alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma = \tfrac{1}{4}\delta, \end{aligned}$$

durch man erhält

$$V = \frac{h}{8}(G + 3D + 3d + g).$$

Diese Formel wird übrigens auch bei quadratischen Schnitten ($\delta = 0$) gelten. der Tat ist bei diesen sowohl

$$V = \frac{h(g + 3D)}{4} \quad \text{als} \quad V = \frac{h(G + 3d)}{4},$$

l die halbe Summe der beiden Werte gibt den vorigen Ausdruck.

III. Die Fourierschen Reihen.

VIII Lehrsatz. *Das Integral* $\int_a^b \varphi(z) \sin kz \cdot dz$ *nähert sich mit wachsendem*

em Grenzwert null, wenn $\varphi(z)$ *von* $z = a$ *bis* b *endlich und entweder stetig r nicht unendlich oft unstetig ist.*

Beweis. Man lege zwischen a und b Zwischenwerte von z ein, die um $\frac{2\pi}{k}$ fort- reiten, und bilde die Wertefolge

$$a, \quad a + \frac{2\pi}{k}, \quad a + 2\cdot\frac{2\pi}{k}, \quad a + 3\cdot\frac{2\pi}{k}, \cdots a + r\cdot\frac{2\pi}{k}, \quad b,$$

in das vorletzte Glied $a + r\cdot\frac{2\pi}{k} = b - \alpha$ von dem letzten b nur um $\alpha < \frac{2\pi}{k}$ ab-

weiche, was durch die Annahme $r = \frac{(b-a-\alpha)k}{2\pi}$ · bewirkt wird. Man zerlege das gegebene Integral in Teilintegrale, von denen jedes eines der Glieder der zur untern und das nächste zur obern Grenze hat. Alsdann nähert sich das Integral vom Umfang $\alpha < \frac{2\pi}{k}$ mit zunehmendem k der Null und fällt ausser Bet

Das Nämliche gilt von den andern Teilintegralen, auch wenn in einem oder meh die Funktion $\varphi(z)$ einen endlichen Sprung macht. Falls der letztere Fall eintri geschieht es nach der über $\varphi(z)$ gemachten Voraussetzung nur in einer endl Anzahl von Teilintegralen, so dass deren Summe ebenfalls der Null zustrebt bleibt noch die Summe der Integrale zu bestimmen, in denen $\varphi(z)$ stetig l

In einem solchen durchläuft die Veränderliche z allgemein die Werte von $a +$ bis $a + (s+1)\cdot\frac{2\pi}{k}$, folglich kz die Werte von $ka + 2\pi s$ bis $ka + 2\pi s + 2\pi$. sind die Werte von $\operatorname{Sin} kx$ in der zweiten Hälfte dieses Intervalles denen in der e Hälfte entgegengesetzt. Bezeichnet man also den grössten Wert von $\varphi(z)$ in ganzen Intervalle des Integrals mit M_s, den kleinsten mit m_s, so wird das Int vergrössert, wenn man in der ersten Hälfte $\varphi(z)$ durch M_s, in der zweiten durc ersetzt; es wird aber verkleinert, wenn man in der ersten Hälfte $\varphi(z)$ durch m_s in der zweiten durch M_s ersetzt. Trennt man nun die beiden Hälften und n M_s und m_s als konstante Faktoren heraus, so erstrecken sich ihre Integrale nur über $\operatorname{Sin} kz$ und erhalten die Werte $\frac{2}{k}$ und $-\frac{2}{k}$. Im ersten Falle erhält man som das ganze Teilintegral den Wert $\frac{2}{k}(M_s - m_s)$, im zweiten Falle $\frac{2}{k}(m_s - M_s)$. sehen vom Zeichen ist dasselbe demnach kleiner als $\frac{2}{k}(M_s - m_s)$, und die Summe Teilintegrale kleiner als

$$\frac{2}{k}(M_1 - m_1) + \frac{2}{k}(M_2 - m_2) + \cdots \frac{2}{k}(M_r - m_r)$$

mit Auslassung derjenigen, in denen $\varphi(z)$ unstetig ist. Ersetzt man die hier kommenden Differenzen durch ihre grösste $M - m$, so wird die Summe kleiner

$$r \cdot \frac{2}{k}(M - m) = \frac{b - a - \alpha}{\pi}(M - m).$$

Mit zunehmendem k nähert sich aber $M - m$, folglich auch diese Summe Grenzwerte null. w. z. b. w.

1. Zusatz. Ersetzt man in dem Integral z durch $z - \gamma$, $\varphi(z - \gamma)$ durch $\varphi(z$ folgt, bei der Unbestimmtheit der Integrationsgrenzen, dass auch

$$\lim_{k=\infty} \int_a^b \varphi(z) \operatorname{Sin} k(z - \gamma) \cdot dx = 0,$$

wenn $\varphi(z)$ von $z = a$ bis b endlich und entweder stetig oder nicht unendlich oft stetig ist.

IX. Lehrsatz. *Für die Werte von z zwischen 0 und 2π besteht die Gleichung*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Sin\, n\, z}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{z}{2}. \tag{11}$$

Beweis. Wird die Identität

$$\tfrac{1}{2} + \operatorname{Cos} v + \operatorname{Cos} 2v + \operatorname{Cos} 3v + \cdots \operatorname{Cos} k\, v = \frac{\operatorname{Sin} k\, v + \operatorname{Sin}(k+1)\, v}{2 \operatorname{Sin} v}$$

ischen den Grenzen $v = \frac{1}{2}\pi$ und $v = z$ integriert, so kommt bei ungeradem k

$$\frac{z}{2} - \frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{Sin} z + \frac{\operatorname{Sin} 2z}{2} + \frac{\operatorname{Sin} 3z}{3} + \cdots \frac{\operatorname{Sin} k\, z}{k} \right) - \left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \cdots \pm \frac{1}{k} \right)$$

$$= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{z} \frac{1}{2 \operatorname{Sin} v} \cdot \operatorname{Sin} k\, v \cdot dv + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{z} \frac{1}{2 \operatorname{Sin} v} \cdot \operatorname{Sin}(k+1) \cdot dv.$$

Die beiden Integrale entsprechen den im vorigen Lehrsatz an die Funktion $\varphi(z)$ knüpften Bedingungen, so lange v die Null oder ein Vielfaches von π nicht durchreitet. Dies trifft zu, wenn z zwischen o und π liegt. Unter dieser Voraussetzung ben sie bei wachsendem k den Grenzwert Null. Das vierte Glied linkerhand wird mit chsendem k gleich $\frac{1}{4}\pi$. Demnach folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} n\, z}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{z}{2} \qquad (0 < z < \pi).$$

Dass diese Gleichung auch noch für $z = \pi$ gilt, ist ersichtlich. Sie gilt auch ch für Werte von z zwischen π und 2π, denn ein solcher Wert hat die Form $-y$, wo $o < y < \pi$, wodurch

$$\sum \frac{\operatorname{Sin} n\, z}{n} = \sum \frac{\operatorname{Sin} n\,(2\pi - y)}{n} = -\sum \frac{\operatorname{Sin} n\, y}{n} = -\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}.$$

Für die Grenzwerte $z = 0$ und $z = 2\pi$ hört die Gültigkeit der Gleichung (11) auf.

X. Aufgabe. *Den Wert der Summe*

$$f_1(x) = \lim_{k=\infty} \int_0^{\pi} f(z) \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k} Cos\, n(z+x) \right) \cdot dz$$

bestimmen, worin $f(z)$ von $z = 0$ bis π endlich und entweder stetig oder ht unendlich oft unstetig ist.

Auflösung. Es sei erstens $0 < x < \pi$.

Man schreibe

$$x) = \lim_{k=\infty} \int_0^{\pi} \frac{f(z)}{2 \operatorname{Sin}(z+x)} \cdot \operatorname{Sin} k\,(z+x) \cdot dz + \lim_{k=\infty} \int_0^{\pi} \frac{f(z)}{2 \operatorname{Sin}(z+x)} \cdot \operatorname{Sin}(k+1)\,(z+x) \cdot dz,$$

entsprechen unter der gemachten Voraussetzung über $f(z)$ beide Integrale den lingungen der Gleichung (10) und sind daher null.

Ist zweitens $x = 0$, so wird

$$f_1(0) = \lim \int_0^{\pi} f(z) \left(\tfrac{1}{2} + \Sigma \operatorname{Cos} n z\right) \cdot dz.$$

Teilt man das Integral in zwei Teile, in deren erstem z die Werte von 0 bis ε, un ε eine abnehmende positive Zahl verstanden, und im zweiten die Werte von ε bis durchläuft, so ist das zweite wie die vorigen null, und es bleibt noch

$$f_1(0) = \lim \int_0^{\varepsilon} f(z) \left(\tfrac{1}{2} + \Sigma \operatorname{Cos} n z\right) \cdot dz.$$

Nun ist die Grösse in der Klammer für $z = 0$ positiv $= \frac{1}{2} + k$ und wird daher sehr kleine z positiv bleiben. Man darf somit einen Mittelwert $f(\vartheta\varepsilon)$ $(o < \vartheta < 1)$ v $f(z)$ aus dem Integral als Faktor herausnehmen, wodurch nach vollzogener Integrati

$$f_1(0) = \lim f(\vartheta\varepsilon) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} + \sum \frac{\operatorname{Sin} n\varepsilon}{n}\right) = f(\vartheta\varepsilon) \cdot \frac{\pi}{2},$$

zufolge Gleichung (11). Nähert sich ε der Null, so wird nach der üblichen Schreibwei

$$f_1(0) = \frac{\pi}{2} \cdot f(+0).$$

Ist drittens $x = \pi$, so wird

$$f_1(\pi) = \lim \int_0^{\pi} f(z) \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \Sigma \operatorname{Cos} n (z + \pi)\right) \cdot dz.$$

Aus diesem Integrale verschwindet derjenige Teil, in welchem $z < \pi$ ist, u

es bleibt

$$f_1(\pi) = \lim \int_{\pi - \varepsilon}^{\pi} f(z) \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \Sigma \operatorname{Cos} n (z + \pi)\right) \cdot dz,$$

wo von der Klammergrösse das nämliche gilt wie im vorigen Falle, daher

$$f_1(\pi) = \lim f(\pi - \vartheta\varepsilon) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} + \sum \frac{\operatorname{Sin} n\varepsilon}{n}\right) = f(\pi - \vartheta\varepsilon) \cdot \frac{\pi}{2},$$

und bei abnehmendem ε:

$$f_1(\pi) = \frac{\pi}{2} \cdot f(\pi - 0).$$

Demnach ist schliesslich

$$f_1(x) = \int_0^{\pi} f(z) \left(\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Cos} n (z + x)\right) \cdot dx = 0 \qquad (0 < x < \pi), \qquad (1$$

$$f_1(0) = \frac{\pi}{2} \cdot f(+0), \qquad f_1(\pi) = \frac{\pi}{2} f(\pi - 0).$$

XI. Aufgabe. *Den Wert der Summe*

$$f_2(x) = \lim_{k = \infty} \int_0^{\pi} f(z) \left(\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k} \operatorname{Cos} n (z - x)\right) \cdot dz$$

zu bestimmen, worin $f(z)$ den nämlichen Bedingungen genügt, wie in der vorige Aufgabe.

Auflösung. Es sei erstens $0 < x < \pi$.

Man schreibe

$$= \lim_{k=\infty} \int_0^{\pi} \frac{f(z)}{2\,\mathrm{Sin}\,(z-x)} \cdot \mathrm{Sin}\,k\,(z-x) \cdot dz + \lim_{k=\infty} \int_0^{\pi} \frac{f(z)}{2\,\mathrm{Sin}\,(z-x)} \cdot \mathrm{Sin}\,(k+1)\,(z-x) \cdot dz.$$

Hier durchläuft $z-x$ die Werte von $-x<0$ bis $\pi-x>0$, wird daher einmal ür $z=x$. Ausserhalb der Umgebung dieses Wertes ist $\mathrm{Sin}\,(z-x)$ überall von null hieden, so dass der Bruch wieder die an $\varphi(z)$ in Gleichung (10) geknüpften Bedin- n erfüllt. Man erhält demnach durch Zerlegung:

$$f_2(x) = \lim \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(z) \left(\tfrac{1}{2} + \Sigma\,\mathrm{Cos}\,n\,(z-x)\right) \cdot dz = \lim \int_{x-\varepsilon}^{x} + \lim \int_{x}^{x+\varepsilon} \cdot$$

Die Grösse in der Klammer ist wieder für genügend kleine ε positiv, so dass man lwerte von $f(z)$ aus den Integralen herausnehmen darf. Das erste Integral geht nach leichter Reduktion über in

$$\lim \cdot f(x-\vartheta\varepsilon) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} + \sum \frac{\mathrm{Sin}\,n\varepsilon}{n}\right) = f(x-\vartheta\varepsilon) \cdot \frac{\pi}{2}$$

las zweite in

$$\lim \cdot f(x+\vartheta\varepsilon) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} + \sum \frac{\mathrm{Sin}\,n\varepsilon}{n}\right) = f(x+\vartheta\varepsilon) \cdot \frac{\pi}{2},$$

ss schliesslich $$f_2(x) = \frac{\pi}{2}\left(f(x-0) + f(x+0)\right).$$

Wenn $f(x)$ eine stetige Funktion ist, so wird $f(x-0) = f(x+0)$ und man hat h $$f_2(x) = \pi \cdot f(x)$$

Zweitens gilt für $x=0$ die nämliche Rechnung wie bei $f_1(0)$ und ergibt

$$f_2(0) = \pi \cdot f(+0)$$

Endlich ist für $x=\pi$

$$f_2(\pi) = \lim \int_0^{\pi} f(z) \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \Sigma\,\mathrm{Cos}\,n\,(z-\pi)\right) \cdot dz.$$

$\mathrm{s}\,n\,(z-\pi) = \mathrm{Cos}\,n\,(z+\pi)$, so gilt auch hier die Rechnung von $f_2(\pi)$ und ergibt

$$f_2(\pi) = \pi \cdot f(\pi-0).$$

Demnach ist nun

$$) = \int_0^{\pi} f(z) \left(\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cos}\,n\,(z-x)\right) \cdot dz = \pi \cdot \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \quad (0<x<\pi) \qquad (13)$$

$$f_2(0) = \pi \cdot f(+0), \qquad f_2(\pi) = \pi \cdot f(\pi-0).$$

Bemerkung. Die Gleichungen (12) und (13) bilden die Grundlage für sämtliche klungen einer Funktion in Reihen, die nach den Sinus oder Kosinus der Viel- ihrer Veränderlichen oder nach beiden fortschreiten. Beschränkt man die uchung nicht auf Integrale mit den Grenzen 0 und π, sondern dehnt sie auf le mit beliebig zwischen 0 und 2π liegenden Grenzen aus, so ergeben sich

weitere brauchbare Formeln. Für den vorliegenden Zweck genügt es an der Ad
und der Subtraktion der Gleichungen (12) und (13), wodurch folgende zwei
ungen erhalten werden:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(z)\,dz + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cos}\,n\,x \cdot \int_0^{\pi} f(z)\,\mathrm{Cos}\,n\,z \cdot dz \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sin}\,n\,x \cdot \int_0^{\pi} f(z)\,\mathrm{Sin}\,n\,z \cdot dz \qquad (0 < x < \pi).$$

Hat $f(x)$ zwei verschiedene Werte $f(x-0)$ und $f(x+0)$, so geben beide
deren arithmetisches Mittel.

IV. Näherungsformeln.

I. Ersetzt man in der Gleichung (14) die willkürliche Funktion $f(z)$ durch $f(z$
und nimmt sie als einwertig an, so kommt

$$f(x+r\pi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(z+r\pi)\,dz + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cos}\,n\,x \cdot \int_0^{\pi} f(z+r\pi)\,\mathrm{Cos}\,n\,z \cdot dz$$

oder, wenn in den Integralen z in $z-r\pi$ umgesetzt wird,

$$f(x+r\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{r\pi}^{r\pi+\pi} f(z)\,dz + \frac{2}{\pi}\sum (-1)^{nr}\mathrm{Cos}\,n\,x \cdot \int_{r\pi}^{r\pi+\pi} f(z)\,\mathrm{Cos}\,n\,z \cdot dz$$

und hieraus für $x=0$ und $x=\pi$

$$f(r\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{r\pi}^{r\pi+\pi} f(z)\,dz + \frac{2}{\pi}\sum (-1)^{nr}\int_{r\pi}^{r\pi+\pi} f(z)\,\mathrm{Cos}\,n\,z \cdot dz$$

$$f(r\pi+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{r\pi}^{r\pi+\pi} f(z)\,dz + \frac{2}{\pi}\sum (-1)^{nr+n}\int_{r\pi}^{r\pi+\pi} f(z)\,\mathrm{Cos}\,n\,z \cdot dz.$$

Bei der Addition beider Gleichungen fallen die Glieder mit den ungera
weg, und man bekommt

$$\tfrac{1}{2}\big(f(r\pi)+f(r\pi+\pi)\big) = \frac{1}{\pi}\int_{r\pi}^{r\pi+\pi} f(z)\,dz + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{r\pi}^{r\pi+\pi} f(z)\,\mathrm{Cos}\,2m\,z \cdot dz.$$

Gibt man nun dem r der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, 3, \cdots (k-1)$, so ergi
Summe aller entstehenden Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \cdots f(k\pi-\pi) + \tfrac{1}{2}f(k\pi)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{k\pi} f(z)\,dz + \frac{2}{\pi}\sum \int_0^{k\pi} f(z)\,\mathrm{Cos}\,2m$$

Setzt man schliesslich $f(z) = F\left(a + \frac{zh}{\pi}\right)$ und substituiert in den Integralen $\frac{\pi(x-a)}{h}$, so kommt

$$\tfrac{1}{2}F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots F(b-h) + \tfrac{1}{2}F(b)$$
$$= \frac{1}{h}\int_a^b F(x)\,dx + \frac{2}{h}\sum_{m=1}^{\infty}\int_a^b F(x)\,\mathrm{Cos}\,\frac{2m\pi(x-a)}{h}\,dx, \qquad (16)$$

$$b = a + kh, \qquad h = \frac{b-a}{k}.$$

Diese Formel kann zweierlei Zwecken dienen, entweder zur näherungsweisen ierung einer Reihe oder zur näherungsweisen Berechnung eines bestimmten rals. Zu beiden Zwecken ist die Wertung der letzten Integralsumme erfor- h. Hiefür bedient man sich der partialen Integration. Es ist allgemein

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{Cos}\,\frac{2m\pi(x-a)}{h}\,dx$$
$$= \frac{h^2}{(2\pi)^2 m^2}\left(F'(b) - F'(a)\right) - \frac{h^2}{(2\pi)^2 m^2}\int_a^b F''(x)\,\mathrm{Cos}\,\frac{2m\pi(x-a)}{h}\,dx.$$

Bei mehrmaliger Anwendung dieser Formel geht die genannte Integralsumme in

$$\tfrac{1}{2}C_2h^2\left(F'(b) - F'(a)\right) - \tfrac{1}{2}C_4h^4\left(F'''(b) - F'''(a)\right)$$
$$+ \cdots (-1)^{r-1}\cdot\tfrac{1}{2}C_{2r}h^{2r}\left(F^{(2r-1)}(b) - F^{(2r-1)}(a)\right) + R,$$

$$C_{2r} = \frac{2}{(2\pi)^{2r}}\left(1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{4^{2r}} + \cdots\right)$$

$$R = (-1)^r\frac{h^{2r}}{2(2\pi)^{2r}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2r}}\int_a^b F^{(2r)}(x)\,\mathrm{Cos}\,\frac{2m\pi(x-a)}{h}\,dx.$$

In dem Fall, wo $F^{(2r)}(x)$ innerhalb des Integrals das Zeichen nicht ändert, was und im folgenden vorausgesetzt wird, ist der absolute Wert der Summe in R

r als $$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2r}}\int_a^b F^{(2r)}(x)\,dx = \left(1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \cdots\right)\cdot\left(F^{(2r-1)}(b) - F^{(2r-1)}(a)\right).$$

is $$R < \tfrac{1}{2}C_{2r}h^{2r}\left(F^{(2r-1)}(b) - F^{(2r-1)}(a)\right),$$

kleiner als das vorhergehende Glied des Ausdrucks für die Integralsumme. ich hat man schliesslich die Bestimmung

$$h\left\{\tfrac{1}{2}F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots F(b-h) + \tfrac{1}{2}F(b)\right\} \qquad (17)$$
$$= \int F(x)\,dx + C_2h^2\left(F'(b) - F'(a) - C_4h^4(F'''(b) - F'''(a)\right) + C_6h^6\left(F^{V}(b) - F^{V}(a)\right) - \cdots,$$

der absolute Wert des Fehlers jeweilen kleiner ist als das zuletzt berechnete der Reihe.

Um die Werte der C_{2r} zu bestimmen, bedient man sich am einfachste ganzen rationalen Funktion für $F(x)$ durch die Annahmen

$$F(x) = x^s, \quad a = 0, \quad h = 1, \quad b = n.$$

Man erhält leicht:

$$1^s + 2^s + 3^s + \cdots n^s = \frac{n^{s+1}}{s+1} + \frac{n^s}{2} + \frac{1}{2}\binom{s}{1} B_2 n^{s-1} - \frac{1}{4}\binom{s}{3} B_4 n^{s-3} + \frac{1}{6}\binom{s}{5} B_6 n^{s-}$$

worin abkürzungsweise

$$B_{2r} = (2r)!\, C_{2r} = \frac{2 \cdot (2r)!}{(2\pi)^{2r}} \left(1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{4^{2r}} + \cdots\right)$$

gesetzt wurde (Bernoullische Zahlen), und das letzte Glied rechts entweder n^1 enthält, je nachdem s eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Die A $n = 1$ gibt die Rekursionsformel

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\binom{s}{1} B_2 - \frac{1}{4}\binom{s}{3} B_4 + \frac{1}{6}\binom{s}{5} B_6 - \cdots,$$

aus der sich durch die aufeinanderfolgenden Annahmen $s = 1, 2, 3, 4, \cdots$ die aus diesen die C ergeben:

$$B_2 = \tfrac{1}{6}, \quad B_4 = \tfrac{1}{30}, \quad B_6 = \tfrac{1}{42}, \quad B_8 = \tfrac{1}{80}, \quad B_{10} = \tfrac{5}{66}, \quad B_{12} = \tfrac{691}{2730}, \cdots$$

$$C_2 = \tfrac{1}{12}, \quad C_4 = \tfrac{1}{720}, \quad C_6 = \tfrac{1}{30 \cdot 240}, \quad C_8 = \tfrac{1}{1 \cdot 209 \cdot 600}, \quad C_{10} = \tfrac{1}{47 \cdot 900 \cdot 160}, \cdots$$

oder in Dezimalbruchform:

$$C_2 = 0{,}08333\,33333 \qquad C_8 = 0{,}00000\,08267$$
$$C_4 = 0{,}00138\,88889 \qquad C_{10} = 0{,}00000\,00209$$
$$C_6 = 0{,}00003\,30686 \qquad C_{12} = 0{,}00000\,00005.$$

Um die Gleichung (17) handlicher zu machen, setze man

$$F(a + rh) = y_r,$$
$$F(a) = y_0, \qquad F(b) = F(a + kh) = y_k$$
$$F'(a) = y'_0, \qquad F'(b) = y'_k.$$

Bezeichnet man noch das Integral $\int_a^b F(x)\,dx$ mit dem Buchstaben VZ, so sich die genannte Gleichung:

$$h\left(\tfrac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \cdots y_{k-1} + \tfrac{1}{2} y_k\right) = V + C_2 h^2 \left(y'_k - y'_0\right) - C_4 h^4 \left(y'''_k - y'''_0\right)$$
$$+ C_6 h^6 \left(y^V_{2r} - y^V_0\right) - \cdots \pm C_{2p} h^{2p} \left(y_k^{(2p-1)} - y\right.$$

wo der Fehler dem absoluten Werte nach kleiner ist als das letzte Glied.

II. Trägt man in einer Ebene die Veränderliche x als Abszisse und $y =$ Endpunkte von x als senkrechte Ordinate ab, so liegen die Endpunkte de einer Kurve, und das Integral V gibt den Inhalt der Fläche an, die begrenzt ist Kurve und der Abszissenaxe einerseits und von den Ordinaten y_0 und y_k ande

Die Ordinaten y_1, y_2, $y_3 \cdots$ teilen diese Fläche in k Teile. Verbindet m Endpunkte durch Sehnen, so erhält man k Trapeze, deren Gesamtinhalt du Ausdruck links der vorigen Gleichung angegeben wird und als angenäherter W

grals gelten kann. Die dem Integral angefügten Glieder rechts sind dann als ektur dieses Wertes anzusehen.

Eine stärkere Annäherung erhält man durch die Simpsonsche Formel

$$\tfrac{1}{3}h\left(y_0+y_{2r}+2(y_2+y_4+\cdots y_{2r-2})+4(y_1+y_3+\cdots y_{2r-1})\right),$$

n man die Grundlinie $b-a$ in eine gerade Anzahl $k=2r$ gleiche Teile teilt. er Ausdruck wird erhalten, wenn man je zwei Teile der Fläche zusammennimmt durch die Endpunkte ihrer drei Ordinaten einen Parabelbogen legt, dessen Axe y-Axe parallel ist. In einem solchen Doppelteil ist dann y eine quadratische ktion von x, und sein Inhalt erweist sich als Inhalt eines Obelisken, dessen Grund- en den beiden äussern Ordinaten und der Mittelschnitt der mittlern Ordinate prechen, und dessen Höhe $=2h$ ist. Die Inhalte dieser Doppelteile sind somit Reihe nach

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}\left(y_0+y_2+4y_1\right),\\
&\tfrac{1}{3}\left(y_2+y_4+4y_3\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\tfrac{1}{3}\left(y_{2r-4}+y_{2r-2}+4y_{2r-3}\right),\\
&\tfrac{1}{3}\left(y_{2r-2}+y_{2r}+4y_{2r-1}\right)
\end{aligned}$$

haben zur Summe den oben angegebenen Ausdruck. Es ist nun die Korrektur estimmen.

Die Gleichung (17a) gibt

$$\begin{aligned}
y_0+4y_1+4y_2+\cdots 4y_{2r-1}+2y_{2r}\big) = 4V &+4C_2h^2\left(y'_{2r}-y'_0\right)-4C_4h^4\left(y'''_{2r}-y'''_0\right)\\
&+4C_6h^6\left(y^{V}_{2r}-y^{V}_0\right)-\cdots\pm 4C_{2p}h^{2p}\left(y^{(2p-1)}_{2r}-y^{(2p-1)}_0\right).
\end{aligned}$$

Andrerseits gibt sie nach Substitution von $2h$ für h

$$\begin{aligned}
+2y_2+\cdots 2y_{2r-1}+y_{2r}\big) = V &+4C_2h^2\left(y'_{2r}-y'_0\right)-16C_4h^4\left(y'''_{2r}-y'''_0\right)\\
&+64C_6h^6\left(y^{V}_{2r}-y^{V}_0\right)-\cdots\pm 2^{2p}C_{2p}h^{2p}\left(y^{(2p-1)}_{2r}-y^{(2p-1)}_0\right),
\end{aligned}$$

i in jeder der beiden Gleichungen der Fehler dem absoluten Werte nach kleiner ls das zuletzt berechnete Glied der Reihe rechterhand.

Die Subtraktion ergibt:

$$\begin{aligned}
y_0+4y_1+2y_2+\cdots 2y_{2r-2}+4y_{2r-1}+y_{2r}\big) = V &+4C_4h^4\left(y'''_{2r}-y'''_0\right)\\
&-20C_6h^6\left(y^{V}_{2r}-y^{V}_0\right)+\cdots\mp\tfrac{1}{3}\left(2^{2p}-4\right)C_{2p}\left(y^{(2p-1)}_{2r}-y^{(2p-1)}_0\right), \qquad (18)
\end{aligned}$$

der absolute Wert des Fehlers kleiner ist als das letzte Glied, wenn darin statt -4 gesetzt wird. Die dem Integral nachfolgenden Glieder stellen die ktur der Simpsonschen Formel dar und gestalten dieselbe infolge des Wegfalls liedes mit h^2 in der Tat kleiner als die Korrektur in der Formel (17a).

Die Subtraktion der zweiten Gleichung von der vierfach genommenen ersten t ferner

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{5}\left(y_0+y_{2r}\right)+7\left(y_2+y_4+\cdots y_{2r}\right)+8\left(y_1+y_3+\cdots y_{2r-1}\right)\big) = V &+\tfrac{4}{5}C_2h^2\left(y'_{2r}-y'_0\right)\\
&-\tfrac{16}{5}C_6h^6\left(y'''_{2r}-y'''_0\right)+\cdots\mp\tfrac{1}{5}\left(2^{2p}-16\right)C_{2p}h^{2p}\left(y^{(2p-1)}_{2r}-y^{(2p-1)}_0\right), \qquad (19)
\end{aligned}$$

wo der absolute Wert des Fehlers kleiner ist als das letzte Glied, wenn darin statt — 16 gesetzt wird.

Unter Mitnahme des ersten auf V folgenden Gliedes $\frac{1}{15}h^2\left(y'_{2r} - y'_0\right)$ gibt d druck linkerhand schon eine sehr starke Annäherung an den Wert des Integ da der Fehler dann nur noch von der Ordnung h^6 wird.

III. Eine weitere einfache, der Simpsonschen ähnliche Formel erhält man man die Grundlinie b — a in k = 3r Teile teilt, sodann je drei Flächenteile zusa nimmt und durch die Endpunkte ihrer vier Ordinaten den Bogen einer ku Parabel legt, so dass y inbezug auf x eine Funktion dritten Grades ist. Den von V auf Seite 17 (2. Beispiel) zufolge sind dann die Inhalte dieser dre Flächenteile

$$\frac{3}{8}h\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right),$$
$$\frac{3}{8}h\left(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{3}{8}h\left(y_{3r-6} + 3y_{3r-5} + 3y_{3r-4} + y_{3r-3}\right)$$
$$\frac{3}{8}h\left(y_{3r-3} + 3y_{3r-2} + 3y_{3r-1} + y_{3r}\right)$$

und ihr Gesamtinhalt wird:

$$\frac{3}{8}h\left(y_0 + y_{3r} + 2\left(y_3 + y_6 + \cdots y_{3r-3}\right) + 3\left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \cdots y_{3r-1} + y_{3r-}\right.\right.$$

Die Korrektur gegenüber dem wahren Inhalt der Fläche wird wie folgt er Die Gleichung (17a) gibt

$$h\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots 2y_{3r-3} + 2y_{3r-2} + 2y_{3r-1} + y_{3r}\right) = 2V + 2C_2h^2\left(y'_{3r}\right.$$
$$- 2C_4h^4\left(y'''_{3r} - y'''_0\right) + 2C_6h^6\left(y^{V}_{3r} - y^{V}_0\right) - \cdots \pm 2C_{2p}h^{2p}\left(y^{(2p-1)}_{3r} - y^{(2p}_0\right.$$

und die Substitution 3h für h in dieser Gleichung gibt

$$3h\left(y_0 + 2y_3 + \cdots 2y_{3r-3} + y_{3r}\right) = 2V + 18C_2h^2\left(y'_{3r} - y'_0\right) - 162C_4h^4\left(y'''_{3r} - y'''_0\right.$$
$$+ 1458C_6h^6\left(y^{V}_{3r} - y^{V}_0\right) - \cdots \pm 2\cdot 3^{2p}C_{2p}h^{2p}\left(y^{(2p-1)}_{3r} - y\right.$$

Eliminiert man die Glieder mit h^2, so kommt

$$\frac{3}{8}h\left(y_0 + y_{3r} + 2\left(y_3 + y_6 + \cdots y_{3r-3}\right) + 3\left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_{3r-2} + y_{3r-1}\right)\right)$$
$$= V + 9C_4h^4\left(y'''_{3r} - y'''_0\right) - \cdots \mp \frac{1}{8}\left(3^{2p} - 9\right)C_{2p}h^{2p}\left(y^{(2p-1)}_{3r} - y\right.$$

wo der absolute Wert des Fehlers kleiner ist als das letzte Glied, wenn dar statt — 9 gesetzt wird, und die dem Integral V nachfolgenden Glieder die Ko des Ausdrucks linkerhand bilden.

Die Elimination der Glieder mit h^4 gibt ferner

$$\frac{3}{80}h\left(13\left(y_0 + y_{3r}\right) + 26\left(y_3 + y_6 + \cdots y_{3r-3}\right) + 27\left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \cdots y_{3r-2} + y_{3r-1}\right.\right.$$
$$= V + \frac{9}{10}C_2h^2\left(y'_{3r} - y'_0\right) - \frac{81}{10}C_6h^6\left(y^{V}_{3r} - y^{V}_0\right) + \cdots \mp \frac{3^{2p} - 81}{80}C_{2p}h^{2p}\left(y^{(2p-1)}_{3r} - y_{0}^{(}\right.$$

Der absolute Wert des Fehlers ist kleiner als das letzte Glied, worin + 8 — 81 gesetzt wird.

Auch diese Formel enthält bei Berücksichtigung des ersten Korrekturgliedes $(y'_{3r} - y'_0)$ in den folgenden Gliedern nur nach h^6 und gibt für das Integral V n genauern Wert als die Simpsonsche.

IV. Teilt man die Grundlinie b—a in $k = 4r$ Teile, so erhält man noch eine erkenswerte Formel zur Berechnung von V. Die Gleichung (17a) gibt:

$$y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + \cdots y_{4r}) = 2V + 2C_2h^2(y'_{4r} - y'_0) - 2C_4h^4(y'''_{4r} - y'''_0) + 2C_6h^6(y^V_{4r} - y^V_0) - \cdots \pm 2C_{2p}h^{2p}(y^{(2p-1)}_{4r} - y^{(2p-1)}_0)$$

hieraus durch Substitution von 2h für h:

$$y_0 + 4y_2 + 4y_4 + \cdots 2y_{4r}) = 2V + 8C_2h^2(y'_{4r} - y'_0) - 32C_4h^4(y'''_{4r} - y'''_0) + 128C_6h^6(y^V_{4r} - y^V_0) - \cdots \pm 2\cdot 2^{2p}C_{2p}h^{2p}(y^{(2p-1)}_{4r} - y^{(2p-1)}_0)$$

durch Substitution von 4h für h

$$y_0 + 8y_4 + \cdots 4y_{4r}) = 2V + 32C_2h^2(y'_{4r} - y'_0) - 512C_4h^4(y'''_{4r} - y'''_0) + 8192C_6h^6(y^V_{4r} - y^V_0) - \cdots \pm 2\cdot 4^{2p}C_{2p}h^{2p}(y^{(2p-1)}_{4r} - y^{(2p-1)}_0).$$

Multipliziert man die erste dieser drei Gleichungen mit 64, die zweite mit —20 addiert sie zur dritten, so kommt

$$(7(y_0 + y_{4r}) + 12(y_2 + y_6 + \cdots y_{4r-2}) + 14(y_4 + y_8 + \cdots y_{4r-4}) + 32(y_1 + y_3 + \cdots y_{4r-1})) = V + 64C_6h^6(y^V_{4r} - y^V_0) - \cdots \pm 2(64 - 20.2^{2p} + 4^{2p})C_{2p}h^{2p}(y^{(2p-1)}_{4r} - y^{(2p-1)}_0). \quad (22)$$

Der Fehler ist kleiner als das letzte Glied, wenn darin $+ 20.2^{2p}$ statt -20.2^{2p} etzt wird.

Auch diese Formel enthält in der Korrektur nur noch Glieder von mindestens 6. Ordnung inbezug auf h.

Bemerkung. Unter der Annahme $r = 1$ erhält man aus den Gleichungen (18), und (22) folgende Bestimmungen:

$$\tfrac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2) = V + 4C_4h^4(y'''_2 - y'''_0) - \cdots,$$

$$\tfrac{3}{8}h(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) = V + 9C_4h^4(y'''_3 - y'''_0) - \cdots,$$

$$\tfrac{2}{45}h(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) = V + 64C_6h^6(y^V_4 - y^V_0) - \cdots,$$

ei h den Abstand je zweier Ordinaten von einander bedeutet. Ist nun y be- ingsweise eine quadratische, kubische oder biquadratische Funktion von x, so chwinden die dem V angehängten Glieder und die Ausdrücke linkerhand ent- chen den Formeln für den Inhalt von Säulen, deren parallele Schnitte derartige ktionen ihrer Abstände von einer Grundfläche sind. Die erste entspricht der Formel die zweite dem V auf Seite 17 (2. Beispiel), und die dritte kann nach der auf e 16 entwickelten Methode ebenfalls leicht verifiziert werden.

V. Ausgleichungen.

In den Anwendungen der Mathematik sieht man sich oft vor die Aufgabe ge
eine Folge von Werten einer Funktion, die durch Beobachtung gefunden und
mit unbekannten Fehlern behaftet sind, derart auszugleichen, dass sie eine g
mässige Reihe darbieten. Die Aufgabe ist eine unbestimmte und lässt unendlich
Lösungen zu. Kennt man den analytischen Ausdruck für die Funktion, so gib
Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Methode der kleinsten Quadrate das Mitte
die wahrscheinlichsten Werte der konstanten Elemente der Funktion zu bestim
Ist aber die Natur der Funktion selbst unbekannt, so fehlt jeder Anhaltspunkt
man ist zu willkürlichen Annahmen gezwungen, die jedoch mit dem Charakte
Funktion nicht in Widerspruch stehen dürfen.

Den Charakter erkennt man am besten durch eine graphische Darstellung,
man die Werte der Veränderlichen als Abszissen und die zugehörigen Wert
Funktion als Ordinaten in einem rechtwinkligen Axensystem aufträgt und die
punkte der Ordinaten verbindet. In manchen Fällen genügt es dann, eine
von stetigem Verlauf zu zeichnen, die sich den Endpunkten der Ordinaten mög
nahe anschliesst und so die ausgeglichenen Werte der Funktion darstellt. Ha
es sich aber um Zahlen, die eine grössere Genauigkeit verlangen, so wird ma
eine solche Linie eine bestimmte Funktion der Veränderlichen wählen, die
wenigstens in einem gewissen Bereiche dem mutmasslichen Verlaufe der w
Funktion anschmiegt. Für Funktionen, deren darstellende Linie nur nach einer
gekrümmt ist, eignet sich hiezu besonders die Parabel.

Es soll hier der Fall behandelt werden, wo die Werte der Veränderlichen
welche die Funktionswerte durch Beobachtung bestimmt wurden, je um eine E
fortschreiten. Man bezeichne sie mit

$$\cdots y_{-2},\ y_{-1},\ y_0,\ y_1,\ y_2, \cdots,$$

und es sei y_0 der auszugleichende Funktionswert. In dem Bereich von y_{-2} b
werde die darstellende Linie als Parabel angenommen:

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

so hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_{-2} &= \alpha - 2\beta + 4\gamma \\ y_{-1} &= \alpha - \beta + \gamma \\ y_0 &= \alpha \\ y_1 &= \alpha + \beta + \gamma, \end{aligned}$$

woraus durch Elimination von α, β, γ:

$$y_{-2} + 3y_0 = y_1 + 3y_{-1},$$

eine Gleichung, die sich auch aus Gleichung (5), Seite 8, ergibt, wenn man y_{-2}
y_1 als Grundflächen, y_{-1} und y_0 als Drittelschnitte eines Obelisken ansieht. Da
erhält man einen mit y_{-2}, y_{-1} und y_1 ausgeglichenen Wert von y_0

$$(y_0) = \tfrac{1}{3}(y_1 + 3y_{-1} - y_{-2}).$$

Das nämliche Verfahren lässt sich auf den Bereich von y_{-1} bis y_2 anwenden
gibt: $$y_{-1} + 3y_1 = y_2 + 3y_0,$$
aus ein mit y_{-1}, y_1 und y_2 ausgeglichenes y_0 folgt:
$$[y_0] = \tfrac{1}{3}(3y_1 + y_{-1} - y_2).$$

Mit Werten von y, deren Bereich y_0 nur am Anfang oder am Ende oder gar
t enthält, ist es nicht statthaft, eine Ausgleichung vorzunehmen, wie es auch bei
r graphischen Ausgleichung nicht wohl angeht, die Linie über die festgestellten
kte hinaus zu verlängern. Zu den beiden ausgeglichenen Werten gesellt sich nun
beobachtete y_0 selbst, und zwar mit doppeltem Gewicht. Denn jenen haften
t nur die Beobachtungsfehler der in die Rechnung gezogenen y_{-2}, y_{-1}, y_1, y_2 an,
ern auch die Mangelhaftigkeit der Hypothese über die Parabelform der Linie,
rend dieses nur mit dem Beobachtungsfehler behaftet ist. Der ausgeglichene
t von y_0 ist daher

$$y_0' = \frac{(y_0) + [y_0] + 2y_0}{4} = \frac{6y_0 + 4(y_{-1} + y_1) - (y_{-2} + y_2)}{12}.$$

Setzt man abkürzend allgemein
$$r_r = y_{-r} + y_r,$$
ird
$$y_0' = \frac{6y_0 + 4r_1 - r_2}{12}. \qquad (23)$$

Gewöhnlich reicht man mit dieser Ausgleichung nicht aus, sondern ist genötigt,
lbe zu wiederholen, und erhält dann als zweite Ausgleichung

$$y_0'' = \frac{70y_0 + 40r_1 + 4r_2 - 8r_3 + r_4}{144}. \qquad (24)$$

An den so erhaltenen Werten kann man, wenn nötig, die Ausgleichung noch
al wiederholen, sei es mit der Formel (23) oder mit (24).

Bei der Ausgleichung nach (23) werden nur je zwei zu beiden Seiten von y_0
nde Beobachtungswerte von y in Mitleidenschaft gezogen, bei (24) je vier und
den Wiederholungen je sechs oder acht.

Als Beispiel wähle ich die schweizerische Mortalitätstafel für das männliche
hlecht, die das eidgenössische statistische Bureau im Jahre 1901 veröffentlicht
Ehe, Geburt und Tod in der schweizer. Bevölkerung während der zwanzig Jahre
—90, 3. Teil, Tab. 9). Sie gründet sich auf die Volkszählungen vom 1. Dezember
und 1888 und die Angaben des Zivilstandes in dem dazwischen liegenden Zeit-
ie. Die Tatsache, dass die Geburtsjahre, deren Jahrzahl mit 0 oder 5 endigt, bei
Volkszählungen gewöhnlich übersetzt sind, und der Umstand, dass bei der Auf-
ng der Zahl der Lebenden aus den einzelnen Geburtsjahren die Aus- und Ein-
nderten von dem Rechner gleichmässig auf die einzelnen Zählungsjahre verteilt
en sind, machen eine ausgiebige Ausgleichung notwendig. Diese wurde daher
ederholter Anwendung der Formel (24) vorgenommen. Die ausgeglichene Zahl der
eziffer ergab sodann die Mortalitätstafel in der gewöhnlichen Form mit Angabe der
nden a_x. Die Ergebnisse, die in der nachstehenden Tabelle mitgeteilt sind, weichen
nbedeutend von denjenigen des eidgen. statistischen Bureaus (l. c. Tab. 11) ab.

Schweizerische Mortalitätstafel für Männer.

Alter, x	Sterbeziffer, y roh	Sterbeziffer, y ausgeglichen	Lebende, a_x
10	0,003 205	0,003 302	7411
11	0,003 134	0,003 037	7387
12	3 863	2 912	7364
13	2 928	2 921	7343
14	2 098	3 070	7321
15	3 378	3 402	7299
16	0,003 880	0,003 949	7274
17	4 632	4 659	7245
18	5 473	5 358	7211
19	6 010	5 921	7173
20	6 060	6 332	7130
21	0,006 934	0,006 635	7085
22	6 676	6,840	7038
23	7 110	7 016	6990
24	6 994	7 220	6941
25	7 718	7 445	6891
26	0,007 548	0,007 639	6840
27	7 725	7 835	6787
28	8 205	8 069	6734
29	8 244	8 327	6680
30	8 712	8 596	6624
31	0,008 678	0,008 886	6567
32	9 463	9 226	6509
33	9 524	9 645	6449
34	9 948	0,010 146	6387
35	0,010 864	10 588	6322
36	0,011 024	0,010 846	6255
37	10 582	11 000	6187
38	11 538	11 284	6119
39	11 693	11 821	6050
40	12 458	12 554	5978
41	0,013 482	0,013 307	5903
42	13 890	13 908	5824
43	14 493	14 354	5744
44	14 443	14 781	5661
45	15 486	15 271	5578
46	0,015 953	0,015 802	5493
47	16 206	16 458	5406
48	17 286	17 386	5317
49	18 842	18 596	5224
50	19 612	19 863	5127
51	0,021 242	0,020 957	5025
52	21 968	21 856	4920
53	22 522	22 834	4812
54	24 063	24 160	4703
55	26 094	25 787	4589

Alter, x	Sterbeziffer, y roh	Sterbeziffer, y ausgeglichen	Leben, a_x
56	0,027 438	0,027 572	447
57	29 770	29 601	434
58	31 442	32 072	421
59	35 058	34 760	408
60	37 960	37 150	394
61	0,038 364	0,039 157	379
62	41 845	41 418	364
63	43 734	44 498	349
64	48 908	48 396	334
65	52 666	52 628	317
66	0,056 720	0,056 836	301
67	61 290	60 994	284
68	66 034	65 663	266
69	69 544	71 404	249
70	79 926	78 349	231
71	0,085 442	0,085 567	213
72	92 170	93 126	195
73	0,102 238	0,101 009	176
74	109 130	109 613	159
75	118 360	119 213	141
76	0,130 304	0,129 570	124
77	140 860	140 166	108
78	150 302	151 205	93
79	161 778	162 905	79
80	176 213	174 364	66
81	0,185 764	0,184 672	54
82	193 213	194 864	44
83	203 276	206 298	36
84	226 003	218 692	28
85	227 293	231 790	22
86	0,245 833	0,247 663	17
87	274 373	269 361	12
88	283 097	295 484	9
89	331 608	318 032	6
90	336 465	332 054	4
91	0,336 524	0,343 399	3
92	358 037	365 941	2
93	408 806	409 280	1
94	470 126	461 233	
95	449 671	507 004	
96	0,602 162	—	
97	326 923	—	
98	300 000	—	
99	625 000	—	

Druckfehler.

Seite 8, Zeile 8 v. o. lies F statt ω.
» 8, » 10 » » » F » ω.

R. 30.4.02.

Differenzialrechnung.

älteste Ausgabe der ersten Hefte.

von

Dr. Adolf Kneser.

Stuttgart bei Julius Maier, circa 1883.

Differential-Rechnung.

(1. Teil.)

einfache Differentiation entwickelter (explizieter) unktionen von einer unabhängig Veränderlichen.

Inhalt:

I. Erläuternde Fragen mit Antworten, über: Begriff und Einteilung der Funktionen, — Variabelen und Konstanten etc., nebst vielen Beispielen.

II. Erläuternde Fragen mit Antworten, über: Differenzenquotient, Differentiale, Differentialquotient etc.

III. Entwicklung des 1. Differentialquotienten explizieter Funktionen von einer unabhängig Veränderlichen. — Differentialquotient: einer Potenz, einer algebraischen Summe von Funktionen, einer konstanten Grösse, eines Produktes, eines Bruches, einer Exponentialgrösse, einer logarithmischen Grösse, der trig. und cyklometrischen Funktionen etc. — mit vielen gelösten und Anhängen von ungelösten Aufgaben.

I.

iuternde Fragen mit Antworten, über: Begriff und Einung der Funktionen, — Variabelen und Konstanten etc. nebst vielen Beispielen.

age 1. Was ist in der Mathemanter: **Veränderlichen** (Variabelen) **Konstanten**, was ferner unter: **Funkeiner veränderlichen Grösse** zu verı?

. 1. Im folgenden soll stets die Grösse die **unabhängig** Veränderliche und die y als die **abhängig** Veränderliche an- n werden; ausgenommen in den Fällen, chen dies besonders angegeben ist.

ıl. 2. Unter **Funktion** ist jede Grösse zu ten, welche auf irgend eine Weise von nderen Grösse abhängig ist.

Antwort. Ist die Beziehung zweier unbekannten Grössen x und y durch eine Gleichung ausgedrückt, so kann eine derselben beliebig gewählt werden — ist dies z. B. die Unbekannte x — so wird sich für jedes gewählte x, ein entsprechender Wert für die andere Unbekannte y aus der Gleichung berechnen lassen.

Die Unbekannten x und y ändern mit jeder neuen Wahl von x ihren Wert, heissen deshalb: die **Veränderlichen** oder **Variabelen** der Gleichung, während alle übrigen Grössen, die in derselben vorkommen, die **Unveränderlichen** oder **Konstanten** genannt werden. Da die unbekannte Grösse x beliebig gewählt wer-

Beispiel 1.

Gegeben sei die Gleichung:

$$y + 3x - 7x^2 = 5.$$

Wird hierin für x einen beliebigen Wert, z. B. $x = 2$ gewählt, so ist:

$$y + 6 - 28 = 5$$

und hieraus ergibt sich:

$$y = 27$$

Diese Grösse y war in der gegebenen Gleichung abhängig von x, ist daher **eine Funktion von x.**

den kann, so heisst dieselbe **unabhängig** Variabele (Erkl. 1), die andere Unbekannte y, wei der Wahl der Grösse x abhä **abhängig** Variabele oder **Funk** klärung 2) **der veränderlichen** genannt wird. Die weiteren I gen der beiden unbekannten sind in der gegebenen Gleich halten (Beispiel 1).

Frage 2. Auf welche Weise wird der Zusammenhang zwischen der unabhängig Variabelen (x) und ihrer Funktion (y) am einfachsten dargestellt, und nach welchen 2 Hauptgattungen werden demnach die Funktionen unterschieden?

Antwort. Die Beziehung der **unabhängig** Variabelen x u **Funktion** (der abhängig Varia ist, wie erwähnt, stets durch e chung gegeben. Um nun den menhang zwischen der unabhä riabelen x und ihrer Funktion y gegebenen Gleichung sofort b zu können, löst man diese Gl nach der letzteren auf (Be Demnach können die Funktion Hauptgattungen unterschieden

a) in solche, bei welchen die der Funktion (y) und der una veränderlichen Grösse (x) best Gleichungen nach dieser Funkt gelöst sind, und daher **entwickel expliziete Funktionen** heissen (Beis

b) in solche, bei welchen di der Fall ist, und die **unentwickel impliziete Funktionen** genannt werd spiel 3).

Beispiel 2.

Gegeben sei die Gleichung:

$$y^2 + 2ax + b = 5x$$

Dieselbe nach der Funktion y aufgelöst, gibt:

$$y = \pm\sqrt{5x - 2ax - b}$$

In dieser Form wird gesagt: „y ist eine **entwickelte** (expliziete) Funktion von x."

Beispiel 3.

Gegeben sei dieselbe Gleichung:

$$y^2 + 2ax + b = 5x$$

In dieser Form wird gesagt: „y ist eine **unentwickelte** (impliziete) Funktion von x."

Frage 3. Durch welche Bezeichnung wird auf **allgemeine Weise** ausgedrückt, dass in irgend einer Gleichung mit 2 Unbekannten die unbekannte Grösse y von der beliebig wählbaren Grösse x abhängig ist?

Antwort. Um in **allgemeine** anzudeuten, dass in einer nach gelösten (entwickelten) Gleichu 2 Unbekannten, die unbekannte von der anderen beliebig wäh Grösse x abhängig, bezw. eine tion derselben ist, wurden gemeinen Bezeichnungen:

Beispiel 4.

Gegeben sei die Gleichung:

$$3x^2 + 5x - 7y = 3y + 2$$

Diese Gleichung nach y aufgelöst, gibt:

$$y = \frac{3x^2 + 5x - 2}{10} \quad \ldots \quad 1)$$

In dieser Form wird y eine entwickelte

ete) Funktion der **einen** unabhängig derlichen x, oder kurzweg: „eine ion von x" genannt u. auf allgemeine mit: $y = f(x)$
net. $f(x)$ bedeutet also den Ausdruck rechten Seite obiger Gleichung 1.

Beispiel 5.

ben sei die Gleichung:
$$3y - 7x + 5 = 6y$$
Gleichung nach y aufgelöst, gibt:
$$y = \frac{5 - 7x}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$
r wiederum eine „entwickelte Funkn x" und wird in allgemeiner Weise, $y = F(x)$ bezeichnet.
bedeutet den Ausdruck auf der rechten r Gleichung 2), da derselbe von dem den in Gleichung 1) verschieden ist, so nan zur allgemeinen Bezeichnung ben ein anderes Funktionszeichen (F)

$y = f(x)$; $y = F(x)$; $y = \varphi(x)$; etc.
eingeführt.

Gelesen, heissen diese Formen: „y ist eine Funktion von x." Die hier angeführte Bezeichnung ist nur gültig für expliziete Funktionen mit **einer** unabhängig Veränderlichen (siehe Beispiel 4).

Die Buchstaben f, F, φ etc. heissen **Funktionszeichen**; dieselben müssen verschieden von einander sein, wenn sie Funktionen angehören, welche hinsichtlich ihrer Form von einander verschieden sind (Beispiel 5).

---

ge 4. Wie werden die Funktionen ilt?

Beispiel 6.

nach y entwickelten Gleichung:
$$y = ax^2 + bx + c$$
eine **entwickelte** (expliziete) Funktion enannt.

Beispiel 7.

Gleichung:
$$xy = \sqrt{5x + 6y + 7}$$
eine **unentwickelte** (impliziete) Funkn x.

Beispiel 8.

Gleichung:
$$y = x^2 + 5$$
it einem beliebigen Werte von x ein einziger Wert für y; y wird da- **einwertige** Funktion von x genannt.

Beispiel 9.

Gleichung:
$$y = \sqrt[3]{x}$$
nen einem beliebigen Werte von x ei Werte (die dritte Wurzel hat drei iene Werte) für y; y wird daher eine ge Funktion von x genannt.

Beispiel 10.

eichung:
$$y = 7x^2 + 19x - 8$$
ir jeden endlichen Wert von x dlichen reellen Wert für y, daher ne **stetige** Funktion von x genannt.

Antwort. In der Antwort auf Frage 2 sind die Funktionen bereits nach zwei Hauptgattungen unterschieden worden, nämlich: in **entwickelte** (expliziete) und in **unentwickelte** (impliziete) Funktionen (Beispiel 6 und 7).

Ausserdem werden die Funktionen im allgemeinen eingeteilt, in: **ein-** und **mehrwertige**; — die Einteilung der Funktionen in ein- und mehrwertige geschieht, je nachdem einem beliebigen Werte von x **ein** oder **mehrere** Werte für y entsprechen (Beispiel 8 und 9).

Ferner werden die Funktionen unterschieden, in: **stetige** (kontinuierliche) und in **unstetige** (diskontinuierliche) — und zwar heisst eine Funktion „stetig", wenn für keinen endlichen Wert der veränderlichen Grösse x der Betrag der hieraus gebildeten Funktion (y), weder **unendlich** noch **imaginär** (die Quadrat-, bezw. jede gerade Wurzel aus einer negativen Grösse ist eine imaginäre Grösse) wird; ist dies der Fall, dann heisst sie „unstetig" (Beispiel 10 und 11). Der Begriff der stetigen und unstetigen Funktionen wird eigentlich erst recht in der analytischen Geometrie, bei der graphischen Darstellung der Funktionen, klar.

Dann werden die Funktionen einge-

Beispiel 11.

In der Gleichung:

$$y = \sqrt{x^2 - 5^2}$$

werden alle Werte für y imaginär, sobald x kleiner als 5 gewählt wird.

Analog wird in der Gleichung $y = \frac{3}{x^2}$ der Wert für y unendlich, sobald $x = 0$ gewählt wird, weil ein Bruch der zum Nenner 0 hat, unendlich gross ist.

In diesen beiden Fällen nennt man y eine **unstetige** Funktion von x.

Beispiel 12.

Setzt man in der Gleichung:

$$y = ax^2 + bx^4 + c$$

z. B. für $x = +2$ oder -2, so resultiert für y, stets ein und **derselbe** Wert, weil eine positive und dieselbe negative Grösse in eine gerade Potenz erhoben, gleiche Resultate ergeben; y ist also eine **gerade** Funktion von x. Ebenso: $y = ax^x$.

Beispiel 13.

Setzt man in der Gleichung:

$$y = 2x + 3x^3 + 7x^5$$

für x einmal $+2$, ein andermal -2, so resultiert für y das erstemal der Wert: $+252$, das zweitemal der Wert: -252, weil eine negative Grösse, in eine ungerade Potenz erhoben, ein negatives Resultat liefert, mithin wurden alle Glieder, welche vorher positiv waren, im 2. Falle negativ. y ist also eine **ungerade** Funktion von x.

Beispiel 14.

Algebraische Funktionen, sind:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y = \frac{a}{m + x^4} \text{ etc.}$$

Beispiel 15.

Transcendente Funktionen, sind:

$$y = a^x$$

$$y = \log x$$

$$y = \sin x$$

$$y = tg\ arc\ x, \text{ etc.}$$

Beispiel 16.

Ganze Funktionen, sind:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ etc.}$$

Beispiel 17.

Ganze Funktionen, sind:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = ax^5 + bx^2 + c, \text{ etc.}$$

Die erstere ist eine gerade Funktion vom 2ten, die zweite eine solche vom 5ten Grade.

teilt, in: **gerade** und **ungerade** F nen; — eine Funktion heisst ein rade", wenn sie für gleiche en gesetzte Werte der verände Grösse **vollkommen gleiche** Resu liefert (Beisp. 12); gibt sie dageg dieselben Werte, gleich gross entgegengesetzte Werte, so sie eine „ungerade" Funktion (Bei

Schliesslich werden die Funktio 2 Hauptarten:

I. in **„algebraische"** und

II. in **„transcendente"** Funktione eingeteilt.

Die Funktionen werden **algebi** genannt, wenn die in denselben vo menden Veränderlichen nur **algebra** Operationen (Addition, Subtra Multiplikation, Division, Potenzi und Wurzelausziehung) unterworfe (Beisp. 14). — Die Funktionen li **transcendente,** wenn die veränder Grösse x, als Exponent, Logarit Bogen, Winkel etc. vorkommt (Beis

Die **algebraischen** Funktionen v eingeteilt, in:

a) **ganze Funktionen,** wenn die V derliche x, nicht als Divisor vorl (Beisp. 16).

Die ganzen Funktionen werde der nach **Graden,** welche der hö Exponent von x angibt, u schieden (Beisp. 17).

b) **gebrochene Funktionen,** we Veränderliche x im Nenner, bez. Divisor vorkommt (Beisp. 18).

Die gebrochenen Funktionen v wieder in **echt** gebrochene und gebrochene eingeteilt; und zwa **echt** gebrochene solche, in w die höchste Potenz der Veränderli im Nenner steht (Beisp. 19); ste Zähler die höchste Potenz der V derlichen x, so heisst die Funktio **unecht** gebrochene (Beisp. 20);

c) **rationale Funktionen,** wenn di änderliche x mit keinem Wurzelz und keinem gebrochenen Exponen haftet ist (Beisp. 21);

Beispiel 18.

$$y = \frac{a}{m + x^4}$$

$$y = \frac{x^3 + ax^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ etc.}$$

brochene Funktionen.

Beispiel 19.

echt gebrochene Funktion, ist:

$$y = \frac{x^3 + ax^2}{bx^4 + d}$$

Beispiel 20.

unecht gebrochene Funktion, ist:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$$

Beispiel 21.

onale Funktionen, sind:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = \frac{x^3 - 3ax^2 + d}{4ax^4 + 5x} \text{ etc.}$$

Beispiel 22.

ionale Funktionen, sind:

$$y = 2 + \sqrt[3]{b^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt[m]{x^3 + ax^2 - 7x^5}, \text{ etc.}$$

Beispiel 23.

Exponential-Funktion, ist:

$$y = a^x + b$$

Beispiel 24.

ogarithmische Funktion, ist:

$$y = log\, x$$

Beispiel 25.

ometrische Funktionen, sind:

$y = sin\, x$; $y = sec\, x$
$y = cos\, x$; $y = cosec\, x$
$y = tg\, x$; $y = ctg\, x$

Beispiel 26.

ometrische Funktionen, sind:

$= arc\,(sin = x)$, oder $= arc\, sin\, x$
$= arc\,(cos = x)$, oder $= arc\, cos\, x$
u. s. f.

d) **irrationale Funktionen,** wenn die Veränderliche x unter einem Wurzelzeichen vorkommt oder, was dasselbe ist, einen gebrochenen Exponenten hat (Beisp. 22).

Endlich werden noch die **transcendenten Funktionen** eingeteilt, in:

a) **Exponential-Funktionen,** wenn Potenzen mit veränderlichen Exponenten vorkommen (Beisp. 23);

b) **logarithmische Funktionen,** wenn Logarithmen der veränderlichen Grösse x, zu einer beliebigen Basis vorkommen (Beisp. 24);

c) **goniometrische Funktionen,** wenn sie den *sin*, *cos*, *tg*, *ctg*, *sec*, *cosec*, des veränderlichen Bogens in einem Kreise bezeichnen, dessen Halbmesser gleich der Einheit ist (Beisp. 25);

d) **cyklometrische-** oder **Kreisfunktionen,** wenn sie den Kreisbogen darstellen, dessen *Sinus*, *Kosinus* etc. die veränderliche Grösse, für einen mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreis ist (Beisp. 26).

Ausser diesen werden die Funktionen noch in andere verschiedene Arten, als: „einfache, zusammengesetzte, periodische, Gamma'sche, elliptische, Abel'sche, Theta'sche etc. Funktionen" eingeteilt, deren Definitionen da wo sie vorkommen gegeben werden.

II.

ıternde Fragen mit Antworten, über: Differenzenquotient, Differentiale, Differentialquotient etc.

;e 5. Was ist unter der **Differenz ıktion einer veränderlichen Grösse** stehen, und wie wird dieselbe rückt?

Antwort. Unter der **Differenz der Funktion** (y) **einer veränderlichen Grösse** (x) ist die positive oder negative Grösse zu verstehen, um welche sich die Funk-

. 3. Die Grössen Δx und Δy bedeuten für eine einfache, von x, bezügn y, unabhängige Grösse.

Erkl. 4. Δ ist der griechische Buchstabe *D* und bedeutet den Anfangsbuchstaben des Wortes „differentia".

Erkl. 5. Die Symbole Δx und Δy dürfen nicht als Produkte von Δ und x, bezw. von Δ und y betrachtet werden. Das Symbol Δx drückt aus, dass nur dem x eine Aenderung zukommt, und das Symbol Δy bedeutet nur die entsprechende Aenderung von y.

Beispiel 27.

Gegeben ist die entwickelte Funktion:

1) . . $y = f(x) = 3x^2 + 4x + 5$

Wird nun x um $\Delta x = 2$ vermehrt, so wird sich auch y um eine bestimmte Grösse ändern; diese Aenderung sei Δy, und man hat:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = 3(x+2)^2 + 4(x+2) + 5$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = 3x^2 + 12x + 12 + 4x + 8 + 5$$

oder:

2) . $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = 3x^2 + 16x + 25$.

Hiervon die gegebene Funktion, nämlich Gleichung 1), abgezogen, bleibt:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 12x + 20.$$

Der Wert für Δy ist also die Grösse, um welche sich die Funktion (y) ändert, wenn die Veränderliche x, um eine beliebige Grösse Δx geändert wird; dieser Wert für Δy ist somit: die Differenz der Funktion (y) der veränderlichen Grösse x.

tion (y) ändert, wenn die Veränd (x) um eine beliebige Grösse dert wird. Die **beliebige** Veränd der Grösse x wird mit Δx, die hi **bedingte** Aenderung der abhäng änderlichen y, bezw. der Funktion mit Δy bezeichnet (Erkl. 3, 4 un

Um die Differenz der Fur einer Veränderlichen a drücken, werde in der belie entwickelten (solche liege nächst der Betrachtung zu G Funktion:

1) . . . . $y = f(x)$

die Veränderliche x um eine beli Grösse Δx geändert; alsdann wi auch die Funktion y um eine besti Grösse Δy ändern und die ge Funktion, übergehen in:

2) . . $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

Wird nun von dieser neuen Gleich die ursprüngliche Gleichung 1) a gen, so bleibt:

3) . . $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

und dieser Ausdruck stellt die renz der Funktion der Verä lichen x dar (Beisp. 27).

Frage 6. Wie wird das Verhältnis $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ der Aenderung der Funktion (y) zu derjenigen der unabhängig Veränderlichen (x) erhalten und benannt?

Beispiel 28.

Gegeben sei die Funktion:

$$y = f(x) = 3x^2 + 4x + 5$$

in derselben werde x um Δx, z. B. um 2 vergrössert, und es sei die aus der gegebenen Gleichung hervorgehende Aenderung von y, gleich der Grösse Δy; alsdann ist:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = 3(x+2)^2 + 4(x+2) + 5$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = 3x^2 + 12x + 12 + 4x + 8 + 5$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = 3x^2 + 16x + 25$$

Zieht man hiervon die gegebene Funktion ab, so resultiert:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 12x + 20$$

Beiderseits mit Δx, bezw. mit 2 dividiert, gibt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{12x + 20}{2}$$

$$= 6x + 10$$

$6x + 10$ drückt also in diesem Beispiele den Differenzenquotienten, d. h. das Verhält-

Antwort. Das Verhältnis de derung der Funktion (y) zu jenigen der unabhängig V derlichen (x) wird erhalten, man die in voriger Antwort ausged Differenz der Funktion (y) der derlichen (x), nämlich:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

durch die Aenderung Δx der Ver lichen x, dividiert, wodurch entst

1) . . . $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Dieses Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird **Differ quotient** genannt (Beisp. 28).

Anmerkung 1. Wird die bel geänderte Grösse x, welche in x überging, mit x_1; dem entsprecher

$\frac{y}{x}$) der Aenderung der Funktion derjenigen der unabhängig Ver- ichen (x) aus.

Beispiel 29.

n beistehender Anmerkung 1 geht das ; vorigen Beispiels 28, über in:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = 6x + 10$$

hiervon abhängige Funktion y, welche in $y + \Delta y$ übergegangen ist, mit y_1 bezeichnet, so ist die Aenderung Δx der Variabelen $(x) = x_1 - x$ und die Aenderung Δy der Funktion $(y) = y_1 - y$; diese Werte in obige Gleichung 1) substituiert, gibt:

2) . . $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ (Beisp. 29)

---

ge 7. Was ist unter den **Differen-** der Veränderlichen x und y zu en und wie werden dieselben be- t?

. 6. Die Differentiale dx und dy Grunde nichts anders, wie die Diffe- Δx und Δy; nur sind erstere unend- eine Differenzen, welche sich unauf- der Grenze (limes) Null nähern, wäh- ztere beliebig grosse Differenzen vor- können.

Antwort. Die beliebige Aenderung Δx der unabhängig Variabelen x und die hiernach, sowie durch die gegebene Gleichung bedingte Aenderung Δy der Funktion y, wurden nach der Antwort auf Frage 5: **Differenzen** der Veränderlichen x und der Funktion y genannt. Werden nun diese Differenzen: $\Delta y = (y_1 - y)$ und $\Delta x = (x_1 - x)$ (Anm. 1) als **unendlich kleine** Grössen, d. h. als solche, welche sich **ohne Ende** der Grenze (*limes*) Null nähern, angesehen, so heissen sie **Differentiale** der Veränderlichen x, bezw. der Funktion y.

Nach *Leibnitz* werden diese Differentiale durch den Buchstaben „**d**" bezeichnet. Das Differential der Veränderlichen x ist also: dx, das der Funktion y ist: dy (Erkl. 6).

---

ge 8. Was ist unter dem **Diffe- erhältnis** oder **Differentialquotienten** stehen und wie wird derselbe aus- kt?

. 7. Der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist nach An- ; 1 nichts anderes, als:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

dem stetigen **Kleinerwerden** der Differen- $- y$ und $x_1 - x$, wird im folgenden ausgesetzt, dass die Differenz $y_1 - y$ Augenblicke $= 0$ wird, in welchem erenz $x_1 - x = 0$, bezw. in welchem icke $x_1 = x$ geworden ist. (Ist dies in keit der Fall, und zwar unabhängig Art wie x in x_1 übergeführt wurde, die Funktion y für den betreffenden n x: stetig variabel).

. 8. Die Abkürzung: *lim*, heisst **limes,** nze.

Antwort. Unter dem **Differentialverhältnis** oder dem **Differentialquotienten** versteht man das Verhältnis des Differentials dy der Funktion y zu dem Differentiale dx der Veränderlichen x, d. h.

den Quotienten $\frac{dy}{dx}$

Nach der Definition der **Differentiale** in voriger Antwort, ist also das Differentialverhältnis, bezw. der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ gleich dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wenn in denselben Δy und Δx **gleichzeitig** (Erklär. 7) kleiner und kleiner werdend, **sich der Grenze Null nähern,** bezw. in Null übergehen, was durch: $lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Erkl. 8) **bezeichnet wird.**

Hiernach ist also: $\frac{dy}{dx} = lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Werden in diese Gleichung für den **Differenzen**quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Werte aus Gleichung 1 und Gleichung 2 (Antwort und Anmerkung der Frage 6) substituiert, so wird einmal:

Erkl. 9. Der Quotient $\frac{0}{0}$ kann jede beliebige Grösse vorstellen; wird z. B. $\frac{0}{0} = a$, d. h. gleich einer beliebigen Grösse gesetzt, so ist die hiermit angedeutete Division richtig, wenn $0 = a \,.\, 0$ wird; dies ist aber der Fall, weil ein Produkt mit dem Faktor $0 = 0$ ist. Sonach ist $\frac{0}{0}$ ein unbestimmter Ausdruck.

Beispiel 30.

Gegeben ist die Funktion:

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 5 \quad \ldots . \; 1)$$

Wird x in x_1 übergehen lassen (nach Früherem um Δx wachsen lassen), so geht y in y_1 über (d. h. y wächst um die Grösse Δy) und es besteht die neue Gleichung:

$$y_1 = f(x_1) = x_1^3 - 3x_1 + 5 \; . \; . \; . \; 2)$$

Von dieser Gleichung die ursprüngliche Gleichung, zur Bildung der Differenz der Funktion, abgezogen, gibt:

$$y_1 - y = \Delta y = f(x_1) - f(x) = x_1^3 - x^3 - 3(x_1 - x)$$

Zur Bildung des Differenzenquotienten beiderseits mit $x_1 - x \; (= \Delta x)$ dividiert, gibt:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} =$$

$$= \frac{x_1^3 - x^3 - 3(x_1 - x)}{x_1 - x}$$

Auf der rechten Seite die Partialdivision ausgeführt, gibt:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} =$$

$$= x_1^2 + x_1 \; x + x^2 - 3$$

Soll nun die Differenz $x_1 - x$ (Δx), mithin auch die Differenz $y_1 - y$ (Δy), immer kleiner und kleiner werden und schliesslich zur Grenze Null übergehen, so wird dies angedeutet, durch:

$$lim \frac{y_1 - y}{x_1 - y} = lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} =$$

$$= lim \, (x_1^2 + x_1 \; x + x^2 - 3)$$

Wird in Wirklichkeit zur Grenze Null übergegangen, d. h. $x_1 = x$ gesetzt, so muss $y_1 - y = 0$, bezw. $y_1 = y$ werden und es ist der **Differentialquotient**:

$$\frac{dy}{dx} = lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0} = lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

$$= x^2 + x^2 + x^2 - 3$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = 3x^2 - 3$$

Dies ist somit der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ der Funktion: $y = x^3 - 3x + 5$.

$$\frac{dy}{dx} = lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim \frac{f(x + \Delta x) -$$

und ein andermal wird, was dasselbe anderer Schreibweise ist:

$$\frac{dy}{dx} = lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = lim \frac{f(x_1) - f}{x_1 - x}$$

Werden in Wirklichkeit die Ausdrü $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oder $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ zur Grenze übergefü $x_1 = x$, bezw. $x_1 - x = 0$, oder $\Delta x = 0$ so muss nach Erklärung 7 auch $y_1 -$ bezw. $\Delta y = 0$ und der **Differential** $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, nämlich: gleich einer vorer **unbestimmten Grösse** (Erkl. 9) werd

Nun ist aus dem Beispiele 30 ers dass der Wert dieser unbestimmten $\frac{0}{0}$ **gefunden** werden kann. Das **Au** dieser unbestimmten Grösse $\frac{0}{0}$, bez

Aufsuchen des Differentia tienten einer Funktion (zunächs wickelter Funktionen) geschieht das **Differentiieren** oder die **Differe** derselben.

Anmerkung 2. Nach *Lagran* der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ der Fu $y = f(x)$ durch y' oder durch f' zeichnet. In dem Beisp. 30 würde al

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = 3x^2 - 3,$$

während die linke Seite dieser Gleichu ferentialquotient genannt wird, he rechte Seite, welche die Grösse d ferentialquotienten angibt, die **de** oder **abgeleitete Funktion.**

Der **Differentialquotient** ist also **Einzelnen angedeutete** Grenze des Q ten: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, während die **derivierte** ode **leitete** Funktion: y', $f'(x)$ (in dem Be $= 3x^2 - 3$) der **thatsächlich bestimm** jener Grenze ist.

Anmerkung 3. Aus dem Beispiele ersichtlich, dass der Differentialquotien die derivierte Funktion ($y' = 3x^2 +$ ursprünglichen Funktion: $y = x^3 -$ **wiederum eine Funktion von x ist**; kann man auf analoge Weise nochma rentiieren, d. h. es lässt sich ein Differentialquotient aus $y' = 3x^2 - 3$

Dem entsprechend, heisst der gegebenen Funktion: $y = x^3 -$

: im allgemeinen unbestimmte Grösse $\frac{dy}{dx}$ konnte für das gegebene Beispiel ı bestimmt werden.

gebildete Differentialquotient: **der 1. Differentialquotient,** und der aus der derivierten Funktion: $y^1 = 3x^2 - 3$ auf dieselbe Weise gebildete: **der 2. Differentialquotient** u. s. f.

Anmerkung 4. Die Wichtigkeit und die Bedeutung des Differentialquotienten in der analytischen Geometrie, höheren Mechanik etc. wird aus den in späteren Teilen enthaltenen Aufgaben von selbst ersichtlich. Dem Studierenden kann nicht dringend genug empfohlen werden, die zunächst folgenden algebraischen Uebungsaufgaben — d. i. die **Differentiation der Funktionen** — gründlich einzuüben.

III.

wicklung des 1. Differentialquotienten explizieter Funktionen von einer unabhängig Veränderlichen.

merkung 5. Das Aufsuchen des 1. Difialquotienten entwickelter Funktionen, ;ich auf zwei Arten ausführen, entweder:

Methode a,

man aus der Beschaffenheit der gege- Funktion $f(x)$ unmittelbar die Grenze ımt, welcher sich der Quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

t, wenn die Differenz $x_1 - x\,(= \Delta x)$ un- h klein, mithin $= 0$ wird; oder:

Methode b,

man den Zähler des Quotienten

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Potenzen von x entwickelt, mit Δx $- x$) zur Grenze 0 übergeht, und dann ene Glieder beibehält, welche Δx nicht lten.

ı nachstehenden ist teilweise die eine, ;ise die andere dieser Methoden ange- t.

---

a) Differentialquotient einer Potenz.

ehrsatz 1. Der Differentialquotient ;r Potenz x^n ist gleich dem Exnten derselben, multipliziert mit Potenz, deren Exponenten um eine ieit niedriger ist, als die gegebene.

Vorauss. $y = f(x) = x^n$

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

Beweis. Methode b. Wird x um Δx

geändert, so ändert sich y um Δ
die gegebene Funktion geht über

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

Die rechte Seite der Gleichung
dem binomischen Lehrsatze (Erk
entwickelt, gibt:

$$y + \Delta y = x^n + n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots.$$

Zieht man von dieser Gleichun
gegebene: $y = x^n$ ab, so bleibt:

$$\Delta y = n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} \Delta x^2$$

Dividiert man beiderseits mit Δ
liefert diese Gleichung den Differe
quotienten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} \Delta x +$$

Will man nun den Differen
quotienten hieraus erhalten,
muss zur Grenze 0 übergegangen,
es muss die Differenz $\Delta x = 0$ g
werden. Hiernach ist der gesuchte
ferentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = n x^{n-1}$$

weil die sämmtlichen übrigen Sum
den, welche den Faktor Δx $(= 0)$
haben, wegfallen (Erkl. 11).

Erkl. 10. Der binomische Lehrsatz gibt eine Regel an, nach welcher ein Binom zu einer beliebigen Potenz erhoben werden kann; derselbe heisst in Zeichen:

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3 + \ldots + b^n$$

Erkl. 11. Ein Produkt wird Null, wenn ein Faktor desselben $= 0$ ist.

Uebungsaufgaben:

Nach vorstehendem Lehrsatze
die Differentialquotienten nebenste
der Aufgaben:

Aufgabe 1. Man soll den Differentialquotient von: $y = x^5$ bestimmen.

Auflösung.

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4$$

Aufgabe 2.
Ebenso von: $y = -x^{-3}$

Auflösung.

$$\frac{dy}{dx} = -3 \cdot -x^{-3-1} = 3x^{-4}$$

Aufgabe 3.
Ebenso von: $y = -x^{3/4}$.

Auflösung.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} \cdot -x^{3/4-1} = -\frac{3}{4} x^{-1/4}$$

Anmerkung 6. Es wurde deshalb der Differentialquotient einer Potenz vorausgeschickt, um im folgenden stets einige passende Uebungsbeispiele bringen zu können.

) Differentialquotient einer algebraischen Summe von Funktionen.

hrsatz 2. Der Differentialquotient algebraischen Summe von tionen einer und derselben un- igig Veränderlichen ist gleich der raischen Summe der Differential- enten der einzelnen Summanden.

Vorauss.

$$y = F(x) \pm f(x) \pm \varphi(x) \pm C \ldots 1)$$

oder: $y = u \pm v \pm w \pm C \ldots\ldots 2)$

wenn u, v, w die betreffenden Funktionen von x bedeuten und C eine konstante Grösse ist.

Beh. $$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} \pm \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{d\varphi(x)}{dx} \pm \frac{dC}{dx}$$

oder: $$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \frac{dC}{dx}$$

Beweis. Methode a. Wird die Veränderliche x um Δx geändert, und ändern sich hiernach die von x abhängigen Grössen u, v, w, bezüglich um Δu, Δv, Δw; ebenso die hiervon abhängige Funktion y um Δy, so geht obige Gleichung 2) über, in:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v) \pm \pm (w + \Delta w) \pm C \ldots 3)$$

die Konstante C bleibt unverändert.

Hieraus ergibt sich (Erkl. 12):

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v \pm \Delta w \pm 0$$

Um nun den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu erhalten, dividiert man beiderseits mit Δx, wonach:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \frac{\Delta w}{\Delta x} \pm 0$$

Führt man alsdann die Differenz Δx zur Grenze Null über, so gehen auch die entsprechenden Grössen Δy, Δu, Δv, Δw zur Grenze 0 über, und weil das Verhältnis der Aenderung einer Funktion zu der Aenderung der betreffenden unabhängig Veränderlichen, sobald diese Aenderung die Grenze Null erreicht, **Differentialquotient** genannt wurde, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm 0 \quad \text{(Erkl. 13).}$$

kl. 12. Zur Bildung der Differenz Δy, von der Gleichung 3) die in der Voraus- z stehende Gleichung 2) abgezogen; wo- die Glieder y, u, v, w und die Konstante fielen.

kl. 13. Die Quotienten $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta w}{\Delta x}$ n — analog, wie der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mit $\frac{dy}{dx}$ ınet wurde, wenn Δx und Δy sich der 0 stetig nähern, — bezüglich durch $\frac{v}{x}$, $\frac{dw}{dx}$ bezeichnet, sobald die Differen- x, Δy, Δu, Δv, Δw unendlich klein wer- sich der Grenze Null nähern, bezw. in bergehen.

Uebungsaufgaben.

fgabe 4. Man soll den Differential- ent von: $y = \underset{(u)}{x^3} - \underset{(v)}{x^2} + \underset{(w)}{x}$ bestimmen.

Auflösung.

In diesem Beispiele sind die einzelnen Summanden sämmtlich abhängig von x, daher

Funktionen von x. Denkt man si diese Funktionen die Grössen u, v, w et in Lehrsatz 2, eingesetzt, so kann nach Satze differentiiert werden, und zwar ka Differentiation der einzelnen Funktione w nach Lehrsatz 1 gleich mitausgeführ den, wonach:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + x^0, \text{ oder:}$$
$$\left(\frac{du}{dx}\right) \quad \left(\frac{dv}{dx}\right) \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 1 \text{ (Erkl. 1}$$

Erkl. 14. Jede Potenz mit dem Exponenten 0 ist = 1. Hieraus folgt der Satz: „Der Differentialquotient der Veränderlichen x ist = 1."

Aufgabe 5. Ebenso von:

$$y = \underset{(u)}{x^7} - \underset{(v)}{x^{-3}} + \underset{(w)}{x^{3/4}}$$

Auflösung. Analog der Aufga erhält man nach Lehrsatz 1 und

$$\frac{dy}{dx} = 7x^{7-1} - \cdot - 3x^{-3-1} + \frac{3}{4}x^{}$$

oder: $\frac{dy}{dx} = 7x^6 + 3x^{-4} + \frac{3}{4}x^{-1/4}$

c) Differentialquotient einer konstanten Grösse, e konstanten Summanden und konstanten Faktors

Lehrsatz 3. Der Differentialquotient einer konstanten Grösse, bezw. eines konstanten Summanden in einer Funktion, ist = 0.

Vorauss. $y = C \ldots$
$y = f(x) + C \ldots$

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = 0 \ldots$
$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + 0 \ldots$

Beweis. Ergibt sich aus dem weise zu Lehrsatz 2, in welchem der Entwicklung des Differentialquo ten die Konstante, bezw. der rentialquotient jener Konstanten in überging.

Lehrsatz 4. Der Differentialquotient eines Produktes, gebildet aus einer konstanten Grösse C und der Funktion der Veränderlichen ist gleich dem Differentialquotienten der letzteren, multipliziert mit dem konstanten Faktor.

Vorauss. $y = C.f(x) = C.u$,
wenn u die Funktion von x vorst

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = C.\frac{df(x)}{dx} = C.\frac{du}{dx}$

Beweis. Methode a. Geht durch änderung der Veränderlichen x die in $(x + \Delta x)$ über, so geht auch $(u + \Delta u)$, y in $(y + \Delta y)$ über, und ursprüngliche Funktion nimmt folg Form an:

$$y + \Delta y = C(u + \Delta u)$$

Zieht man hiervon die in der Vor stehende ursprüngliche Funktion a bleibt:

$$\Delta y = C(u + \Delta u) - C.u$$

oder: $\Delta y = C.u + C.\Delta u - C.u$

oder: $\Delta y = C.\Delta u$

Dividiert man zur Bildung des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ beiderseits mit Δx, so erhält man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C.\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Wird Δx zur Grenze 0 übergeführt, so ist der gesuchte Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = C.\frac{du}{dx} \text{ (Erkl. 13).}$$

Uebungsaufgaben.

fgabe 6. Man soll den Differenotient von:

$$y = x^3 + 5$$

imen.

Auflösung. Wendet man der Reihe nach die Lehrsätze 2, 1 und 3 an, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 0.$$

fgabe 7. Ebenso von:

$$y = \underset{(u)}{x^3} + \underset{(v)}{x^{-2}} + \underset{(C)}{7}$$

Auflösung. Nach Lehrsatz 2, 1 und 3, ist:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x^{-3} + 0.$$

fgabe 8. Ebenso von:

$$y = \underset{4(u)}{4x^5}$$

Auflösung. Nach Lehrsatz 4, wird $x^5 (= u)$ als Funktion von x betrachtet. Nach diesem Lehrsatze und dem Lehrsatze 1, erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = 4.5x^4 = 20x^4.$$

fgabe 9. Ebenso von:

$$y = \frac{4}{7}x^{-7}$$

Auflösung. Nach Lehrsatz 4 und 1, erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{7}.-7x^{-8} = -4x^{-8}.$$

fgabe 10. Ebenso von:

$$\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 2x^5 + x + 1\,(C).$$

Auflösung. Mit Anwendung der Lehrsätze 2, 3, 4 und 1, erhält man der Reihe nach:

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\frac{1}{8}x^4)}{dx} - \frac{d(\frac{1}{4}x^3)}{dx} + \frac{d(3x^2)}{dx} - \frac{d(2x^5)}{dx} + \frac{d(x)}{dx} + \frac{d(C)}{dx}$$

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\frac{1}{8}x^4)}{dx} - \frac{d(\frac{1}{4}x^3)}{dx} + \frac{d(3x^2)}{dx} - \frac{d(2x^5)}{dx} + \frac{d(x)}{dx} + 0.$$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{8} \cdot \frac{d(x^4)}{dx} - \frac{1}{4} \cdot \frac{d(x^3)}{dx} + 3 \cdot$

$- 2 \cdot \frac{d(x^5)}{dx} + \frac{d(x)}{dx} + 0$

schliesslich:

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{8} \cdot 4x^3 - \frac{1}{4} \cdot 3x^2 + 3 \cdot$

$- 2 \cdot 5x^4 + x^0 + 0.$

Wird dies noch reduziert, so erhä
den gesuchten Differentialquotien

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}x^2 + 6x - 10x^4 +$

Anmerkung 7. Der Studieren
sich von vornherein daran gew
die bei der Differentiation nötige
nach und nach vorgeführten
tionen auf einmal vorzunehmen
ses und folgende Beispiele sind d
so umständlich ausgeführt, u
Gang der Differentiation genau
nen zu lassen.

---

d) Differentialquotient eines Produktes von Funktio

Lehrsatz 5. Der Differentialquotient eines Produktes von Funktionen ist gleich der Summe der Produkte gebildet aus je einem Faktor und dem Differentialquotienten des anderen Faktors.

Vorauss.:

$$y = f(x) \cdot F(x) = u \cdot v$$

wenn u und v die Funktionen $f(x)$ un
vorstellen.

Beh.: $\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$

Beweis. Aendert man in der
benen Funktion:

$$y = u \cdot v$$

die Veränderliche x um Δx, so ä
sich die Abhängigen u und v, bez
um Δu und Δv; ebenso die Funk
um Δy, und es ist:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

Wird die rechte Seite entwickel
die ursprüngliche Funktion abge
so erhält man:

$$\Delta y = uv + v \cdot \Delta u + u \Delta v + \Delta u \Delta v$$

Dividiert man dann beiderseits m
reduziert und sondert, so ist:

Erkl. 15. Es ist stets zu beachten, dass die Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta x}, \frac{\Delta u}{\Delta x}$ bei dem Uebergange zur Grenze den Differentialquotienten abgeben und bezüglich mit $\frac{dy}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{du}{dx}$ bezeichnet werden.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + (v + \Delta v) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Wird nun Δx zur Grenze Null geführt, so ist, mit Rücksicht der Erklärung 15:

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{(Erkl. 16).}$$

ıl. 16. In dem Klammerwert $(v + \Delta v)$ ei dem Uebergange zur Grenze 0, der ınd $\Delta v = 0$, und verschwindet daher r Rechnung.

---

merkung 8. Sind in dem Pro- von Funktionen mehr als 2 Fak- enthalten, so geschieht die Bil- des Differentialquotienten auf ana- Weise.

Ist z. B.:

$$y = f(x) \,.\, F(x) \,.\, \varphi(x)$$

oder bezüglich wie vorhin:

$$y = u \,.\, v \,.\, w$$

so ist der Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = uv \cdot \frac{dw}{dx} + uw \cdot \frac{dv}{dx} + vw \cdot \frac{du}{dx}$$

u. s. w.

Uebungsaufgaben.

fgabe 11. Man soll den Differen- otient von:

$$y = \underset{(u)}{(x-1)}\,\underset{(v)}{(x-3)}$$

ımen.

Auflösung. Nach Lehrsatz 5 ist zunächst:

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)\frac{d(x-3)}{dx} + (x-3)\frac{d(x-1)}{dx}$$

Führt man die angedeutete Differentiation nach Lehrsatz 2 und 3 und der Erkl. 14 weiter aus, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = (x-1) \,.\, 1 + (x-3) \,.\, 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x - 1 + x - 3 = 2x - 4$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(x-2).$$

fgabe 12. Ebenso von:

$$= \underset{(u)}{(3x^2+3x-5)}\,\underset{(v)}{(x^2-7x+1)}$$

Auflösung. Nach Lehrsatz 5, ist:

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2+3x-5) \cdot \frac{d(x^2-7x+1)}{dx} +$$

$$+ (x^2-7x+1) \cdot \frac{d(3x^2+3x-5)}{dx}$$

Wird die angedeutete Differentiation nach den Lehrsätzen 2, 4, 1 und 3 der Reihe nach im Kopfe ausgeführt, so resultiert:

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 3x - 5)\,(2x - 7$$
$$+ (x^2 - 7x + 1)\,.\,(6x + 3$$

Dies kann man nun ausmultipl
und vereinfachen, wonach entste

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 54x^2 - 46x + 3$$
$$= 2\,(6x^3 - 27x^2 - 23x +$$

Aufgabe 13. Ebenso von:

$$y = 3x^{-7}\,.\,5x^3$$

Auflösung. Diesen Ausdruck
man zunächst vereinfachen, inde
die angedeutete Multiplikation de
len 3 und 5, ebenso die der Po
mit gleichen Basen ausführt, wor

$$y = 15x^{-4}$$

ist; dies nach Lehrsatz 4 und 1
rentiiert, gibt den gesuchten Differ
quotienten:

$$\frac{dy}{dx} = 15\,.\,-4x^{-5} = -60x$$

---

e) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll den Differentialquotient von: $y = a$ bestimm
Aufgabe 2. Ebenso von: $y = ax$.
Aufgabe 3. „ „ $y = ax + b$.
Aufgabe 4. „ „ $y = ax^2$.
Aufgabe 5. „ „ $y = 4x^7$.
Aufgabe 6. „ „ $y = 20bx^3$.
Aufgabe 7. „ „ $y = cx^2 + 2bx + a$.
Aufgabe 8. „ „ $y = x^{\frac{1}{2}}$
Aufgabe 9. „ „ $y = (a^2 + x^2)\,(b^2 - x^2)$
Aufgabe 10. „ „ $y = (a + bx)\,(b - ax)$.
Aufgabe 11. „ „ $y = (2 - 5x)\,(3 + 7x)$.
Aufgabe 12. „ „ $y = \frac{1}{9}x^7 - \frac{1}{3}x^5 + 3x^3 + x + 1$.
Aufgabe 13. „ „ $y = (x^2 - 3x + 2)\,(x^2 + 3x - 2)$.
Aufgabe 14. „ „ $y = 4ax^{-3} + 4bx^{-7} - 2x^{-2}$.
Aufgabe 15. „ „ $y = (2x^{-2} + 5)\,(-3x^2 - 5)\,(\frac{1}{3}x^{-5} - \frac{1}{8}$

---

f). Differentialquotient eines Bruches.

...rsatz 6. Der Differentialquotient Bruches ist gleich einem Bruche, ...Zähler aus dem Differentialquo- ...des Zählers mal dem Nenner we- ...dem Differentialquotient des Nen- ...mal dem Zähler jenes Bruches ...t und dessen Nenner gleich dem ...ate des Nenners jenes Bruches ist.

Vorauss. $y = \frac{f(x)}{F(x)}$ oder:

$$y = \frac{u}{v}$$

wenn u und v die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ vorstellen.

Behaupt. $$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Beweis. Methode a. Aendert man in der gegebenen Funktion:

1) ... $y = \frac{u}{v}$ in welcher $u = f(x)$; $v = F(x)$ ist,

die unabhängig Variabele x um Δx, so ändern sich die abhängig Variabelen u und v bezüglich um Δu und Δv und auch die Funktion y um Δy, wonach man erhält:

2). . . . . $y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$

Subtrahiert man hiervon die ursprüngliche Gleichung 1), so bleibt:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} \text{ oder:}$$

$$\Delta y = \frac{(u + \Delta u)\, v}{(v + \Delta v)\, v} - \frac{(v + \Delta v) \cdot u}{(v + \Delta v) \cdot v}$$

$$\Delta y = \frac{u \cdot v + v \cdot \Delta u - v \cdot u - u \cdot \Delta v}{(v + \Delta v)\, v}$$

$$\Delta y = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{(v + \Delta v)\, v}$$

Dividiert man beiderseits, zur Bildung des **Differenzenquotienten**, mit Δx und zwar den Bruch rechts, indem man den Zähler dividiert, so resultiert:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v) \cdot v}$$

Führt man nun die beliebige Aenderung: Δx zur **Grenze Null** über, so erhält man nach der Erkl. 17, und da auch Δv im Nenner rechts in Null übergeht, den **Differentialquotienten**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

was zu beweisen war.

...l. 17. Zum richtigen Verständnis der ...klung der Differentialquotienten kann ...ft genug erwähnt werden, dass, wenn ...r **Grenze Null** übergeht, auch die Aende- ...: Δu, Δv, Δy der stetig abhängig ...elen: u, v und y in **Null** übergehen und ...ie **Quotienten**:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta x} \text{ etc.}$$

...**unbestimmten Ausdruck** $\frac{0}{0}$ (Erkl. 9, Seite 8) ...nen, und dass alsdann für die **Differenzen-** ...**isse**:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

...ich die **Differentialverhältnisse** (Differential- ...nten):

$$\frac{dy}{dx}, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$$

... werden.

Zusatz 1. Für den Differentialquotienten eines Bruches, dessen Zähler eine Funktion von x und dessen Nenner eine **Konstante** ist, in Zeichen:

$$y = \frac{f(x)}{C} = \frac{u}{C} \quad \text{(wenn } u = f(x) \text{ vorstellt)}$$

hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{C} \cdot \frac{du}{dx}$$

Beweis.

1). . . . . $y = \frac{u}{C}$

Aendert man x um Δx, so änd
u um Δu und y um Δy, und m

2) . . . $y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{C}$

Hiervon Gleich. 1) subtrahiert

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{C} - \frac{u}{C} \text{ oder:}$$

$\Delta y = \frac{\Delta u}{C}$. Mit Δx dividier

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{C}$$ Wird Δx zur
Null übergeführt, so ist nach E

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{C} \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{C} \cdot \frac{du}{dx}$$

Zusatz 2. Für den Differentialquotienten eines Bruches, dessen Zähler eine **Konstante** und dessen Nenner eine $f(x)$ ist, in Zeichen:

$$y = \frac{C}{f(x)} = \frac{C}{v} \quad \text{(wenn } v = f(x) \text{ vorstellt)}$$

hat man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{C}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Beweis.

1). . . . . $y = \frac{C}{v}$

2). . . . $y + \Delta y = \frac{C}{v + \Delta v}$ (analog weises s

Gleich. 1) von Gleich. 2) subtr
gibt:

$$\Delta y = \frac{C}{v + \Delta v} - \frac{C}{v} \text{ oder:}$$

$$\Delta y = \frac{C.v}{(v + \Delta v)\,v} - \frac{C(v+\Delta}{(v+\Delta}$$

$$\Delta y = \frac{C.v - C.v - C.\Delta v}{(v + \Delta v)\,v}$$

$$\Delta y = -\frac{C.\Delta v}{(v + \Delta v)\,v}$$

Mit Δx dividiert, gibt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{C.\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)\,v}$$

Wird Δx zur Grenze Null überg
so wird im Nenner rechts auch:
Null, und man hat nach der Er

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{C}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx}$$

---

satz 3. Wird in der Funktion:

$$y = \frac{C}{v}$$ (siehe Zusatz 2)

1, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx}$$ (ergibt sich aus Zusatz 2.)

---

satz 4. Für die Funktion:

$$y = \frac{1}{x}$$

nan den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$ (ergibt sich aus Zusatz 3, aus nebenstehendem Beweise).

Beweis.

1). . . . . $y = \frac{1}{x}$

2). . . $y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$ (analog des Beweises zu Lehrsatz 6)

Gleich. 1) von Gleich. 2) subtrahiert, gibt:

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \text{ oder:}$$

$$\Delta y = \frac{x - (x + \Delta x)}{x\,(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{x - x - \Delta x}{x\,(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = -\frac{\Delta x}{x\,(x + \Delta x)}$$

Beiderseits mit Δx dividiert, erhält man: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x\,(x + \Delta x)}$

Wird Δx zur Grenze Null übergeführt, so hat man nach Erkl. 17:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$ (da in dem Nenner rechts Δx = Null wird).

Uebungsaufgaben.

fgabe 14. Man soll den Differen-notienten, von:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1}$$

nmen.

Auflösung. Da:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} = \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{u}{v}$$

ist, so hat man nach dem Lehrsatze 6:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3 - 1) \cdot \frac{d(x^2 + 2x + 1)}{dx} - (x^2 + 2x + 1) \cdot \frac{d(x^3 - 1)}{dx}}{(x^3 - 1)^2}$$

Führt man die angedeutete Differentiation nach den Lehrsätzen 2), 1) 3) aus, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3 - 1)(2x + 2 + 0) - (x^2 + 2x + 1) \cdot (3x^2 - 0)}{(x^3 - 1)^2}$$

Dies reduziert, gibt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^4 - 2x + 2x^3 - 2 - 3x^4 - 6}{(x^3-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 2}{(x^3-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{(x^3-1)^2}$$

Aufgabe 15. Ebenso, von:

$$y = \frac{1-2x^2}{2-x^2}$$

Auflösung. Da:

$$y = \frac{1-2x^2}{2-x^2} = \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{u}{v}$$

so hat man nach Lehrsatz 6:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2-x^2)\cdot\frac{d(1-2x^2)}{dx} - (1-2x^2)\cdot\frac{d(}{}}{(2-x^2)^2}$$

Die angedeutete Differen
nach den Lehrsätzen 2, 1 und
geführt, gibt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2-x^2)(0-4x) - (1-2x^2)(0-2x}{(2-x^2)^2}$$

Dies reduziert, gibt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x + 4x^3 + 2x - 4x^3}{(2-x^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6x}{(2-x^2)^2}$$

Aufgabe 16. Ebenso, von:

$$y = \frac{-5x^3}{a}$$

Auflösung. Da:

$$y = \frac{-5x^3}{a} = \frac{f(x)}{C} = \frac{u}{C}$$

so hat man nach dem Zusatz
Lehrsatzes 6:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\cdot\frac{d(-5x^3)}{dx}$$

Die angedeutete Differentiation
den Lehrsätzen 4 u. 1 ausgeführt,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\cdot -5\,.\,3x^2 \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{15x^2}{a}$$

Aufgabe 17. Ebenso, von:

$$y = \frac{a}{x^4}$$

Auflösung. Da:

$$y = \frac{a}{x^4} = \frac{C}{f(x)} = \frac{C}{v} \text{ ist, s}$$

man nach dem Zusatz 2 des Lehrsat

il. 18. Für: $y = \frac{a}{x^4}$ hätte man auch
en können:
$a \,.\, x^{-4}$, sonach ist nach Lehrsatz 4 u. 1:
$a \,.\, -4x^{-4-1} = -4a \,.\, x^{-5}$ oder:
$\frac{-4a}{x^5}$ Diese Auffassung liefert somit
e Resultat.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{(x^4)^2} \cdot \frac{d(x^4)}{dx}$$

und nach dem Lehrsatz 1:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{(x^4)^2} \cdot 4x^3 \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4ax^3}{x^8}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4a}{x^5} \text{ (Erkl. 18)}$$

---

fgabe 18. Ebenso, von:

$$y = \frac{1}{x - x^2}$$

Auflösung. Da:

$$y = \frac{1}{x-x^2} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{v} \text{ ist, so hat}$$

man nach dem Zusatz 3 des Lehrsatzes 6:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x-x^2)^2} \cdot \frac{d(x-x^2)}{dx}$$

Die angedeutete Differentiation nach den Lehrsätzen 2 u. 1 ausgeführt und Erkl. 14, Seite 12, berücksichtigt, gibt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x-x^2)^2} \cdot (1-2x) \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(1-2x)}{(x-x^2)^2} = \frac{2x-1}{(x-x^2)^2}$$

---

g). Differentialquotient einer Funktion von einer Funktion.

hrsatz 7. Der Differentialquotient
Funktion von einer Funktion
eich dem Produkte der Differential-
enten der einzelnen Funktionen.

Vorauss. $y = f(F(x))$ oder:
$y = f(u)$, wenn:
$u = F(x)$ ist.

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Beweis. Methode a. Aendert man in der gegebenen Funktion:

1) . . . . $y = f(u)$ in welcher $u = F(x)$ ist,

die unabhängig Veränderliche x um Δx, so ändern sich die abhängig Veränderlichen u und y um Δu, bezw. Δy, wonach man erhält:

2) . . . . $y + \Delta y = f(u + \Delta u)$

Subtrahiert man von dieser Gleichung die ursprüngliche Gleich. 1), so bleibt:

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Dividiert man beiderseits zur Bildung des **Differenzenquotienten** mit Δx, so wird:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x}$$

Multipliziert man den Bruch a
rechten Seite dieser Gleichung m
und dividiert denselben auch dur
damit **der Wert** desselben unver
bleibt, so erhält man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Führt man nun die beliebige
rung von x, nämlich Δx, allmähl
Grenze Null über, so gehen auch
Δy allmählig in Null über und m
bei der Grenze Null:

$$lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} . li$$

Da nun nach der Antwort der Fr

$$lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

und (weil $y = f(u)$):

$$lim \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} = \frac{dy}{du}$$ is

so erhält man für den gesuchten
rentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

was zu beweisen war.

Zusatz 1. Vorstehender Lehrsatz erleidet eine Erweiterung, wenn z. B.:

$y = f(u)$
$u = F(z)$ und
$z = \varphi(x)$ oder:
$y = f\big(F(\varphi(x))\big)$ ist.

Für den Differentialquotienten hat man alsdann:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Beweis.

Andeutung. Ist $y = f(u)$ und
rekt oder indirekt von x abh
so hat man nach dem vorsteh
Lehrsatze für den Differentialquoti

1). . . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Nun ist aber auch: $u = F(z)$
von x abhängig, nämlich: $z =$
mithin hat man nach demselben
satze für den Differentialquotiente

2). . . . . $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

Setzt man den Wert für $\frac{du}{dx}$ aus Gl. 2) in Gl. 1) ein, so resultiert:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

was zu beweisen war.

Uebungsaufgaben.

gabe 19. Man soll den Differen-otient, von:

$$y = (ax)^2$$

imen.

Auflösung. Um eine derjenigen Formen zu erhalten, für welche man den Diff.-Q. kennt, setze man:

a) . . . $ax = u$, alsdann ist:

b) . . . $y = u^2$ $(= f(u))$ und

c) . . . $u = ax$ $(= f(x))$

Nach dem Lehrsatze 7 erhält man für den Differentialquotienten:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

l. 19. Für: $y = (ax)^2$ hätte man auch en können:

$y = a^2x^2$, mithin hat man nach hrsätzen 4 und 1:

$\frac{dy}{dx} = a^2 \,.\, 2x$ oder:

$\frac{dy}{dx} = 2a^2x$ (dasselbe Resultat wie tehend).

Bildet man nun $\frac{dy}{du}$ aus Gl. b) und $\frac{du}{dx}$ aus Gl. c), so erhält man aus Gl. b):

$$\frac{dy}{du} = 2u \text{ (siehe Lehrsatz 1)}$$

oder für u seinen Wert ax aus Gl. a) gesetzt:

2) . . . $\frac{dy}{du} = 2 \,.\, ax$ und aus Gl. c):

3) . . . $\frac{du}{dx} = a$ (siehe Lehrs. 4 u. Erkl. 14)

Substituiert man diese Werte in Gl. 1), so wird:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \,.\, ax \,.\, a \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2a^2x \text{ (siehe Erkl. 19)}$$

---

fgabe 20. Ebenso, von:

$$y = (a + bx)^2$$

Auflösung. Analog der vorigen Aufgabe setze man:

a) . . . $a + bx = u$, alsdann ist:

b) . . . $y = u^2 (= f(u))$ und

c) . . . $u = a + bx (= F(x))$

Nach dem Lehrsatze 7 erhäl
für den Differentialquotienten:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Aus Gleichung b) erhält man:

$$\frac{dy}{du} = 2u \text{ (nach Lehrs. 1),}$$

2) . . . $\frac{dy}{du} = 2(a+bx)$ (nach Gl

Aus Gleichung c) erhält man:

3) . . . $\frac{du}{dx} = b$ (nach Lehrs. 2, 4 u. E

Aus den Gleichungen 1), 2) u
folgt:

$$\frac{dy}{dx} = 2(a+bx) \cdot b \text{ oder}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2b(a+bx)$$

Aufgabe 21. Ebenso, von:

$$y = \left(a - \frac{1}{x}\right)^3$$

Auflösung. Analog der Aufga
erhält man:

a) . . . . $y = u^3 (= f(u))$, wenn:

b) . . . . $u = a - \frac{1}{x} (= F(x))$ is

Nach Lehrsatz 7 ist:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a):

2) . . . $\frac{dy}{du} = 3u^2 = 3\left(a - \frac{1}{x}\right)^2$ (na
s

und aus Gleichung b):

3) . . . $\frac{du}{dx} = --\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$

(nach den Lehrsätzen 2, 4 und dem Zusatze
des Lehrsatzes 6)

sich ergibt, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(a - \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

oder nach Erkl. 20:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^4}(ax-1)^2$$

Erkl. 20. $3\left(a - \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}\left(\frac{ax-1}{x}\right)^2 =$
$\frac{3}{x^2} \cdot \frac{(ax-1)^2}{x^2} = \frac{3}{x^4}(ax-1)^2$

gabe 22. Ebenso, von:

$$y = \frac{1}{a+bx}$$

Auflösung. Analog der Aufgabe 19, erhält man:

$$y = \frac{1}{u} \text{ oder:}$$

a) . . . . $y = u^{-1} (= f(u))$, wenn:

b) . . . . $u = a+bx (= F(x))$ ist.

Nach Lehrsatz 7 ist:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a):

$$\frac{dy}{du} = -1 \,.\, u^{-2} = -u^{-2} = -\frac{1}{u^2}$$

(nach dem Lehrsatz 1)

oder:

2) . . . $\frac{dy}{du} = -\frac{1}{(a+bx)^2}$ (siehe auch Erkl. 21)

und aus Gleich. b):

3) . . . $\frac{du}{dx} = b$ (nach d. Lehrsätzen 2, 4 u. 1)

sich ergibt, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(a+bx)^2} \cdot b \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{(a+bx)^2} \text{ (siehe Erkl. 21)}$$

. 21. Ist:

. . . $y = \frac{1}{u} (= f(u))$ und

. . . $u = (a+bx) (= F(x))$

man auch aus Gleichung a) nach dem 3 4 des Lehrsatzes 6:

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{u^2} = -\frac{1}{(a+bx)^2}$$

---

fgabe 23. Ebenso, von:

$$y = \sqrt{a+bx}$$

Auflösung. Man schreibe:

$$y = (a+bx)^{\frac{1}{2}}$$

und setze $(a+bx) = u$, so hat man:

a) . . . . $y = u^{\frac{1}{2}} \; (= f(u))$

b) . . . . $u = a+bx (= F(x))$

Nach Lehrsatz 7, ist:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a):

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} \text{ (nach Lehrsatz 1)}$$

oder: $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}$ d. i.:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ (s. Erkl. 22) oder:}$$

kl. 22. Obgleich man jede Wurzel als otenz schreiben kann und der Diff.-Quot. otenz nach Lehrsatz 1 gefunden werden so ist es doch vorteilhaft sich den Diff.-Quot. uadratwurzel, weil die Quadratwurzel bei alrechnungen am häufigsten vorkommt, lers zu merken.

Ist: $y = \sqrt{x}$, so hat man:

. . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ denn für:

$y = \sqrt{x}$ kann man schreiben:

$y = x^{\frac{1}{2}}$

ı ist nach Lehrsatz 1:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}$ oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \cdot x^{1/2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ist ferner: $y = \sqrt{u}$, wenn: $u = f(x)$ ist, so hat man nach dem Lehrsatze 7:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

und analog der obigen Gleichung 1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{dx}$$

2) . . . $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{a+bx}}$

und aus Gleichung b):

3) . . . $\frac{du}{dx} = b$ (nach den Lehrsätz und Erkl. 14)

sich ergibt, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{a+bx}} \cdot b = \frac{b}{2\sqrt{a+}$$

Aufgabe 24. Ebenso, von:

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-a)^3}}$$

Auflösung.

Für: $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-a)^3}}$ kann

schreiben:

$$y = (x-a)^{-\frac{3}{4}}$$

Setzt man: $(x-a) = u$, so is

a) . . . . $y = u^{-\frac{3}{4}}$ $(= f(u))$ un

b) . . . . $u = x - a\,(= F(x))$

Nach Lehrsatz 7, ist:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a):

$$\frac{dy}{du} = -\frac{3}{4} u^{-\frac{3}{4}-1}$$ (nach Le

oder: $\frac{dy}{du} = -\frac{3}{4} u^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4u^{\frac{7}{4}}}$

oder:

2) . . . $\frac{dy}{du} = -\frac{3}{\sqrt[4]{u^7}} = -\frac{3}{\sqrt[4]{(x}}$

und aus Gleichung b):

3) . . . $\frac{du}{dx} = 1$ (nach den Lehrsätze und der Erkl. 14

sich ergibt, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{\sqrt[4]{(x-a)^7}}$$

ı). Differentialquotient einer Exponentialgrösse.

rsatz 8. Der Differentialquotient Exponentialgrösse (Erkl. 23) — z. B. xponentialgrösse a^x — ist gleich xponentialgrösse selbst multipli- mit dem **natürlichen** Logarithmus 24) der Basis jener Exponential- .

l. 23. Man versteht hier unter **Expo-** **rösse** eine Potenz, deren Exponent abhängig Variabele (x) ist.

kl. 24. Unter dem **natürlichen** Logarith- ner Zahl versteht man den Logarithmus Zahl, dessen Basis die **irrationale Zahl:** 718281828.... ist, im Gegensatz zu dem **hen** Logarithmus einer Zahl, dessen Ba- **Zahl 10** ist. (Man siehe: Die Logarith- und die höheren Reihen, Exponential- (Analysis)).
r **natürliche** Logarithmus einer Zahl, z. B. l durch: $lg\,a$ (auch durch $l\,a$), der **künst-** ogarithmus der Zahl a, durch: $log\,a$ be- et.

kl. 25. Jede **Exponentialgrösse**, wie a^x, man als die unendliche **Exponentialreihe**:

$$1+x\,lg\,a+\frac{(x\,.\,lg\,a)^2}{1\,.\,2}+\frac{(x\,.\,lg\,a)^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots.$$

cher $lg\,a$ nach Erkl. 24 den **natürlichen** ithmus der Zahl a bezeichnet, schreiben Die höheren Reihen, die Exponentialreihen).
alog hat man, für:

$$a^{\Delta x}=1+\Delta x\,lg\,a+\frac{(\Delta x\,log\,a)^2}{1\,.\,2}+\frac{(\Delta x\,lg\,a)^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots.$$

Vorauss. $y=a^x$

Behaupt. $\frac{dy}{dx}=a^x\,lg\,a$

Beweis. Methode b. Aendert man in der gegebenen Funktion:

1). . . . $y=a^x$

die unabhängig Variabele x um Δx, so ändert sich auch die abhängig Variabele y; ist diese Aenderung Δy, so hat man:

$$y+\Delta y=a^{x+\Delta x} \text{ oder:}$$

$$y+\Delta y=a^x\,.\,a^{\Delta x}$$

Schreibt man nun den Faktor: $a^{\Delta x}$ auf der rechten Seite dieser Gleichung nach der Erkl. 25 als die unendliche Reihe:

$$a^{\Delta x}=1+\Delta x\,.\,lg\,a+\frac{(\Delta x\,.\,lg\,a)^2}{1\,.\,2}+\frac{(\Delta x\,.\,lg\,a)^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots..$$

so erhält man:

$$y+\Delta y=a^x\left(1+\Delta x\,.\,lg\,a+\frac{(\Delta x\,.\,lg\,a)^2}{1\,.\,2}+\frac{(\Delta x\,.\,lg\,a)^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots..\right)$$

oder:

2). . . $y+\Delta y=a^x+a^x\,.\,\Delta x\,.\,lg\,a+\frac{a^x\,(\Delta x\,.\,lg\,a)^2}{1\,.\,2}+\ldots..$

Subtrahiert man hiervon die ursprüngliche Gleichung 1), so wird:

$$\Delta y=a^x\,.\,\Delta x\,.\,lg\,a+\frac{a^x\,(\Delta x\,.\,lg\,a)^2}{1\,.\,2}+\ldots$$

Wird nun zur Bildung des **Differenzenquotienten** beiderseits mit Δx dividiert, so erhält man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\,.\,lg\,a+\frac{a^x\,.\,\Delta x\,(lg\,a)^2}{1\,.\,2}+\ldots$$

Führt man nun die beliebige Aenderung Δx zur Grenze **Null** über, so erhält man nach der Erkl. 17, und da alle Glieder,

welche $\Delta x =$ Null erhalten, nach 11, selbst = Null werden:

$$\frac{dy}{dx} = a^x . lg\, a$$

was zu beweisen war.

Zusatz 1. Hat man die Funktion:

$$y = a^x$$

und man will in dem Diff.-Quotienten:

$$\frac{dy}{dx} = a^x . lg\, a \quad \text{(s. vorig. Lehrsatz)}$$

derselben, für den **natürlichen** Logarithmus der Zahl a den **künstlichen** einführen, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = a^x . \frac{log\, a}{log\, e}$$

Beweis.

Andeutung. Da:

$$\frac{log.a}{log.e} = \frac{log.nat.a}{log.nat.e} = \frac{lg\, a}{lg\, e}$$ (siehe Logari

und der Logarithmus **der Basis** dem Logarithmensystem = 1, also

$$lg\, e = 1$$ (siehe: Die Logar

ist, so erhält man:

$$\frac{log\, a}{log\, e} = \frac{lg\, a}{1}$$ oder:

$$lg\, a = \frac{log\, a}{log\, e}$$. Dies wur

nebenstehendem Zusatze berücksi

Zusatz 2. Hat man die Funktion:

$$y = e^x$$

so ist nach vorigem Lehrsatze der Diff.-Quotient derselben:

$$\frac{dy}{dx} = e^x . lg\, e$$ oder, da der **natürliche** Logarithmus der Basis $e = 1$ ist:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \quad \ldots\ldots \text{ d. h.:}$$

. . die Funktion e^x hat die cha ristische Eigenschaft, dass ihr Quotient gleich der Funktion selb

Diesen Diff.-Quotient kann man auch analog des Beweises zu Lehrsatz 8 herleiten, wenn man berücksichtigt, dass:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots .$$ ist

(siehe: Die höheren Reihen, Exponentialreihen).

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 25. Man soll den Differentialquotient, von:

$$y = 3^x$$

bestimmen.

Auflösung. Nach Lehrsatz 8 e man:

1) . . . . . $\frac{dy}{dx} = 3^x . lg\, 3$

oder nach dem Zusatze 1:

2)... $\frac{dy}{dx} = 3^x \cdot \frac{log\,3}{log\,e} = 3^x \cdot \frac{log\,3}{log\,2{,}71828...}$

oder nach Erkl. 26:

$$\frac{dy}{dx} = 3^x \cdot \frac{log\,3}{0{,}4342945}$$

d. 26. Der Logarithmus der irrationahl $e = 2{,}7182818...$ zur Basis 10, ist: 0,4342945....

---

fgabe 26. Ebenso, von:

$y = a^{3x^4}$

Auflösung. Um eine derjenigen Formen zu erhalten, für welche man den Diff.-Quotient bilden kann, setze man:

$3x^4 = u$, alsdann ist:

a) . . . . $y = a^u$ $(= f(u))$ und:

b) . . . . $u = 3x^4 (= F(x))$

Nach dem Lehrsatze 7 erhält man für den Diff.-Quotienten:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a):

2) . . . $\frac{dy}{du} = a^u . lg\,a$ (n. Lehrs. 8) $= a^{3x^4} lg\,a$

und aus Gleichung b):

3) . . . $\frac{du}{dx} = 12x^3$ (nach Lehrsatz 4 u. 1)

sich ergibt, so hat man nach Gleich. 1):

$$\frac{dy}{dx} = a^{3x^4} lg\,a \,.\, 12x^3 \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = 12a^{3x^4} . x^3 lg\,a$$

---

ufgabe 27. Ebenso, von:

$y = a^{\sqrt{x}}$

Auflösung. Analog der vorigen Aufgabe, setze man:

$\sqrt{x} = u$, alsdann ist:

a) . . . . $y = a^u$ $(= f(u))$, wenn:

b) . . . . $u = \sqrt{x} (= F(x))$ ist.

Nach Lehrsatz 7, ist:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a):

2) . . . $\frac{dy}{du} = a^u . lg\,a$ (n. Lehrs. 8) $= a^{\sqrt{x}} lg\,a$

und aus Gleichung b):

3) . . . $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (nach der

sich ergibt, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = a^{\sqrt{x}} lg\, a \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^{\sqrt{x}} lg\, a}{2\sqrt{x}}$$

Aufgabe 28. Ebenso, von:

$$y = x^n . n^x$$

Auflösung. Nach Lehrsatz 5 man:

$$\frac{dy}{dx} = x^n . \frac{d(n^x)}{dx} + n^x . \frac{d}{}$$

Dies nach den Lehrsätzen 8 weiter differentiiert, gibt:

$$\frac{dy}{dx} = x^n . n^x\, lg\, n + n^x .$$

oder nach Erkl. 27:

$$\frac{dy}{dx} = n^x . x^{n-1} (x\, lg\, n +$$

Erkl. 27. Für x^n in dem ersten Summanden kann man schreiben:

$$x^{n-1+1} \text{ oder: } x^{n-1} . x$$

wodurch ermöglicht wird, dass man ausser dem Faktor n^x, auch: x^{n-1} ausscheiden kann.

---

i). Differentialquotient einer logarithmischen Grö

Lehrsatz 9. Der Differentialquotient des natürlichen Logarithmus einer veränderlichen Grösse ist gleich dem reziproken Werte der veränderlichen Grösse.

Vorauss. $y = lg\, x$

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

Beweis. Methode b. Aendert der gegebenen Funktion:

1). . . . . $y = lg\, x$

die unabhängig Veränderliche x so ändert sich auch die abhäng riabele y; ist diese Aenderung Δy, so hat man:

$$y + \Delta y = lg\,(x + \Delta x)$$

oder was dasselbe ist:

$$y + \Delta y = lg\, x \cdot \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

oder nach Erkl. 28:

$$y + \Delta y = lg\, x + lg \left(1 +$$

Erkl. 28. Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren (siehe: Die Logarithmen), daher:

$$lg\, x \cdot \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = lg\, x + lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

rl. 29. Jede logarithmische Grösse, wie: $-x$) kann man als die unendliche **loga-che** Reihe:

$$+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

ben (siehe: Die höheren Reihen, loga-sche Reihen).

r $lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$ hat man hiernach auf ge Weise:

$$+\frac{\Delta x}{x}) = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{1.2.x^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3.x^3} - \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4.x^4} + \ldots.$$

Schreibt man den zweiten Summanden rechts, nämlich: $lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$ nach der Erkl. 29 als eine Reihe, so wird:

$$2) \ldots y + \Delta y = lg\, x + \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{1.2.x^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3.x^3} - \ldots.$$

Subtrahiert man hiervon die ursprüngliche Gleichung 1), so ist:

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{1.2.x^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3.x^3} - \ldots$$

Dividiert man beiderseits zur Bildung des **Differenzenquotienten** mit Δx, so resultiert:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{1.2.x^2} + \frac{\Delta x^2}{1.2.3.x^3} - \ldots$$

Wird endlich Δx zur Grenze **Null** übergeführt, so erhält man nach Erkl. 17, und weil alle Glieder, welche Δx (= **Null**) enthalten, nach Erkl. 11 selbst = Null werden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$ was zu beweisen war.

---

satz 1. Hat man die Funktion:

$$y = log\, x$$

nicht den **natürlichen** Logarithmus Veränderlichen x, sondern den **lichen**, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} . log\, e$$

Beweis.

Andeutung. Aus der Gleichung:

$$\frac{log\, a}{log\, e} = \frac{lg\, a}{1}$$ (siehe in dem Beweise zu dem Zusatze 1, Seite 28)

erhält man:

$$log\, a = lg\, a . log\, e$$

oder für $a = x$ gesetzt:

$log\, x = lg\, x . log\, e$. Dies für $log\, x$ in der gegebenen Funktion:

$y = log\, x$ substituiert, gibt:

$$y = lg\, x . log\, e$$

Da $log\, e$ (= log 2,718...) eine **konstante** Grösse ist, so hat man nach dem Lehrsatz 4 und nach dem vorstehenden Lehrsatz 9:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} . log\, e$$

Aufgabe 29. Man soll den Differentialquotienten, von:

$$y = (lg\,x)^4 \quad \text{(Erkl. 30)}$$

bestimmen.

Erkl. 30. Für $(lg\,x)^4$ wird auch oft geschrieben: $lg^4 x$. Niemals aber darf man für $(lg\,x)^4$ schreiben: $lg\,x^4$; denn dies würde nach den Regeln der Logarithmierung (siehe: Die Logarithmen), geben: $4\,.\,lg\,x$.

Auflösung. Man setze:

$$lg\,x = u, \text{ alsdann ist:}$$

a) . . . . $y = u^4$ $(= f(u))$ und

b) . . . . $u = lg\,x\,(= F(x))$

Nach dem Lehrsatze 7, ist:

1) . . . $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Da nun aus der Gleichung a):

2) . . . $\dfrac{dy}{du} = 4u^3$ (n. Lehrs. 1) $= 4.$

und aus Gleichung b):

3) . . . $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$ (nach Lehrsatz 9)

sich ergibt, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = 4\,.\,(lg\,x)^3 . \frac{1}{x} \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\,.\,lg^3 x}{x} \text{ (s. auch Erkl.}$$

Aufgabe 30. Ebenso, von:

$$y = lg\,(x^n)$$

Auflösung. Man setze;

$$x^n = u, \text{ alsdann ist:}$$

a) . . . . $y = lg\,u$ $(= f(u))$ und

b) . . . . $u = x^n$ $(= F(x))$

Nach dem Lehrsatze 7, ist:

1) . . . $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a):

2) . . . $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{u}$ (nach Lehrs. 9) $= \dfrac{1}{x^n}$

und aus Gleichung b):

3) . . . $\dfrac{du}{dx} = nx^{n-1}$ (siehe Lehrs. 1)

sich ergibt, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^n} \cdot nx^{n-1} \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n\,.\,x^n . x^{-1}}{x^n} = n\,.\,x^{-1}$$

mithin: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{n}{x}$

ıfgabe 31. Ebenso, von:

$$y = lg(ax)$$

Auflösung. Nach der Erkl. 28 kann man auch schreiben:

$$y = lg\,a + lg\,x$$

Für den gesuchten Differential-Quot. hat man somit nach den Lehrsätzen 2, 3 und 9:

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{x} \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

ıfgabe 32. Ebenso, von:

$$y = lg\,lg\,x$$

Auflösung. Man setze $log\,x = u$, alsdann ist:

a) . . . . $y = lg\,u\ (= f(u))$ und

b) . . . . $u = lg\,x\ (= F(x))$

Nach dem Lehrsatze 7, ist:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a):

2) . . . $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$ (nach Lehrs. 9) $= \frac{1}{lg\,x}$

und aus Gleichung b):

3) . . . $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ (nach Lehrs. 9)

sich ergibt, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{lg\,x} \cdot \frac{1}{x}, \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \,.\, lg\,x}$$

ıfgabe 33. Ebenso, von:

$$y = \frac{1}{x} \cdot lg\,x$$

Auflösung. Man setze $\frac{1}{x} = u$, und $lg\,x = v$, alsdann ist:

a) . . . . $u = \frac{1}{x}\ \ (= f(x))$

b) . . . . $v = lg\,x\ (= F(x))$ und

c) . . . . $y = u \,.\, v\,(= f(x) \,.\, F(x))$

Nach dem Lehrsatze 5, ist:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$

Erkl. 31. Hat man die Funktion:

$y = \frac{1}{x}$, so kann man dies schreiben:

$y = x^{-1}$ (siehe: Die Potenzen).

Nach dem Lehrsatze 1 erhält man für den Different.-Quot.:

$$\frac{dy}{dx} = -1 \cdot x^{-1-1} \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

Es ist vorteilhaft sich diesen Differentialquotienten besonders zu merken, da er oft vorkommt.

Hat man: $u = \frac{1}{x}$, so ist analog dem Vorstehenden:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

Da nun aus der Gleichung a):

2) . . . $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ (siehe Erkl. 3

und aus Gleichung b):

3) . . . $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$ (nach Lehrsatz 9

sich ergibt, so erhält man au
Gleichungen 1, 2 u. 3, und mit
sicht, dass $u = \frac{1}{x}$ und $v = lg\,x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + lg\,x \cdot -$$

Dies gibt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{lg\,x}{x^2} \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - lg\,x}{x^2}$$

---

k). Ungelöste Aufgaben.

(Fortsetzung von Seite 16.)

Aufgabe 16. Man soll den Differentialquotient, von: $y = \frac{1-x}{1+x}$ besti

„ **17.** Ebenso, von: $y = \frac{x^2}{x^5+x+1}$

„ **18.** „ „ „ $y = \frac{4x+1}{x^3-1}$

„ **19.** „ „ „ $y = \frac{n}{x}$

„ **20.** „ „ „ $y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$

„ **21.** „ „ „ $y = \sqrt{\frac{x}{x^2-a^2}}$

„ **22.** „ „ „ $y = (3+4x^2)^4$

„ **23.** „ „ „ $y = (x+1)^2(2x-3)$

„ **24.** „ „ „ $y = \sqrt{5x^3+8x^2+x-1}$

„ **25.** „ „ „ $y = \sqrt[4]{x^2+1}$

„ **26.** „ „ „ $y = e^{-ax}$

„ **27.** „ „ „ $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

„ **28.** „ „ „ $y = e^{x^x}$

„ **29.** „ „ „ $y = e^{a^{x^3}}$

„ **30.** „ „ „ $y = a^{mx+n}$

„ **31.** „ „ „ $y = lg\,(a-x)$

Aufgabe 32. Ebenso, von: $y = lg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

„ **33.** „ „ $y = lg\,x + lg\,x^2$

„ **34.** „ „ $y = lg\left(\frac{a}{a+x}\right)$

„ **35.** „ „ $y = lg\,(3x^2 - 5)$

„ **36.** „ „ $y = (1+x)\,.\,lg\,(1+x)$

„ **37.** „ „ $y = a^x\,.\,lg\,a^x$

Die Differentialquotienten der goniometrischen (trigonometrischen) Funktionen.

Differentialquotient vom Sinus eines veränderlichen Bogens.

hrsatz 10. Der Differentialquotient goniometrischen Funktion:

$y = sin\,x$, bezw. **des Sinus eines derlichen Bogens** x — siehe Erkl. 32 t gleich dem Kosinus des veränchen Bogens x.

Vorauss. $y = sin\,x$

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = cos\,x$

Beweis I.

Methode a. Aendert man in der gegebenen Funktion:

1) . . . . . $y = sin\,x$

den veränderlichen Bogen x (Winkel x, siehe Erkl. 32) um Δx, so ändert sich auch die abhängig Variabele y. Ist diese Aenderung z. B. Δy, so hat man:

2) . . . . $y + \Delta y = sin\,(x + \Delta x)$

Subtrahiert man die ursprüngliche Gleichung 1), so ist:

$$\Delta y = sin\,(x + \Delta x) - sin\,x$$

Dividiert man beiderseits zur Bildung des **Differenzenquotienten** mit Δx, so resultiert:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sin\,(x + \Delta x) - sin\,x}{\Delta x}$$

Formt man die rechte Seite dieser Gleichung um, so geht dieselbe über, in:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cdot cos\,\frac{2x + \Delta x}{2} \cdot sin\,\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

(siehe Erkl. 33) oder:

kl. 32. Die **Bezeichnung eines Winkels** ge- t nicht immer durch Grade, Minuten ekunden, sondern auch — und beson- n der höheren Mathematik, wie an dieser — durch die Masszahl der Länge nigen **Bogens**, welchen man mit dem s = 1 zwischen seinen Schenkel be- bt (siehe das Kapitel: **Goniometrie**).

kl. 33. Eine goniometr. Formel, heisst:

$$\alpha - sin\,\beta = 2\,.\,cos\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,sin\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Goniometrie: Relationen zwischen der e, bezw. der Differenz der goniometr. ionen zweier Winkel).

ch dieser Formel kann man in analoger für:

$$sin\,(x + \Delta x) - sin\,x =$$

$$cos\,\frac{x + \Delta x + x}{2}\,.\,sin\,\frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$sin\,(x + \Delta x) - sin\,x =$$

$$cos\,\frac{2x + \Delta x}{2}\,.\,sin\,\frac{\Delta x}{2}$$ schreiben.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\frac{2x+\Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

(Zähler und Nenner wurde durch 2 d

Dies kann man auch schreibe

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\frac{2x+\Delta x}{2} \cdot \frac{\sin}{}$$

oder:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin}{}$$

Setzt man noch für $\frac{\Delta x}{2} = \alpha$, s man für den **Differenzenquotienter**

3). . . . $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos(x+\alpha) \cdot \frac{\sin}{\alpha}$

Führt man nun die beliebige rung: Δx, bezw. $\frac{\Delta x}{2}$ oder α, zur **Null** über, angedeutet, durch:

$$lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = lim\left[\cos(x+\alpha) \cdot \right.$$

und berücksichtigt, dass nach d 34, wenn der Bogen α (d. i. di bige Aenderung $\frac{\Delta x}{2}$, bezw. Δx) Grenze Null stetig nähert, der $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ wird, so erhält ma Uebergang zur Grenze Null:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+0) \cdot 1 \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \text{ was zu beweis}$$

Erkl. 34. Wird in dem Ausdruck:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

der Bogen α immer kleiner und kleiner, so wird auch der Sinus dieses Bogens α (d. i. der Sinus des dem Bogen α zugehörigen Centriewinkels, wenn der Radius des zugehörigen Kreises = 1 angenommen wird — vergl. auch Goniometrie: **Die lineare Darstellung der goniometrischen Funktionen**) stetig kleiner, d. h. der Sinus dieses Bogens α und der Bogen α nähern sich immer mehr und werden bei dem Uebergange zur Grenze Null **einander gleich**, bezw. jeder = Null. Somit wird:

$$lim\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{0}{0}$$

Dieser Bruch $\frac{0}{0}$ stellt nun nicht mehr eine **unbestimmte** Grösse dar (siehe Erkl. 9, Seite 8), sondern ist = 1, weil man weiss, dass $\sin\alpha$ und Bogen α bei dem Uebergange zur Grenze Null **einander gleich** wurden und **gleiche** Grössen in einander dividiert, den Quotienten 1 liefern.

Hiernach ist:

$$lim\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{0}{0} = 1$$

Beweis II.

Methode b. Aendert man in gebenen Funktion:

1) . . . . . $y = \sin x$

den veränderlichen Bogen x um ändert sich auch die abhängig bele y. Ist diese Aenderung z. so hat man:

·kl. 35. Eine goniometr. Formel heisst:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta$$

Goniometrie: Relationen zwischen den metrischen Funktionen der Summe, bezw. Differenz zweier Winkel).

ıch dieser Formel kann man in analoger ², für:

$$x+\Delta x) = \sin x \,.\, \cos\Delta x + \cos x \,.\, \sin\Delta x$$

ben.

·kl. 36. Den Sinus eines Bogens (Win- wie $\sin x$, kann man als die unendliche ıetrische Reihe:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

2). .

ben (siehe: Die höheren Reihen, gonio- ische Reihen). Dementsprechend, ist:

$$\sin\Delta x = \Delta x - \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{\Delta x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\Delta x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

·kl 37. Den Kosinus eines Bogens (Win- wie $\cos x$, kann man als die unendliche ıetrische Reihe:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

ben (siehe: Die höheren Reihen, gonio- ische Reihen). Dementsprechend, ist:

$$\cos\Delta x = 1 - \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} - \frac{\Delta x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$y + \Delta y = \sin(x+\Delta x)$$

oder was dasselbe ist:

$$y + \Delta y = \sin x \,.\, \cos\Delta x + \cos x \,.\, \sin\Delta x$$

(siehe Erkl. 35)

Schreibt man für $\sin\Delta x$ und $\cos\Delta x$ die in den Erklärungen 36 u. 37 angeführten unendlichen Reihen, so wird:

$$y+\Delta y = \sin x \,.\, \left(1 - \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) + \cos x \left(\Delta x - \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{\Delta x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

oder:

$$y+\Delta y = \sin x - \frac{\sin x \,.\, \Delta x^2}{1.2} + \frac{\sin x \,.\, \Delta x^4}{1.2.3.4} - \ldots + \cos x \,.\, \Delta x - \frac{\cos x \,.\, \Delta x^3}{1.2.3} + \frac{\cos x \,.\, \Delta x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Subtrahiert man hiervon die ursprüngliche Funktion 1), so ist:

$$\Delta y = -\frac{\sin x \,.\, \Delta x^2}{1.2} + \frac{\sin x \,.\, \Delta x^4}{1.2.3.4} - \ldots + \cos x \,.\, \Delta x - \frac{\cos x \,.\, \Delta x^3}{1.2.3} + \frac{\cos x \,.\, \Delta x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Dividiert man beiderseits, zur Bildung des **Differenzenquotienten**, mit Δx, so resultiert:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin x \,.\, \Delta x}{1.2} + \frac{\sin x \,.\, \Delta x^3}{1.2.3.4} - \ldots + \cos x - \frac{\cos x \,.\, \Delta x^2}{1.2.3} + \frac{\cos x \,.\, \Delta x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Wird endlich Δx zur Grenze **Null** übergeführt, so erhält man nach der Erkl. 17 und weil alle Glieder, welche Δx (= **Null**) enthalten, nach Erkl. 11 selbst = Null werden:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \text{ was zu beweisen war.}$$

Uebungsaufgaben.

ıfgabe 34. Man soll den Differen- uotient, von:

$$y = a \,.\, \sin x$$

mmen.

Auflösung. Da in der gegebenen Funktion:

$$y = a \,.\, \sin x$$

a ein konstanter Faktor ist, so man — nach dem Lehrsatze 4 und Lehrsatze 10 — für den gesuchten ferentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = a \,.\, \cos x$$

Aufgabe 35. Ebenso, von:

$$y = a \,.\, \sin^n x$$

Auflösung. Man hat zu bea dass die gegebene Funktion:

$$y = a \,.\, \sin^n x$$

auch geschrieben werden kann:

$$y = a \,.\, (\sin x)^n$$ (siehe Erk

Erkl. 38. Die Schreibweisen: $\sin^n x$ oder $\sin x^n$ bedeuten nichts anderes, als: $(\sin x)^n$ Man vergl. hierbei das Kapitel: **Goniometrie.**

Setzt man nun: $\sin x = u$, so i

a) . . . . $y = a \,.\, u^n \; (= f(u))$ und

b) . . . . $u = \sin x \; (= F(x))$

Nach Lehrsatz 7 hat man hier

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \,.\, \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a). nach Lehrsätzen 4 und 1:

2) . . . $\frac{dy}{du} = a \,.\, n \,.\, u^{n-1} = a \,.\, n \,.\, \sin$

$$= a \,.\, n \,.\, \sin^{n-1} x$$

und aus Gleichung b). nach dem satze 10:

3) . . . $\frac{du}{dx} = \cos x$ sich ergibt, s

hält man aus den Gleichungen 1) und 3). für den gesuchten Differe quotienten:

$$\frac{dy}{dx} = a \,.\, n \,.\, \sin^{n-1} x \,.\, \cos x$$

Aufgabe 36. Ebenso, von:

$$y = \sin \frac{x}{a}$$

Auflösung. Man setze: $\frac{x}{a} = u$, dann ist:

a) . . . . $y = \sin u \; (= f(u))$

b) . . . . $u = \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \,.\, x \; (= F(x)$

Nach dem Lehrsatz 7, ist:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a). nach dem Lehrsatz 10:

2) . . . $\frac{dy}{du} = \cos u = \cos \frac{x}{a}$

und aus Gleichung b). nach dem Lehrsatz 4 und der Erkl. 14:

3) . . . $\frac{du}{dx} = \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a}$ sich ergibt,

so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \cos \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} \cdot \cos \frac{x}{a}$$

ıfgabe 37. Ebenso, von:

$y = a \,.\, \sin \frac{a}{x}$

Auflösung. Man setze: $\frac{a}{x} = u$, alsdann ist:

a) . . . . . $y = a \,.\, \sin u \quad (= f(u))$

b) . . . . $u = \frac{a}{x} = a \cdot \frac{1}{x} \quad (= F(x))$

Nach dem Lehrsatz 7, ist:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a). nach den Lehrsätzen 4 und 10:

2) . . . $\frac{dy}{du} = a \,.\, \cos u = a \,.\, \cos \frac{a}{x}$

und aus Gleichung b). nach dem Lehrsatz 4 und der Erkl. 31:

3) . . . $\frac{du}{dx} = a \,.\, -\frac{1}{x^2} = -\frac{a}{x^2}$

sich ergibt, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = a \,.\, \cos \frac{x}{a} \cdot -\frac{a}{x^2} \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{x^3} \cdot \cos \frac{a}{x}$$

ıfgabe 38. Ebenso, von:

$y = \sin (a + bx^2)$

Auflösung. Man setze: $a+bx$
alsdann ist:

a) . . . . $y = \sin u \ (= f(u))$

b) . . . . $u = a + bx^2 \ (= F(x))$

Nach dem Lehrsatze 7, ist:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a). nach Lehrsatze 10:

2) . . . $\frac{dy}{du} = \cos u = \cos(a+bx^2$

und aus Gleichung b). nach den sätzen 2, 3, 4 und 1:

3) . . . $\frac{du}{dx} = 2b \,.\, x$

sich ergibt, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(a+bx^2) \,.\, 2bx$$

$$\frac{dy}{dx} = 2bx \,.\, \cos(a+bx^2)$$

Aufgabe 39. Ebenso, von:

$$y = 3 \sin x - 4 \,.\, \sin^3 x$$

Erkl. 39. Zur Bestimmung des Diff.-Quot. des zweiten Summanden: $4 \,.\, \sin^3 x$, welcher auch: $4 \,.\, (\sin x)^3$ geschrieben werden kann, denke man sich:

$4 (\sin x)^3 = z$ und $\sin x = u$ gesetzt.

Alsdann hat man:

a) . . . . . $z = 4 \,.\, u^3 \ (= f(u))$

b) . . . . . $u = \sin x \ (= F(x))$

Nach dem Lehrsatz 7 erhält man für den Differentialquotienten:

1) . . . . $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a). nach den Lehrsätzen 4 und 1:

2) . . . . $\frac{dz}{du} = 4.3.u^2 = 12.(\sin x)^2 = 12.\sin^2 x$

und aus Gleichung b). nach dem Lehrsatz 10:

3) . . . . $\frac{du}{dx} = \cos x$ sich ergibt, so erhält man aus den Gleichungen 1)., 2). und 3). den Diff.-Quot. des Summanden: $4 \,.\, \sin^3 x$, mit:

$$\frac{dz}{dx} = 12 \,.\, \sin^2 x \,.\, \cos x.$$

Auflösung. Nach den Lehrsätz 4, 10 und der Erkl. 39 erhält ma den gesuchten Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = 3 \,.\, \cos x - 12 \,.\, \sin^2 x \,.\, co$$

Den Ausdruck rechts kann man wie folgt reduzieren:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \,.\, \cos x \,(1 - 4 \,.\, \sin^2 x)$$

Setzt man nach der Erkl. 40 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \,.\, \cos x \,(1 - 4 \,.\, (1 - co$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \,.\, \cos x \,(1 - 4 + 4 \cos^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \,.\, \cos x \,(4 \cos^2 x - 3)$$

Da man nach der Erkl. 41, für Faktor $\cos x \,(4 \cos^2 x - 3) = \cos 3x$ s

rkl. 40. Eine goniometr. Formel, heisst:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

us erhält man:

$$sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$$

das Kapitel: **Die Goniometrie.**)

kl. 41. Eine goniometr. Formel, heisst:

$$cos\,3\alpha = cos\,\alpha\,(4\,.\,cos^2\alpha - 3)$$

das Kapitel: **Die Goniometrie,** Formeln für unktionen der doppelten, halben, drei- n etc. Winkel.)

ıfgabe 40. Ebenso, von:

$$y = a^x\,.\,sin\,(lg\,x)$$

kl. 42. Hat man die Funktion:

$$v = sin\,lg\,x$$

man will den Differentialquotienten $\frac{dv}{dx}$ n, so setze man: $lg\,x = w$, alsdann ist:

$$v = sin\,w\ (= f(w)) \text{ und}$$

$$w = lg\,x\ \ (= F(x))$$

ıch dem Lehrsatz 7 hat man:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

nun aus Gleichung a). nach dem Lehr- 10:

$$\frac{dv}{dw} = cos\,w = cos\,lg\,x$$

ıus Gleichung b). nach dem Lehrsatz 9:

$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{x}$ sich ergibt, so erhält aus den Gleichungen 1)., 2). und 3). für esuchten Differentialquotienten:

$$\frac{dv}{dx} = cos\,lg\,x \cdot \frac{1}{x} \text{ oder:}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \cdot cos\,lg\,x.$$

Auflösung. Man setze $a^x = u$ und $sin\,lg\,x = v$, alsdann ist:

a) . . . $y = u\,.\,v\ (= f(x)\,.\,F(x))$

b) . . . $u = a^x\ \ (= f(x))$

c) . . . $v = sin\,lg\,x\ (= F(x))$

Nach dem Lehrsatze 5 erhält man aus der Gleich. a). für den gesuchten Differentialquotienten:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung c). nach der Erkl. 42:

2) . . . $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \cdot cos\,(lg\,x)$

und aus der Gleich. b). nach dem Lehrs. 8:

3) . . . $\frac{du}{dx} = a^x\,.\,lg\,a$ sich ergibt, so erhält man aus den Gleichungen 1), 2) und 3), für den gesuchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \frac{1}{x} \cdot cos\,(lg\,x) + sin\,lg\,x\,.\,a^x\,.\,lg\,a$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \left(\frac{cos\,(lg\,x)}{x} + lg\,a\,.\,sin\,(lg\,x) \right)$$

ıfgabe 41. Ebenso, von:

$$y = e^x\,.\,sin\,(mx)$$

Auflösung. In Rücksicht der Anm. 7, Seite 14, erhält man für den gesuchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot \frac{d(\sin(mx))}{dx} + \sin(mx)$$

(nach Lehrsatz 5)

oder:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot \cos(mx) \frac{d(mx)}{dx} + \sin(m$$

(nach den Lehrsätzen 7, 10 und dem Zusa des Lehrsatzes 8)

und schliesslich:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot \cos(mx) \cdot m + \sin(mx)$$

(nach dem Lehrsatz 4 und der Erkl. 14,

Reduziert man noch den somi fundenen Ausdruck, so erhält ma einfachste Form des gesuchten rentialquotienten, mit:

$$\frac{dy}{dx} = e^x (m \cdot \cos(mx) + \sin(mx))$$

---

m). Differentialquotient vom Kosinus eines veränd lichen Bogens.

Lehrsatz 11. Der Differentialquotient der goniometrischen Funktion:

$y = \cos x$, bezw. **des Kosinus eines veränderlichen Bogens** x — siehe Erkl. 32 — ist gleich dem negativen Sinus des veränderlichen Bogens x.

Vorauss. $y = \cos x$

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = -\sin x$

Beweis I. Methode a. Aender in der gegebenen Funktion:

1) . . . . . $y = \cos x$

den veränderlichen Bogen x, d. unabhängig Veränderliche, un so ändert sich auch die abhängi riabele y. Ist diese Aenderung, Δy, so hat man:

2) . . . $y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$

Subtrahiert man hiervon die urs liche Gleichung 1)., so ist:

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

Dividiert man beiderseits zur Bi des **Differenzenquotienten**, mit Δx, hält man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

Formt man nun die rechte Seit

kl. 43. Eine goniometr. Formel, heisst:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Goniometrie: Relationen zwischen der e, bezw. der Differenz der goniometr. ionen zweier Winkel).

ich dieser Formel kann man in analoger , für:

$$\cos(x+\Delta x) - \cos x =$$

$$2 \cdot \sin\frac{x+\Delta x+x}{2} \cdot \sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$$

$$= -2 \cdot \sin\frac{2x+\Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

ben.

ser Gleichung um, so geht dieselbe über, in:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \cdot \sin\frac{2x+\Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

(siehe Erkl. 43)

oder:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\sin\frac{2x+\Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

(Zähler und Nenner wurde durch 2 dividiert).

Dies kann man auch schreiben:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\frac{2x+\Delta x}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

oder:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Setzt man noch: $\frac{\Delta x}{2} = \alpha$, so erhält man für den **Differenzenquotienten:**

$$3) \ldots \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin(x+\alpha) \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Führt man endlich die beliebige Aenderung Δx, bezw. $\frac{\Delta x}{2}$ oder α, zur Grenze **Null** über, angedeutet, durch:

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\left[-\sin(x+\alpha) \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right]$$

und berücksichtigt, dass nach der Erkl. 34, wenn der Bogen α (d. i. die beliebige Aenderung $\frac{\Delta x}{2}$, bezw. Δx) sich der Grenze Null stetig nähert, der Faktor: $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ wird, so erhält man beim Uebergang zur Grenze Null:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(x+0) \cdot 1 \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x, \text{ was zu beweisen war.}$$

Erkl. 44. Eine goniometr. Formel, heisst:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta$$

(siehe: **Goniometrie**: Relationen zwischen den goniometr. Funktionen der Summe, bezw. der Differenz zweier Winkel).

Nach dieser Formel kann man in analoger Weise, für:

$$\sin(x+\Delta x) = \cos x \,.\, \cos\Delta x - \sin x \,.\, \sin\Delta x$$

schreiben.

Beweis II. Methode b. Aendert in der gegebenen Funktion:

1). . . . . $y = \cos x$

den veränderlichen Bogen x (d. unabhängig Variabele) um Δx, s dert sich auch die abhängig Variab Ist diese Aenderung, z. B. Δy, s man:

$$y+\Delta y = \cos(x+\Delta x)$$

oder was dasselbe ist:

$$y+\Delta y = \cos x \,.\, \cos\Delta x - \sin x \,.\, s$$

(siehe Erkl. 44)

Schreibt man für $\sin\Delta x$ und die in den Erklärungen 35 und 3 geführten unendlichen Reihen, so

$$y+\Delta y = \cos x\left(1 - \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} - \frac{\Delta x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right)$$

$$\sin x\left(\Delta x - \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{\Delta x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

oder:

$$y+\Delta y = \cos x - \frac{\cos x \,.\, \Delta x^2}{1.2} + \frac{\cos x \,.\, \Delta x^4}{1.2.3.4} - \frac{\cos x \,.\, \Delta x^6}{1.2.3.4.5.6}$$

$$- \sin x \,.\, \Delta x + \frac{\sin x \,.\, \Delta x^3}{1.2.3} - \frac{\sin x \,.\, \Delta x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

Subtrahiert man hiervon die urspr liche Funktion 1)., so ist:

$$\Delta y = -\frac{\cos x \,.\, \Delta x^2}{1.2} + \frac{\cos x \,.\, \Delta x^4}{1.2.3.4} - \frac{\cos x \,.\, \Delta x^6}{1.2.3.4.5.6} +$$

$$- \sin x \,.\, \Delta x + \frac{\sin x \,.\, \Delta x^3}{1.2.3} - \frac{\sin x \,.\, \Delta x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

Dividiert man beiderseits zur Bi des **Differenzenquotienten**, mit Δx, sultiert:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\cos x \,.\, \Delta x}{1.2} + \frac{\cos x \,.\, \Delta x^3}{1.2.3.4} - \frac{\cos x \,.\, \Delta x^5}{1.2.3.4.5.6} +$$

$$- \sin x + \frac{\sin x \,.\, \Delta x^2}{1.2.3} - \frac{\sin x \,.\, \Delta x^4}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

Wird endlich Δx zur Grenze **Null** geführt, so erhält man nach der Er und weil alle Glieder, welche Δx (= enthalten, nach der Erkl. 11, selb Null werden:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x, \text{ was zu beweisen}$$

usatz. Den Differentialquotienten, von:

. . . . . $y = \cos x$

e man auch, wie folgt ableiten können:

ezeichnet man mit π den halben Umfang Kreises, dessen Radius = 1 ist, bezw. von en Peripherie x ein Teil ist, so ist $\frac{\pi}{2}$ ein telskreis (ein Quadrant) und in Graden ausückt $= 90^0$ $(= R)$.

a nun der Kosinus eines Winkels (Bogens) h dem Sinus des Complements und umget, also auch:

$\cos \alpha = \sin (90^0 - \alpha)$ oder:

$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ (siehe Goniometrie)

so kann man auch für obige Gleichung eiben:

. . . . $y = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Setzt man: $u = \frac{\pi}{2} - x$, so ist:

. . . . . $y = \sin u$ und

. . . . . $u = \frac{\pi}{2} - 1 \,.\, x.$ Folglich nach satz 7:

. . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

)a nun aus Gleichung a). nach Lehrsatz 10:

. . . $\frac{dy}{du} = \cos u = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

(siehe vorstehenden Satz aus der Goniometrie)

aus Gleichung b). nach den Lehrsätzen 2)., nd der Erkl. 14:

. . . $\frac{du}{dx} = -1$ sich ergibt, so erhält aus den Gleichungen A)., B). und C).:

$\frac{dy}{dx} = \sin x \,.\, -1$ oder:

$\frac{dy}{dx} = -\sin x.$

Uebungsaufgaben.

ufgabe 42. Man soll den Differenquotienten, von:

$y = \cos (ax)$

immen.

Auflösung. Man setze $ax = u$, alsdann ist:

a) . . . . $y = \cos u$ $(= f(u))$

b) . . . . $u = ax$ $(= F(x))$

Nach dem Lehrsatze 7, ist:

1) . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a). nach Lehrsatze 11:

2) . . . $\frac{dy}{du} = -\sin u = -\sin(a$

und aus Gleichung b). nach dem satze 4 und der Erkl. 14:

3) . . . $\frac{du}{dx} = a$ sich ergibt, so man aus den Gleichungen 1)., 2). für den gesuchten Diff.-Quot.:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(ax) \cdot a \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -a \cdot \sin(ax).$$

Aufgabe 43. Ebenso, von:

$y = \cos\sqrt{ax}$

Auflösung. In Rücksicht der merkung 7, Seite 14, erhält ma den gesuchten Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = -\sin\sqrt{ax} \cdot \frac{d(\sqrt{ax})}{dx}$$

(nach den Lehrsätzen 11 und 7)

oder:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin\sqrt{ax} \cdot \frac{1}{2\sqrt{ax}} \cdot$$

(nach der Erkl. 22 und dem Lehrsatz

und schliesslich:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin\sqrt{ax} \cdot \frac{1}{2\sqrt{ax}} \cdot$$

(nach dem Lehrsatze 4 und der Erkl.

Reduziert man noch den somit g denen Ausdruck, so erhält man die fachste Form des gesuchten Differe quotienten, mit:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a \cdot \sin\sqrt{ax}}{2 \cdot \sqrt{ax}}$$

Aufgabe 44. Ebenso, von:

$y = \cos 4x \cdot \sin 3x$

Auflösung. Für den gesuchten ferentialquotienten erhält man zunä nach dem Lehrsatze 5, da ein Pro von Funktionen vorliegt:

$$\frac{dy}{dx} = \cos 4x \cdot \frac{d(\sin 3x)}{dx} + \sin 3x \cdot \frac{d(\cos 4x)}{dx}$$

Dann erhält man nach dem Lehrsatze 7 und nach den Lehrsätzen 10 und 11:

$$\frac{dy}{dx} = \cos 4x \cdot \cos 3x \cdot \frac{d(3x)}{dx} + \sin 3x \cdot -\sin 4x \cdot \frac{d(4x)}{dx}$$

und schliesslich erhält man nach dem Lehrsatze 4 und der Erkl. 14:

$$\frac{dy}{dx} = \cos 4x \,.\, \cos 3x \,.\, 3 + \sin 3x \,.\, -\sin 4x \,.\, 4$$

Reduziert man noch den somit gefundenen Ausdruck, so ergibt sich die einfachste Form des gesuchten Differentialquotienten, mit:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \,.\, \cos 4x \,.\, \cos 3x - 4 \sin 4x \,.\, \sin 3x.$$

---

ufgabe 45. Ebenso, von:

$$y = lg\,x \,.\, lg \cos x$$

Auflösung. Da ein Produkt von Funktionen vorliegt, so erhält man für den gesuchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = lg\,x \,.\, \frac{d(lg \cos x)}{dx} + lg \cos x \cdot \frac{d(lg\,x)}{dx}$$

(nach Lehrsatz 5)

oder:

$$\frac{dy}{dx} = lg\,x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d(\cos x)}{dx} + lg \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

(nach den Lehrsätzen 7 und 9)

und schliesslich:

$$\frac{dy}{dx} = lg\,x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot -\sin x + lg \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

(nach dem Lehrsatze 11).

Reduziert man noch den somit gefundenen Ausdruck, so erhält man die einfachste Form des gesuchten Differentialquotienten, mit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{lg \cos x}{x} - \frac{\sin x}{\cos x} \,.\, lg\,x$$

oder für: $\frac{\sin x}{\cos x} = tg\,x$ gesetzt:

(siehe Goniometrie)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{lg \cos x}{x} - tg\,x \,.\, lg\,x$$

Aufgabe 46. Ebenso, von:

$$y = (\sin a)^{\cos x}$$

Erkl. 45. Man setze: $\cos x = u$, alsdann ist:

a) . . . . . $y = (\sin a)^u \; (= f(u))$ und

b) . . . . . $u = \cos x \quad (= F(x))$

Nach dem Lehrsatze 7 ist:

1) . . . . $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Da nun aus Gleichung a). nach dem Lehrsatze 8:

2) . . . . $\dfrac{dy}{du} = (\sin a)^u \,.\, lg \sin a$

$= (\sin a)^{\cos x} lg \sin a$

und aus Gleichung b). nach dem Lehrsatze 11:

3) . . . . $\dfrac{du}{dx} = -\sin x$ sich ergibt, so erhält man aus den Gleichungen 1), 2) und 3):

$$\frac{dy}{dx} = (\sin a)^{\cos x} lg \sin a \,.\, -\sin x$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \,(\sin a)^{\cos x} lg \sin a$$

Auflösung. Da eine Expon grösse vorliegt, so erhält man fü gesuchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = (\sin a)^{\cos x} . lg \sin a \cdot \frac{d(}{}$$

(nach den Lehrsätzen 7 und 8, vergl. Erkl. 45)

oder:

$$\frac{dy}{dx} = (\sin a)^{\cos x} lg \sin a \,. -s$$

(nach dem Lehrsatze 11).

Reduziert man diesen Ausdruc erhält man für die einfachste For gesuchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \,.\, (\sin a)^{\cos x} lgs$$

(vergl. Erkl. 45).

Aufgabe 47. Ebenso, von:

$$y = \sin^2 x - \cos^2 x$$

Auflösung. Da eine Summe Funktionen der Veränderlichen x liegt, so hat man für den gesu Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin^2 x)}{dx} - \frac{d(\cos^2 x)}{dx}$$

(nach dem Lehrsatze 2)

Dies kann man der Uebersichtli wegen auch schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x)^2}{dx} - \frac{d(\cos x)^2}{dx}$$

Hieraus erhält man nach den sätzen 7 und 1:

$$\frac{dy}{dx} = 4 \,.\, (\sin x)^3 \cdot \frac{d(\sin x)}{dx} - 4 (\cos x)^3 \cdot \frac{d(}{}$$

oder nach den Lehrsätzen 10 un

$$\frac{dy}{dx} = 4 \,.\, (\sin x)^3 \,.\, \cos x - 4 (\cos x)^3 \,. - \sin$$

Diesen Ausdruck kann man nun, wie folgt reduzieren:

$$\frac{dy}{dx} = 4 \,.\, cos\, x \,.\, sin^3 x + 4 \,.\, sin\, x \,.\, cos^3 x$$

den gemeinschaftlichen Faktor $4 cos\, x\, sin\, x$ ausgeschieden, gibt:

$$\frac{dy}{dx} = 4 cos\, x\, sin\, x\, (sin^2 x + cos^2 x)$$

Da nun nach einer goniometr. Formel:

$sin^2 x + cos^2 x = 1$ ist (siehe Goniometrie)

so wird:

$$\frac{dy}{dx} = 4 cos\, x\, sin\, x = 2 \,.\, 2 sin\, x\, cos\, x$$

Da ferner für: $2 sin\, x\, cos\, x = sin\, 2x$ (siehe Erkl. 46) gesetzt werden kann, so erhält man die einfachste Form des gesuchten Differential-Quotienten, mit:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \,.\, sin\, 2x.$$

---

kl. 46. Eine goniometr. Formel, heisst:

$$sin\, 2\alpha = 2 sin\, \alpha\, cos\, \alpha$$

das Kapitel: **Die Goniometrie** unter dem nitte: Relationen zwischen den gonioschen Funktionen der einfachen und dop- Winkel).

ıfgabe 48. Ebenso, von:

$$y = \left(\frac{1}{cos\, x}\right)^n$$

Auflösung. Man denke sich nach der Erkl. 47 für $\frac{1}{cos\, x} = (cos\, x)^{-1}$ gesetzt, alsdann geht die gegebene Funktion über, in:

$y = \left((cos\, x)^{-1}\right)^n$ und dafür kann man nach der Erkl. 48 schreiben:

$$y = (cos\, x)^{-n}$$

Aus dieser Form erhält man nach den Lehrsätzen 7 und 1 für den gesuchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = -n \,.\, (cos\, x)^{-n-1} \,.\, \frac{d(cos\, x)}{dx}$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = -n \,.\, (cos\, x)^{-(n+1)} \,.\, -sin\, x$$

(nach Lehrsatz 11)

Diesen Ausdruck kann man noch wie folgt reduzieren:

$$\frac{dy}{dx} = -n \cdot \frac{1}{(cos\, x)^{n+1}} \cdot -sin\, x$$

(siehe Erkl. 47)

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{n \,.\, sin\, x}{(cos\, x)^{n+1}}$$

kl. 47. Jede Potenz mit negativem ienten ist gleich dem reciproken Werte Potenz mit positivem Exponenten, und ehrt, so ist z. B.:

$a^{-4} = \frac{1}{a^4}$ und auch:

$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$, ebenso ist:

$a = \frac{1}{a^{-1}}$ und auch:

$\frac{1}{a} = a^{-1}$ (s. das Kapit.: Die Potenzen).

l. 48. Eine Potenz wird nochmals po- t, indem man die Basis dieser Potenz m Produkte der Exponenten potenziert; z. B.:

$(a^3)^4 = a^{12}$

$(a^{-3})^4 = a^{-12}$ u. s. f.

Die einfachste Form des gesuc
Differentialquotienten ist somit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n \,.\, \sin x}{\cos^{n+1} x}$$

---

n). Differentialquotient von der Tangens eines veränderlichen Bogens.

Lehrsatz 12. Der Differentialquotient der goniometrischen Funktion:

$y = tg\, x$, bezw. **der Tangens eines veränderlichen Bogens** x — siehe Erkl. 32 — ist gleich Eins geteilt durch das Quadrat des Kosinus des veränderlichen Bogens x.

Vorauss. $y = tg\, x$

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

Beweis I.

Methode a. Die gegebene Funkti

$$y = tg\, x$$

kann man auch in der Form:

1) . . . . . $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ (siehe das K Die Goniom

schreiben. Aendert man alsdann veränderlichen Bogen x, d. i. die abhängig Variabele, um Δx, so är sich auch die abhängig Veränderlic ist diese Aenderung z. B. Δy, so

2) . . . $y + \Delta y = \frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)}$

Subtrahiert man hiervon die urspr liche Gleichung 1)., so ist:

$$\Delta y = \frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

Dividiert man beiderseits zur Bil des **Differenzenquotienten** mit Δx, s hält man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[\frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right] \cdot$$

Bringt man die Brüche in der K mer unter gleiche Benennung, so vorstehende Gleichung über, in:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) \,.\, \cos x - \cos(x + \Delta x) \sin x}{\cos(x + \Delta x) \,.\, \cos x}$$

und hierfür kann man nach der Erk schreiben:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \,.\, \cos x} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

Erkl. 49. Eine goniometr. Formel, heisst:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

(siehe: **Goniometrie**: Relationen zwischen den goniometr. Funktionen der Summe, bezw. der Differenz zweier Winkel).

Nach dieser Formel kann man umgekehrt, für:

$$\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha - \beta)$$

und in analoger Weise, für:

$$\sin(x + \Delta x) \,.\, \cos x - \cos(x + \Delta x) \,.\, \sin x = \sin(x + \Delta x - x)$$

oder $= \sin \Delta x$ setzen.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos(x+\Delta x) \cdot \cos x}$$

Setzt man endlich: $\Delta x = \alpha$, so erhält man für den **Differenzenquotienten**:

3) . . . $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\cos(x+\alpha) \cdot \cos x}$$

Führt man schliesslich die beliebige Aenderung Δx, oder α zur Grenze **Null** über, angedeutet durch:

$$lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim \left[\frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\cos(x+\alpha) \cos x} \right]$$

und berücksichtigt, dass nach der Erkl. 34, Seite 36, wenn der Bogen α (d. i. die beliebige Aenderung Δx) sich der Grenze Null stetig nähert, der Faktor: $\frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ wird, so erhält man beim Uebergang zur Grenze Null den **Differentialquotienten**:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \frac{1}{\cos(x+0) \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x \cdot \cos x}$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$ was zu beweisen war.

Beweis II. Mit Hülfe der für $\sin x$ und $\cos x$ entwickelten Differentialquotienten:

Für die gegebene Funktion:

$$y = tg\, x$$

kann man auch schreiben:

1) . . . . . $$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$ (siehe das Kapitel: **Die Goniometrie.**)

In dieser Form stellt die gegeb. Funktion einen Bruch von Funktionen dar, folglich hat man nach dem Lehrsatz 6:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \frac{d(\sin x)}{dx} - \sin x \frac{d(\cos x)}{dx}}{\cos^2 x}$$

und nach den Lehrsätzen 10 und 11:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot -\sin x}{\cos^2 x}$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x}$$

Da nun nach einer goniometr. For
$sin^2 x + cos^2 x = 1$ ist,
so resultiert, wie im Beweise I:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos^2 x}$$

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 49. Man soll den Differentialquotienten von:

$$y = a \cdot tg \frac{x}{a}$$

bestimmen.

Auflösung. Da in der gegeb Funktion a ein konstanter Faktor so hat man nach dem Lehrsatz 4:

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{d\left(tg \frac{x}{a}\right)}{dx}$$

Da ferner $\frac{x}{a}$ eine Funktion von x und hierfür z. B. die Grösse u ges gedacht werden kann, so erhält nach den Lehrsätzen 7 und 12:

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{1}{cos^2 \frac{x}{a}} \cdot \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{dx}$$

und da schliesslich $\frac{x}{a}$ als das Pro $\frac{1}{a} \cdot x$ geschrieben werden kann, so hält man nach dem Lehrsatz 4 und Erkl. 14:

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{1}{cos^2 \frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a} \cdot 1$$

Hieraus ergibt sich der gesuchte ferentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos^2 \frac{x}{a}}$$

Aufgabe 50. Ebenso, von:

$$y = tg^2 mx$$

Auflösung. Schreibt man die g bene Funktion in der Form:

$y = (tg\, mx)^2$ und berücksich

dass $tg\,mx$ eine Funktion von x ist, so erhält man nach den Lehrsätzen 1 u. 7:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,.\,(tg\,mx)^{2-1}\,.\,\frac{d\,(tg\,mx)}{dx}$$

Führt man die in $\frac{d\,(tg\,mx)}{dx}$ angedeutete Differentiation nach den Lehrsätzen 12 und 7 weiter aus, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(tg\,mx)^{2-1}\,.\,\frac{1}{cos^2 mx}\,.\,\frac{d\,(mx)}{dx}$$

und hieraus erhält man, wenn für die in $\frac{d\,(mx)}{dx}$ angedeutete Differentiation der Lehrsatz 4 und die Erkl. 14 angewandt wird:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(tg\,mx)^{2-1}\,.\,\frac{1}{cos^2 mx}\,.\,m\cdot 1$$

Hieraus erhält man für den gesuchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,m\,tg\,(mx)}{cos^2 mx}$$

Aufgabe 51. Ebenso, von:

$$y = tg^4(x^2 - a)$$

Auflösung. Schreibt man die gegebene Funktion in der Form:

$$y = (tg\,(x^2 - a))^4$$

und bringt der Reihe nach die Lehrsätze 1 und 7, 12 und 7, 2, 1 und 3 in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = 4\,.\,(tg\,(x^2 - a))^{4-1}\,.\,\frac{d\,(tg\,(x^2 - a))}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\,(tg\,(x^2 - a))^3\,.\,\frac{1}{cos^2\,(x^2 - a)}\,.\,\frac{d\,(x^2 - a)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\,.\,tg^3(x^2 - a)\,.\,\frac{1}{cos^2\,(x^2 - a)}\,.\,(2\,x^{2-1} - 0)$$

und hieraus ergibt sich nach gehöriger Reduktion für den gesuchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8\,x\,tg^3(x^2 - a)}{cos^2\,(x^2 - a)}$$

Aufgabe 52. Ebenso, von:

$$y = lg\,tg\,x$$

Auflösung. Wendet man der F
nach die Lehrsätze 9, 7 und 12 a
erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{tg\,x} \cdot \frac{d(tg\,x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{tg\,x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{tg\,x \cdot \cos$$

Setzt man noch:

$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$$ (siehe Goniom

so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cdot co$$

Wird endlich Zähler und Nenner
Bruches $\frac{1}{\sin x \,.\, \cos x}$ mit 2 multipli
und die Erkl. 46 berücksichtigt, s
hält man die einfachste Form des
suchten Differentialquotienten, mit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

Aufgabe 53. Ebenso, von:

$$y = \sin(a^{lg\,tg\,x})$$

Auflösung. Da $a^{lg\,tg\,x}$ eine Funk
von x ist, so hat man nach den L
sätzen 10 und 7 zunächst:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(a^{lg\,tg\,x}) \cdot \frac{d(a^{lg\,tg\,x})}{dx}$$

Da ferner $lg\,tg\,x$ eine Funktion vo
mithin der Ausdruck $a^{lg\,tg\,x}$ eine E
nentialgrösse ist, so erhält man,
die in $\frac{d(a^{lg\,tg\,x})}{dx}$ noch angedeutete D
rentiation successive nach den Lehrsä
8 und 7, 9, 7 und 12 ausgeführt w

$$\frac{dy}{dx} = \cos(a^{lg\,tg\,x}) \,.\, a^{lg\,tg\,x} \,.\, lg\,a \cdot \frac{d(lg\,tg\,x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(a^{lg\,tg\,x}) \,.\, a^{lg\,tg\,x} \,.\, lg\,a \cdot \frac{1}{tg\,x} \cdot \frac{d(t}{d}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(a^{lg\,tg\,x}) \,.\, a^{lg\,tg\,x} \,.\, lg\,a \cdot \frac{1}{tg\,x} \cdot \frac{1}{cos}$$

Da man schliesslich, analog wie in der Auflösung der vorigen Aufgabe, für:

$$\frac{1}{tg\,x} \cdot \frac{1}{cos^2 x} = \frac{2}{sin 2x}$$ setzen kann,

so erhält man für den gesuchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{sin\,2x} \cdot cos\,(a^{lg\,tg\,x}) \cdot a^{lg\,tg\,x} \cdot lg\,a$$

---

o). Differentialquotient von der Kotangens eines veränderlichen Bogens.

Lehrsatz 13. Der Differentialquotient r goniometrischen Funktion:

$y = ctg\,x$, bezw. **der Kotangens es veränderlichen Bogens** x — s. Erkl. 32 ist gleich minus Eins geteilt durch s Quadrat des Sinus des veränrlichen Bogens x.

Vorauss. $y = ctg\,x$

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{sin^2 x}$

Beweis I.

Methode a. Die gegebene Funktion:

$$y = ctg\,x$$

kann man auch in der Form:

1) . . . . . $y = \frac{cos\,x}{sin\,x}$ (siehe das Kapitel: Die Goniometrie)

schreiben. Aendert man alsdann den veränderlichen Bogen x, d. i. die unabhängig Variabele, um Δx, so ändert sich auch die abhängig Variabele y; ist diese Aenderung z. B. Δy, so wird:

2) . . . . $y + \Delta y = \frac{cos\,(x + \Delta x)}{sin\,(x + \Delta x)}$

Subtrahiert man hiervon die ursprüngliche Gleichung 1)., so ist:

$$\Delta y = \frac{cos\,(x + \Delta x)}{sin\,(x + \Delta x)} - \frac{cos\,x}{sin\,x}$$

Dividiert man beiderseits zur Bildung des **Differenzenquotienten** mit Δx, so erhält man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[\frac{cos\,(x + \Delta x)}{sin\,(x + \Delta x)} - \frac{cos\,x}{sin\,x}\right] \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

Bringt man die Brüche in der Klammer unter gleiche Benennung, so geht vorstehende Gleichung über, in:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin x \,.\, \cos(x+\Delta x) - \cos x \,.\, \sin(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x) \,.\, \sin x}$$

und hierfür kann man nach der Erl schreiben:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\sin \Delta x}{\sin(x+\Delta x) \,.\, \sin x} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sin(x+\Delta x) \,.}$$

Setzt man endlich $\Delta x = \alpha$, so man für den **Differenzenquotienten:**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sin(x+\alpha) \,.\, \sin}$$

Führt man schliesslich die beliebige Aenderung Δx, bezw. α zur Grenze über, angedeutet durch:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \left[-\frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sin(x+\alpha) \,.\, s} \right.$$

und berücksichtigt dabei, dass nach Erkl. 34, S. 36, wenn der Bogen α die beliebige Aenderung Δx) sich Grenze Null stetig nähert, der Fa $\frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ wird, so erhält man Uebergang zur Grenze Null den **Diffe tialquotienten:**

$$\frac{dy}{dx} = -1 \cdot \frac{1}{\sin(x+0) \,.\, \sin x} = -\frac{1}{\sin x \,.}$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \text{ was zu beweisen war.}$$

Beweis II. **Mit Hülfe der für** $\sin x$ $\cos x$ **entwickelten Differentialquotient**

Für die gegebene Funktion:

$$y = ctg\, x$$

kann man auch schreiben:

$$y = \frac{\cos x}{\sin x}$$ (siehe das K Die Goniom

und in dieser Form stellt die gege Funktion einen Bruch von Funkti dar, folglich hat man nach dem I satze 6:

Erkl. 50. Nach der in der Erkl. 49 angeführten goniometrischen Formel:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \,.\, \sin\beta$$

welche umgekehrt geschrieben, heisst:

$$\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha - \beta)$$

kann man in analoger Weise, für:

$$\sin x \,.\, \cos(x+\Delta x) - \cos x \,.\, \sin(x+\Delta x)$$
$$= \sin(x - (x+\Delta x)) \text{ oder:}$$
$$= \sin(-\Delta x) \text{ setzen,}$$

und da ferner **der Sinus eines negativen Winkels gleich dem negativen Sinus desselben positiven Winkels ist** (siehe **Goniometrie**: Die Funktionen der negativen Winkel), so ist auch:

$$\sin x \,.\, \cos(x+\Delta x) - \cos x \,.\, \sin(x+\Delta x)$$
$$= \sin(-\Delta x) \text{ oder:}$$
$$= -\sin \Delta x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cdot \frac{d(\cos x)}{dx} - \cos x \frac{d(\sin x)}{dx}}{\sin^2 x}$$

Führt man die angedeuteten Differentiationen nach den Lehrsätzen 10 und 11 weiter aus, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cdot -\sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \quad \text{oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

Da nun nach einer goniometr. Formel: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist, so erhält man, wie im Beweise I:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Beweis III. Mit Hülfe des für $tg\,\alpha$ entwickelten Differentialquotienten:

Schreibt man die gegebene Funktion: $y = ctg\,x$ in der Form:

$$y = \frac{1}{tg\,x}$$ (siehe das Kapitel: Die Goniometrie)

so stellt dieselbe einen Bruch dar, dessen Zähler eine **Konstante** und dessen Nenner eine Funktion von x ist, folglich hat man nach dem Zusatze 2, Seite 18:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{tg^2 x} \cdot \frac{d(tg\,x)}{dx}$$

oder nach dem Lehrsatze 12:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{tg^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{tg^2 x}$$

Da man nun: $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$, mithin:

$$tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$ setzen kann,

so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \quad \text{oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$ und schliesslich:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$ wie im Beweise I.

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 54. Man soll den Differentialquotienten von:

$$y = m \,.\, ctg\, mx$$

bestimmen.

Auflösung. Bringt man der nach die Lehrsätze 4, 13, 7, 4 un Erkl. 14 in Anwendung, so erhält

$$\frac{dy}{dx} = m \cdot \frac{d\,(ctg\, mx)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = m \,.\, - \frac{1}{sin^2 mx} \cdot \frac{d\,(mx}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = m \cdot - \frac{1}{sin^2 mx} \,.\, m \,.\, 1$$

Der gesuchte Differentialquotie somit:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{m^2}{sin^2 mx}$$

Aufgabe 55. Ebenso, von:

$$y = ctg^2 (x^2 + a)$$

Auflösung. Schreibt man die bene Funktion in der Form:

$$y = (ctg\,(x^2 + a))^2$$

und bringt der Reihe nach die sätze 1 und 7, 13 und 7, 2, 1 in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot (ctg\,(x^2 + a))^{2-1} \cdot \frac{d\,(ctg\,(x^2 + a))}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \,.\, ctg\,(x^2 + a) \cdot - \frac{1}{sin^2 (x^2 + a)} \cdot \frac{d\,(x^2}{d}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \,.\, ctg\,(x^2 + a) \cdot - \frac{1}{sin^2 (x^2 + a)} \cdot (2x^2 -$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \,.\, ctg\,(x^2 + a) \cdot - \frac{1}{sin^2 (x^2 + a)} \cdot 2x$$

Der gesuchte Differentialquotie somit:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{4x \,.\, ctg\,(x^2 + a)}{sin^2 (x^2 + a)}$$

Aufgabe 56. Ebenso, von:

$$y = lg\, ctg\, x$$

Auflösung. Unter Anwendung Lehrsätze 9, 7 und 13 erhält ma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ctg\,x} \cdot \frac{d(ctg\,x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ctg\,x} \cdot -\frac{1}{sin^2 x} \quad \text{oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{ctg\,x \,.\, sin^2 x}$$

Setzt man noch:

$$ctg\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x} \quad \text{(siehe die Goniometrie)}$$

und multipliziert Zähler und Nenner des erhaltenen Differentialquotienten mit 2, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{2\frac{cos\,x}{sin\,x} \cdot sin^2 x} = -\frac{2}{2\,cos\,x \,.\, sin\,x}$$

und hieraus erhält man in Rücksicht der Erkl. 46 die einfachste Form des gesuchten Differentialquotienten, mit:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{sin\,2x}$$

---

ufgabe 57. Ebenso, von:

$$y = ctg\,lg\,x$$

Auflösung. Unter Anwendung der Lehrsatze 13, 7 und 9 erhält man der Reihe nach:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{sin^2 lg\,x} \cdot \frac{d(lg\,x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{sin^2 lg\,x} \cdot \frac{1}{x}$$

Der gesuchte Differentialquotient ist somit:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x \,.\, sin^2 lg\,x}$$

ıfgabe 58. Ebenso, von:

$$y = tg^2 x + ctg^2 x$$

Auflösung. Schreibt man die gegebene Funktion in der Form:

$$y = (tg\,x)^2 + (ctg\,x)^2$$

und wendet der Reihe nach die Lehrsätze 2, 1 und 7, 12 und 13 an, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot (tg\,x)^{2-1} \cdot \frac{d(tg\,x)}{dx} + 2 \cdot (ctg\,x)^{2-1} \cdot$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot tg\,x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \cdot ctg\,x \cdot -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,tg\,x}{\cos^2 x} - \frac{2\,ctg\,x}{\sin^2 x}$$

Der gesuchte Differentialquoti somit:

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{tg\,x}{\cos^2 x} - \frac{ctg\,x}{\sin^2 x}\right)$$

Anmerkung 9. Obgleich die Differentialquotienten der goniometr. Funk *Sekans* und *Kosekans* eines veränderlichen Bogens x im allgemeinen übe sind, indem dieselben in der Praxis kaum vorkommen mögen und auss

für $sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ und

$cosec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ gesetzt werden kann (s. das Kapitel: Die Gonio

so sollen doch der Vollständigkeit wegen, und da es sich ausserdem zu nur um Einübung der Entwicklung von Differentialquotienten handelt, au Differentialquotienten dieser goniometrischen Funktionen im nachstehende entwickelt werden:

p). Differentialquotient von der Sekans eines veränderlichen Bogens.

Lehrsatz 14. Der Differentialquotient der goniometrischen Funktion:

$y = sec\,\alpha$, bezw. **der Sekans eines veränderlichen Bogens** x — siehe Erkl. 32 ist gleich dem Sinus des veränderlichen Bogens x dividiert durch das Quadrat des Kosinus dieses veränderlichen Bogens x.

Vorauss. $y = sec\,x$

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

Beweis I.

Methode a. Die gegebene Fun $y = sec\,x$ kann auch in der Form

1). . . . . $y = \frac{1}{\cos x}$ (siehe das Die Goni

geschrieben werden. Aendert ma dann die Veränderliche x um die bige Grösse Δx, und wird die hie bedingte Aenderung von y dur dargestellt, so ist:

2) . . . $y + \Delta y = \frac{1}{\cos(x + \Delta x)}$

Subtrahiert man hiervon die urs liche Funktion 1). und dividiert z

kl. 51. Nach der in der Erkl. 43 angen goniometrischen Formel:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

man in analoger Weise, für:

$$\cos x - \cos(x+\Delta x) =$$

$$2 \cdot \sin\frac{x+x+\Delta x}{2} \cdot \sin\frac{x-x-\Delta x}{2}$$

$$2 \cdot \sin\frac{2x+\Delta x}{2} \cdot \sin\frac{-\Delta x}{2} \text{ schreiben,}$$

a $\sin -\frac{\Delta x}{2} = -\sin\frac{\Delta x}{2}$ (siehe Erkl. 50) kann man auch für:

$$\cos x - \cos(x+\Delta x) =$$

$$-2 \cdot \sin\frac{2x+\Delta x}{2} \cdot -\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$= 2 \cdot \sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} \text{ setzen.}$$

dung des **Differenzenquotienten** die somit erhaltene neue Gleichung durch Δx, so erhält man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[\frac{1}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{1}{\cos x}\right] \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

Bringt man die Brüche in der Klammer unter gleiche Benennung und berücksichtigt alsdann die Erkl. 51, so geht vorstehende Gleichung über, in:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cdot \sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\cos x \cdot \cos(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

wofür man auch, wenn Zähler und Nenner des Quotienten rechts mit 2 dividiert wird:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\cos x \cdot \cos(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\frac{\Delta x}{2}}$$

oder:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\cos x \cdot \cos(x+\Delta x)} \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

schreiben kann.

Setzt man endlich $\frac{\Delta x}{2} = \alpha$, bezw. $\Delta x = 2\alpha$, und geht mit $\alpha \left(= \frac{\Delta x}{2}\right)$ zur Grenze **Null** über, angedeutet durch:

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\left[\frac{\sin(x+\alpha)}{\cos x \cos(x+2\alpha)} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right]$$

so wird bei dem Uebergang zur Grenze Null nach der Erkl. 34 der Quotient $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ und da ferner, wenn $\alpha = 0$ wird, auch 2α in Null übergeht, so erhält man den **Differentialquotienten**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x+0)}{\cos x \cos(x+0)} \cdot 1 \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

was zu beweisen war.

Beweis II. Mit Hülfe des für entwickelten Differentialquotienten.

Schreibt man die gegebene Fun $y = sec\,x$ in der Form:

$$y = \frac{1}{cos\,x}$$ (siehe das K Die Gonion

und bringt zur Bildung des Differe quotienten den Zusatz 3, Seite 1 Anwendung, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{cos^2 x} \cdot \frac{d(cos\,x)}{dx}$$

und hieraus ergibt sich mit Benu des Lehrsatzes 11:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{cos^2 x} \cdot -sin\,x \text{ ode}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sin\,x}{cos^2 x}$$ wie im Beweis

---

q). Differentialquotient von der Kosekans eines veränderlichen Bogens.

Lehrsatz 15. Der Differentialquotient der goniometrischen Funktion:

$y = cosec\,x$, bezw. **der Kosekans eines veränderlichen Bogens** x — siehe Erkl. 32 — ist gleich dem negativen Kosinus des veränderlichen Bogens x dividiert durch das Quadrat des Sinus dieses veränderlichen Bogens x.

Vorauss. $y = cosec\,x$

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = -\frac{cos\,x}{sin^2 x}$

Beweis I. Methode a.

Die gegebene Funktion: $y =$ kann auch in der Form:

1). . . . . $y = \frac{1}{sin\,x}$ (siehe das (Die Goni

geschrieben werden.

Aendert man alsdann die Verä liche x um die beliebige Grösse Δx wird die hierdurch bedingte Aend von y durch Δy dargestellt, so is

2). . . . $y + \Delta y = \frac{1}{sin\,(x + \Delta x)}$

Subtrahiert man hiervon die ursp liche Funktion 1). und dividiert zu dung des **Differenzenquotienten** die erhaltene neue Gleichung durch Δ erhält man:

rkl. 52. Eine goniometr. Formel, heisst:

$$n\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Goniometrie: Relationen zwischen der ne, bezw. der Differenz der goniometr. tionen zweier Winkel).

ach dieser Formel kann man in analoger e für:

$$\sin x - \sin(x+\Delta x) =$$

$$= 2 \cdot \cos\frac{x+x+\Delta x}{2} \cdot \sin\frac{x-x-\Delta x}{2}$$

$$= 2 \cdot \cos\frac{2x+\Delta x}{2} \cdot \sin\frac{-\Delta x}{2}$$

$$= 2 \cdot \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{-\Delta x}{2}$$ schreiben,

la ferner (siehe Erkl. 50):

$$\sin\frac{-\Delta x}{2} = -\sin\frac{\Delta x}{2}$$

kann man auch:

$$\sin x - \sin(x+\Delta x) =$$

$$= 2 \cdot \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot -\sin\frac{\Delta x}{2}$$ oder:

$$= -2 \cdot \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$ setzen.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[\frac{1}{\sin(x+\Delta x)} - \frac{1}{\sin x}\right] \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

Bringt man nunmehr die Brüche in der Klammer unter gleiche Benennung und berücksichtigt alsdann die Erkl. 52, so geht vorstehende Gleichung über, in:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \cdot \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\sin x \cdot \sin(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

wofür man auch, wenn Zähler und Nenner des Quotienten rechts mit 2 dividiert wird:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin x \cdot \sin(x+\Delta x)} \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

schreiben kann.

Setzt man endlich: $\frac{\Delta x}{2} = \alpha$, bezw. $\Delta x = 2\alpha$, und geht mit $\alpha \left(= \frac{\Delta x}{2}\right)$ zur Grenze Null über, angedeutet durch:

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\left[-\frac{\cos(x+\alpha)}{\sin x \sin(x+2\alpha)} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right]$$

so wird bei dem Uebergang zur Grenze Null nach der Erkl. 34 der Quotient $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$, und da ferner, wenn $\alpha = 0$ wird, auch 2α in Null übergeht, so erhält man den **Differentialquotienten**:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos(x+0)}{\sin x \sin(x+0)} \cdot 1$$ oder:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin x \cdot \sin x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

was zu beweisen war.

Beweis II. Mit Hülfe des für $\sin x$ **entwickelten Differentialquotienten.**

Schreibt man die gegebene Funktion: $y = \operatorname{cosec} x$ in der Form:

$$y = \frac{1}{\sin x}$$ (siehe das Kapitel: Die Goniometrie)

und bringt zur Bildung des **Differentialquotienten** den Zusatz 3, Seite 19, in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{d(\sin x)}{dx}$$

und hieraus ergibt sich mit Benut des Lehrsatzes 10:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \text{ wie im Bewe}$$

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 59. Man soll den Differentialquotienten, von:

$y = a^{\sec x}$ bestimmen.

Auflösung. Unter Anwendung Lehrsätze 8, 7 und 14 erhält man Reihe nach:

$$\frac{dy}{dx} = a^{\sec x} \cdot lg\, a \cdot \frac{d(\sec x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = a^{\sec x} \cdot lg\, a \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Der gesuchte Differentialquotien somit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \,.\, \log a \,.\, a^{\sec x}}{\cos^2 x}$$

Aufgabe 60. Ebenso, von:

$$y = \frac{1}{\cos x} + tg\, x$$

Auflösung. Setzt man für den tienten $\frac{1}{\cos x} = \sec x$ (siehe Goniome so geht die gegebene Funktion über

$$y = \sec x + tg\, x$$

Unter Anwendung der Lehrsätz 14 und 12 erhält man hieraus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

Der gesuchte Differentialquotient somit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$$

Aufgabe 61. Ebenso, von:

$$y = sec\,x \,.\, cosec\,x$$

Auflösung. Mit Anwendung der Lehrsätze 5, 15 und 14, erhält man der Reihe nach:

$$\frac{dy}{dx} = sec\,x \,.\, \frac{d(cosec\,x)}{dx} + cosec\,x \,\frac{d(sec\,x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = sec\,x \,.\, \frac{-\cos x}{sin^2 x} + cosec\,x \,.\, \frac{sin\,x}{cos^2 x}$$

Erkl. 53. Eine goniometr. Formel, heisst:

. . . . . $sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$

Eine andere goniometr. Formel heisst:

. . . . . $cosec\,\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha}$

Siehe das Kapitel: Die Goniometrie. —

Setzt man zur Vereinfachung des gefundenen Ausdrucks:

$$\left.\begin{aligned} sec\,x &= \frac{1}{cos\,x} \\ \text{und } cosec\,x &= \frac{1}{sin\,x} \end{aligned}\right\} \text{(siehe Erkl. 53)}$$

so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\,x} \cdot \frac{-\cos x}{sin^2 x} + \frac{1}{sin\,x} \cdot \frac{sin\,x}{cos^2 x}$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{sin^2 x} + \frac{1}{cos^2 x}$$

Bringt man die Brüche rechts noch unter gleiche Benennung, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cos^2 x + sin^2 x}{sin^2 x \,.\, cos^2 x}$$

Der gesuchte Differentialquotient ist somit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sin^2 x - cos^2 x}{sin^2 x \,.\, cos^2 x}$$

Aufgabe 62. Ebenso, von:

$$y = sec^2 x - cosec\,(x^2)$$

Auflösung. Schreibt man der Uebersichtlichkeit wegen:

$$sec^2 x = (sec\,x)^2$$

wonach die gegebene Funktion die Form:

$$y = (sec\,x)^2 - cosec\,(x^2)$$

annimmt, so erhält man unter Anwendung der Lehrsätze 2, 7, 1 und 15:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot (sec\,x)^{2-1} \cdot \frac{d(sec\,x)}{dx} - \frac{-\cos(x^2)}{sin^2(x^2)} \cdot \frac{d(x^2)}{dx}$$

Hieraus erhält man unter Anwendung der Lehrsätze 14 und 1:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot sec\, x \cdot \frac{sin\, x}{cos^2 x} + \frac{cos\, x^2}{sin^2 x^2}$$

Setzt man schliesslich zur Vereinfa

$$sec\, x = \frac{1}{cos\, x}$$ (siehe Erkl

und reduziert, so geht vorstehende druck über, in:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{cos\, x} \cdot \frac{sin\, x}{cos^2 x} + \frac{2x \cdot}{sin}$$

oder in:

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{sin\, x}{cos^3 x} + \frac{x\, cos\, x^2}{sin^2 x^2}\right)$$

und dies ist der gesuchte Differ quotient.

Aufgabe 63. Ebenso, von:

$$y = sinus\ versus\ x$$

Auflösung. Nach der Erkl. 54 man die gegebene Funktion:

$$y = sinus\ versus\ x$$

auch in der Form:

$$y = 1 - cos\, x$$ schreiben.

Mit Anwendung der Lehrsätze und 11 erhält man hieraus für d suchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = 0 - (-sin\, x)$$ oder:

$$\frac{dy}{dx} = sin\, x$$

Erkl. 53. Unter dem **Sinus versus** des Winkels α versteht man die Differenz: $1 - cos\, \alpha$, in Zeichen:

$$sin\, vers\, \alpha = 1 - cos\, \alpha$$

(siehe das Kapitel: Die Goniometrie, Seite 15, Formel XIV).

Aufgabe 64. Ebenso, von:

$$y = cosinus\ versus\ x$$

Auflösung. Nach der Erkl. 55 man die gegebene Funktion:

$$y = cosinus\ versus\ x$$

auch in der Form:

$$y = 1 - sin\, x$$ schreiben.

Mit Anwendung der Lehrsätze und 10 erhält man hieraus für d suchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = 0 - cos\, x$$ oder:

$$\frac{dy}{dx} = -cos\, x$$

Erkl. 55. Unter dem **Kosinus versus** des Winkels α versteht man die Differenz: $1 - sin\, \alpha$, in Zeichen:

$$cos\, vers\, \alpha = 1 - sin\, \alpha$$

(siehe das Kapitel: Die Goniometrie, Seite 15, Formel XV).

---

r). Ungelöste Aufgaben.

(Fortsetzung von Seite 35.)

Aufgabe 38. Man soll den Differentialquotienten, von: $y = \frac{a}{\sin^2 x}$ bestimmen.

„ 39. Ebenso, von: $y = lg \sin x$

„ 40. „ „ $y = a \,.\, \cos^5 x$

„ 41. „ „ $y = \sin(a + bx)$

„ 42. „ „ $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

„ 43. „ „ $y = \sin ax$

„ 44. „ „ $y = a \,.\, \cos \frac{x}{a}$

„ 45. „ „ $y = \sin(x^n)$

„ 46. „ „ $y = a \,.\, \cos \frac{1}{x}$

„ 47. „ „ $y = \sin \sqrt{\frac{1}{x}}$

„ 48. „ „ $y = tg\, 2x$

„ 49. „ „ $y = \cos(\sin x)$

„ 50. „ „ $y = \sin(x^2)^3$

„ 51. „ „ $y = tg(a^{lg\, x})$

„ 52. „ „ $y = a \,.\, tg \frac{a}{x}$

„ 53. „ „ $y = tg\, x - ctg\, x$

„ 54. „ „ $y = \frac{1}{\sin x}$

„ 55. „ „ $y = \frac{1}{2} \sin x + \sin \frac{x}{2}$

„ 56. „ „ $y = \cos^n \frac{a}{x}$

„ 57. „ „ $y = \frac{1}{\cos x} + tg\, x$

„ 58. „ „ $y = \cos \sqrt{a - bx^2}$

„ 59. „ „ $y = a \,.\, tg\, bx$

„ 60. „ „ $y = ctg\, ax$

„ 61. „ „ $y = \sin^2 x \,.\, \cos^3 x$

„ 62. „ „ $y = x\,(ctg\, x)^2$

„ 63. „ „ $y = \sin x - x \,.\, \cos x$

„ 64. „ „ $y = a \,.\, ctg \frac{x}{a}$

„ 65. „ „ $y = (x\, ctg\, x)^2$

Aufgabe 66. Ebenso, von: $y = sin \,.\, cos\, x$

„ **67.** „ „ $y = (1 - cos \,.\, 2x)^2$

„ **68.** „ „ $y = \dfrac{sin\, x + cos\, x}{sin\, x \,.\, cos\, x}$

„ **69.** „ „ $y = sin\,(x \,.\, lg\, x)$

„ **70.** „ „ $y = log\, cos^n a\, x$

„ **71.** „ „ $y = sin \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

„ **72.** „ „ $y = e^{sin\, x}$

„ **73.** „ „ $y = e^{cos\, x}$

„ **74.** „ „ $y = e^{tg\, x}$

„ **75.** „ „ $y = e^{ctg\, x}$

„ **76.** „ „ $y = a^{lg\, sin\, x}$

„ **77.** „ „ $y = a^{lg\, cos\, x}$

„ **78.** „ „ $y = a^{lg\, tg\, x}$

„ **79.** „ „ $y = a^{lg\, ctg\, x}$

„ **80.** „ „ $y = cos\,(x\, tg\, x)$

„ **81.** „ „ $y = sin\,(x\, tg\, x)$

„ **82.** „ „ $y = tg\,(x \,.\, ctg\, x)$

„ **83.** „ „ $y = ctg\,(x \,.\, sin\, x)$

„ **84.** „ „ $y = ctg\,(x \,.\, cos\, x)$

Ueber die cyklometrischen Funktionen.

Erklärung 56. In der höheren Mathematik wird meistens die Grösse eines Winkels α **nicht** durch Grade, sondern **durch die Länge desjenigen Bogens** (Kreisbogens), **welchen man mit dem Radius = 1 zwischen seinen Schenkeln beschreiben kann**, ausgedrückt.

(Vergl. Antw. der Frage 17, Seite 28, in dem Kapitel: Die Goniometrie.)

Erklärung 57. Ein Bogen (lat. *arcus*) kann auf **zweierlei Art** ausgedrückt werden, entweder:

a). durch Grade, Minuten, Sekunden, welche die engere Bezeichnung Bogengrade, Bogenminuten, Bogensekunden

ıren und den Graden, Minuten, Se-
nden des zu dem betreff. Kreisbogen
ıörigen Centriewinkels entsprechen
man vergl. die Erkl. 34 auf Seite 27 in
lem Kapitel: Die Goniometrie),

:r:

). durch dieselben Längenein-
iten in welche der Radius des zu-
ıörigen Kreises ausgedrückt ist, was
:telst des Lehrsatzes:

„Die Länge eines Bogens verhält sich zum Umfang ($2r\pi$) des demselben zugehörigen Kreises, wie der Centriewinkel, welcher zu jenem Bogen gehört, zu dem Centriewinkel ($= 360^0$), welcher zum ganzen Umfang des Kreises gehört"

w. mittelst der Proportion:

. . . $bog\,\alpha^0 : 2r\pi = \alpha^0 : 360^0$ geschieht.

m letzteren Falle wird der Radius
gedachten Kreises $= 1$ (= der Län-
einheit selbst) angenommen und als-
n für den Bogen, z. B. eines Centrie-
kels von α^0, die Bezeichnung *arcus* α^0,
:ekürzt *arc* α^0, eingeführt, wonach vor-
ıende Proportion übergeht, in:

$$arc\,\alpha^0 : 2\,.\,1\,.\,\pi = \alpha^0 : 360^0$$

hieraus erhält man für die **Länge**
Bogens (*arcus*), der zu dem Centrie-
kel von α^0 gehört:

$$\ldots\ arc\,\alpha^0 = \frac{2\,.\,\pi\,.\,\alpha^0}{360^0}$$ **Längeneinheiten.**

Man vergl. die Erkl. 37, Seite 29, in dem
itel: Die Goniometrie; und die Erkl. 19,
e 32, ebenso die Aufgabe 18, Seite 42, in
Kapitel: Die ebene Trigonometrie.)

ıus vorstehender Gleich. β). ergeben
für die **Längen der Bogen** der be-
deren Centriewinkel: $1R$, $2R$, $3R$,
$5R$ etc. folgende Werte:

$$\left.\begin{array}{l} .\ arc\,90^0 = arc\,1R = \frac{\pi}{2} \\ .\ arc\,180^0 = arc\,2R = \pi \\ .\ arc\,270^0 = arc\,3R = \frac{3\pi}{2} \\ .\ arc\,360^0 = arc\,4R = 2\pi \\ .\ arc\,450^0 = arc\,5R = \frac{5\pi}{2} \end{array}\right\}$$

für **negative** Centriewinkel sind die Längen der zugehörigen Kreisbogen dieselben nur ebenfalls **negativ.** (Ueber **negative** Winkel vergl. man den Abschnitt: **Die Funktionen negativer Winkel** in dem Kapitel: Die Goniometrie.)

$$\ldots\ arc\,540^0 = arc\,6R = 3\pi$$ u. s. f. u. s. f.

Hiernach ist die Länge eines Bogens, dessen zugehöriger Centriewinkel im 1ten Quadranten (zwischen 0 und 90°) liegt, kleiner als $\frac{\pi}{2}$; ferner ist die Länge eines Bogens, der im 2ten Quadranten (also zwischen 90° und 180°) liegt, grösser als $\frac{\pi}{2}$ und kleiner als π, u. s. f.

Erklärung 58. Hat irgend eine goniometrische Funktion, z. B. der Sinus eines veränderlichen Bogens (siehe vorstehende Erklärungen), welcher Bogen durch y bezeichnet sein soll, den veränderlichen Wert x, in Zeichen:

$$\sin y = x$$

so ist mit einer Aenderung des Bogens y eine Aenderung des Wertes x bedingt und auch umgekehrt; es ist also der Sinus, bezw. der Wert x, von dem Bogen y abhängig, wenn y als die beliebig Veränderliche betrachtet wird; während der Bogen y von dem Sinus desselben, nämlich von dem Werte x abhängig ist, wenn x als die beliebig Veränderliche angenommen wird — d. h.: wenn der Bogen y die beliebig Veränderliche ist — so ist der Sinus hiervon, nämlich x, eine Funktion von y, und dies wird ausgedrückt durch die Gleichung:

1). . . . . $x = \sin y$

in welcher Gleichung x, bezw. $\sin y$ eine sogen. **goniometrische** Funktion darstellt.

Ist hingegen der Sinus, nämlich der Wert x die beliebig Veränderliche, so ist der dazu gehörige Bogen (*arcus*), nämlich y, eine Funktion von jenem Sinus, dessen Wert $= x$ ist, und dies wird ausgedrückt durch die Gleichung:

2). . . . . $y = arc\,(\sin = x)$

(vergl. die Erklärung 60),

welche Gleichung in Worten heisst:

y ist gleich dem Bogen (*arcus*), dessen Sinus gleich der beliebig Veränderlichen x ist.

Weil nach dieser Gleich. 2). y **eine in einen Bogen** ausgedrückte Funktion ist,

wird in diesem Falle y oder *arc* $= x$) eine **cyklometrische** oder **Kreis-**
ktion [siehe unter d)., S. 5] genannt.
Die vorstehenden Gleichungen 1). und
, bezw. die **goniometrischen** und die
lometrischen Funktionen, sind somit
· Umkehrungen von einander, in-
n in Gleich. 1). der Bogen y, in
ich. 2). aber der Sinus dieses Bo-
is y als die beliebig Veränderliche
rachtet wird.

Erklärung 59. Es brauchte wohl
entlich nicht erwähnt zu werden,
s auch die analogen **cyklometrischen**
ktionen:

$y = arc\,(cos = x)$
$y = arc\ \ (tg = x)$
$y = arc\,(ctg = x)$
$y = arc\,(sec = x)$
$y = arc\,(cosec = x)$ bestehen.

Erklärung 60. Die **cyklometrischen**
ktionen:

$y = arc\,(sin = x)$
$y = arc\,(cos = x)$
$y = arc\ \ (tg = x)$ u. s. f.

den auch oft in den Formen:

$y = arc\,sin\,x$
$y = arc\,cos\,x$
$y = arc\,tg\,x$ u. s. f.

chrieben, wobei man sich unter der
sse x den Sinus, bezw. den Kosinus,
Tangens etc. des Bogens y zu den-
hat.

Erstere Schreibweise ist die natür-
here und besser zu verstehen, in-
man daraus direkt die Funktion
sen kann, ist deshalb in Nachste-
dem fast ausschliesslich benutzt.

Erklärung 61. Aus dem Kapitel:
Goniometrie ist bekannt, dass es
ihlig viele Bogen, bezw. Winkel gibt,
n Sinus (Kosinus, Tangens etc.) **die-**
en Werte haben; so ist z. B., wenn
gend einen spitzen Winkel, bezw.

einen Bogen bedeutet, der kleiner als 90^0, bezw. kleiner als $\frac{\pi}{2}$ [s. Schluss der Erkl. 57] ist:

$$\sin u = \sin(180^0 - u) = \sin(360^0 + u) = \sin(450^0 - u) = \text{u. s. f.}$$

oder:

$$\sin u = \sin(\pi - u) = \sin(2\pi + u) = \sin(3\pi - u) = \text{u. s. f.}$$

Ebenso ist z. B.:

$$\cos u = \cos(-u)$$

Mithin enthält auch **jede cyklometrische Funktion**, wie: $arc\,(sin = x)$, $arc\,(cos = x)$ etc. unzählig viele Werte, d. h. sie ist **mehrwertig** (siehe die Antw. der Frage 4, S. 3).

Um diese Mehrdeutigkeit zu vermeiden, verstehe man unter $arc\,(sin = x)$ oder unter $arc\,sin\,x$ nicht einen beliebigen, der unzählig möglichen Bogen, sondern nur denjenigen Bogen, der unter allen den **kleinsten** absoluten Wert hat, bezw. diejenigen Bogen, welche in den Zusätzen nachstehender Lehrsätze angegeben sind.

Kommt ferner bei den cyklometrischen Funktionen ein positiver und ein negativer Bogen (Winkel) von gleichem absoluten Werte in Frage, so soll man den positiven Bogen (Winkel) nehmen. —

Man vergl. die Zusätze, welche den nachstehenden 4 Lehrsätzen angehören.

Die Differentialquotienten der cyklometrischen oder Kreisfunktionen.

s). Differentialquotient vom Bogen eines veränderlic Sinus.

Lehrsatz 16. Der Differentialquotient der cyklometrischen Funktion:

$$y = arc\,(sin = x)$$

$$[y = arc\,sin\,x, \text{ siehe Erkl. 60}]$$

bezw. **des Bogens eines veränderlichen Sinus** (s. Erkl. 58) ist $= 1$, geteilt durch $\sqrt{1-x^2}$

Man beachte hierbei die Zusätze 1 und 2.

Vorauss. $y = arc\,(sin = x)$

$y = arc\,sin\,x$

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Beweis I. Da nach der Erkl. der gegebenen Funktion:

1). . . . $y = arc\,(sin = x)$ oder in

$1^a)$ . . . $y = arc\,sin\,x$ (siehe Erkl. 60

die Grösse x **den Sinus** des Bog repräsentiert (s. Gleich. 1). in Erk so erhält man zunächst durch Umfor

Erkl. 62. Durch die Umformung einer nktion wird das **Verhältnis der veränderlichen** ssen (y u. x), als auch das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es Wachstums (ihrer Incremente, bezw. das rhältnis ihres unendlichen kleinen ıchstums, **ihrer Differentiale** (d. i.: $dy:dx$ r $dx:dy$) nicht geändert. Man kann da- bei dem Aufsuchen eines Differentialquo- ıten (welcher ja nur das Verhältnis der fferentiale der veränderlichen Grössen dar- lt) derartige Umformungen vornehmen.

Zum Beisp. Hat man:

. . . . . $y = lg\, x$

ist nach dem Lehrsatze 9:

. . . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

Formt man die gegebene Funktion:

$y = lg\, x$

$[y = log_e x]$ um

l schreibt dafür:

. . . . . $x = e^y$

erhält man hieraus nach Zusatz 2, Seite 28:

$\frac{dx}{dy} = e^y$ oder, da nach Gleich. 2).

$= x$ gesetzt werden kann:

$\frac{dx}{dy} = x$

Kehrt man die beiden Seiten dieser Glei- ng um, so erhält man:

. . . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, nämlich denselben erentialquotienten wie unter a).

Erkl. 63. Eine goniometr. Formel, heisst:

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

hieraus erhält man:

. . . . . $cos\,\alpha = \pm\sqrt{1 - sin^2\alpha}$ und

. . . . . $sin\,\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$

(siehe das Kapitel: Die Goniometrie).

2). . . . . $x = sin\, y$

und nach dem Lehrsatze 10:

3). . . . . $\frac{dx}{dy} = cos\, y$

Durch Umkehrung der beiden Seiten dieser Gleichung erhält man nach der Erkl. 62 für den fraglichen Differentialquotienten:

4). . . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\, y}$

Derselbe kann nun noch, wie folgt weiter reduziert werden:

Nach der Erkl. 63 ist:

$$sin^2 y + cos^2 y = 1$$

mithin kann man:

a). . . . . $cos\, y = \sqrt{1 - sin^2 y}$ (s. Zus. 1)

setzen und man erhält aus Gleich. 4).:

5). . . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}}$

Setzt man noch:

$sin\, y = x$ (siehe vorst. Gleich. 2)

bezw. $sin^2 y = x^2$

so erhält man schliesslich aus Gleich. 5).:

6). . . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

was zu beweisen war.

Beweis II.

Methode a (siehe Anmerkung 5, S. 9). Aus der gegebenen Funktion:

$$y = arc\,(sin = x)$$

kann man wie im Beweise I die Funktion:

1). . . . . $x = sin\, y$ ableiten.

Aendert man alsdann die Veränderliche x um die beliebige Grösse Δx und wird die hierdurch bedingte Aenderung von y durch Δy dargestellt, so ist:

2). . . . . $x + \Delta x = sin\,(y + \Delta y)$

Subtrahiert man hiervon die ursprüngliche Funktion 1). und dividiert zur Bil-

dung des **Differenzenquotienten** die
erhaltene neue Gleichung durch Δ
erhält man:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\sin(y+\Delta y) - \sin y}{\Delta y}$$

oder wenn man die beiden Seiten
Gleichung umkehrt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\sin(y+\Delta y) - \sin y}$$

wofür man nach der in Erkl. 52,
angeführten goniometr. Formel s
ben kann:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{2 \cdot \cos\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta}{2}}$$

Diese Gleichung umgeformt, gib

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{2}}{\sin \frac{\Delta y}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right.}$$

Setzt man endlich:

$$\frac{\Delta y}{2} = \alpha$$

und geht mit $\alpha \left(= \frac{\Delta y}{2}\right)$ zur Grenze
über, angedeutet durch:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \left[\frac{\alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\cos(y+\alpha}\right.$$

so wird bei dem Uebergang zur G
Null, siehe Erkl. 34, Seite 36,
Quotient $\frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$ und man erhä
den gesuchten **Differentialquotienten**

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \frac{1}{\cos(y+0)} \quad \text{oder:}$$

3). . . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$, nämlich dens

Wert, wie unter Gleich. 4). in der
weise I, welcher noch wie im erste
weise weiter ausgeführt werden kan

Zusatz 1. Da es unzählig viele
d zwar positive und negative Bo-
n gibt, deren **Kosinus** gleiche Werte
ben, ...
ist die Funktion:

$$y = arc\,(sin = x)$$

zw. deren Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$ [siehe die Gleich. 4). in dem Beweise I]

hrdeutig; um diese Mehrdeutigkeit
szuschliessen, ist bei Anwendung des
hrsatzes 16 der fragliche Bogen **stets**
ischen

$$+\frac{\pi}{2} \text{ und } -\frac{\pi}{2}$$

[d. i. immer ein Bogen, dessen zugehöriger Centriewinkel ein positiver oder negativer spitzer Winkel ist]

gend anzunehmen. Deshalb wurde
ch das zweite Vorzeichen (—) der
adratwurzel in der Gleich. a). ver-
chlässigt.

Zusatz 2. Hat man:

. . . . $y = arc\,(sin = -x)$

[oder: $y = arc\,sin\,(-x)$ s. Erkl. 60]

h.: ist y gleich dem Bogen (*arcus*),
sen Sinus $= -x$, nämlich **negativ** ist,
kann man

[da nach dem vorigen Zusatze nur solche Bogen, welche zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ (also in Graden ausgedrückt, zwischen $+90^0$ und -90^0) liegen, in Betracht kommen und der Sinus eines **negativen** Bogens (Winkels) gleich dem **negativen** Sinus desselben positiven Bogens (Winkels) ist — siehe das Kapitel: Die Goniometrie —]

für schreiben:

. . . . $y = -arc\,(sin = x)$

[oder: $y = -arc\,sin\,x$]

Differentialquotient vom Bogen eines veränderlichen Kosinus.

ehrsatz 17. Der Differentialquotient
cyklometrischen Funktion:

$$y = arc\,(cos = x)$$

[$y = arc\,cos\,x$, siehe Erkl. 60]

so ist z. B., wenn u ein spitzer Winkel (Bogen) bezeichnet:

$$\cos u = \cos(360^0 - u) = \cos(360^0 + u)$$

u. s. f.

wofür man nach der Gleich. ζ). in der Erkl. 57 auch schreiben kann:

$$\cos u = \cos(2\pi - u) = \cos(2\pi + u)$$

u. s. f.

ebenso ist:

$$\cos u = \cos(-u) = \cos -(2\pi - u)$$

u. s. f.

(siehe das Kapitel: Die Goniometrie).

bezw. des **Bogens eines veränderlichen Kosinus** (siehe Erkl. 58) ist $= -1$, geteilt durch $\sqrt{1-x^2}$

— Man beachte hierbei den Zusatz 2. —

Vorauss. $y = arc\,(cos = x)$ o

$y = arc\,cos\,x$

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Beweis I. Da nach den Erkläru 58 und 59 in der gegebenen Funk

1). . . . . $y = arc\,(cos = x)$ ode

1a) . . . . . $y = arc\,cos\,x$ (siehe Erl

die Grösse x den **Kosinus** des Bog repräsentiert, so erhält man zun durch Umformung:

2). . . . . $x = cos\,y$

und hieraus erhält man nach dem I satze 11:

3). . . . . $\frac{dx}{dy} = -sin\,y$

Durch Umkehrung der beiden S dieser Gleichung erhält man nach Erkl. 62 für den fraglichen Differe quotienten:

4). . . . . $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{sin\,y}$

Derselbe kann nun noch, wie reduziert werden.

Nach der Erkl. 63, ist:

$$sin^2 y + cos^2 y = 1$$

mithin kann man:

a). . . . . $sin\,y = \sqrt{1-cos^2 y}$ (s. Zus

setzen und man erhält aus Gleich

5). . . . . $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2 y}}$

Setzt man noch:

$cos\,y = x$ (siehe vorst. Glei

bezw. $cos^2 y = x^2$,

so erhält man schliesslich aus Gleich

6). . . . . $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

was zu beweisen war.

Erkl. 64. Der Sinus eines spitzen Winkels, w. der Sinus eines Bogens, der kleiner als kleiner als 90°) ist, ist gleich dem Kosinus Bogens, der jenen zu $\frac{\pi}{2}$ (zu 90°) ergänzt, umgekehrt (siehe das Kapitel: Die Goniorie).

Beweis II. Eine einfachere Ableitung des fraglichen Differentialquotienten ist folgende:

Aus nebenstehender Erkl. 64 ergibt sich der Satz:

Der Bogen (Winkel), dessen Kosinus $=$ x ist, ist gleich $\frac{\pi}{2}$ (90°) weniger dem Bogen, dessen Sinus $= x$ ist, in Zeichen:

$$arc\,(cos = x) = \frac{\pi}{2} - arc\,(sin = x)$$

Hiernach kann man die gegebene Funktion:

1). . . . . $y = arc\,(cos = x)$

auch in der Form schreiben:

2). . . . . $y = \frac{\pi}{2} - arc\,(sin = x)$

Differentiiert man diese Funktion nach den Lehrsätzen 2, 3 und 16, so erhält man sofort:

$$\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{oder:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

nämlich dasselbe Resultat wie im Beweise I.

Beweis III. Der Beweis kann auch analog dem Beweise II des Lehrsatzes 16 geführt werden.

Zusatz 1. Da die Sinus aller der gen (Winkel), welche zwischen 0 und zwischen 0° und 180°) liegen, **positiv**, die Sinus aller der Bogen (Winkel), che zwischen π und 2π (zwischen ° und 360°) liegen, **negativ** sind, so de der Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{sin\,y}$$ (siehe die Gleich. 4, in dem Beweise I)

gegebenen Funktion:

$$y = arc\,(cos = x)$$

n y einen ganz beliebigen Bogen stellte, positiv oder negativ werden,

und zwar je nachdem dieser Bogen grösser oder kleiner als π (180°) wäre; dasselbe würde stattfinden, wenn der Bogen negativ wäre. Um diese Zweideutigkeit des Differentialquotienten zu vermeiden, soll der fragliche Bogen bei Anwendung des vorstehenden Lehrsatzes

stets zwischen 0 und π liegend

angenommen werden.

---

u). Differentialquotient vom Bogen einer veränderlich Tangens.

Lehrsatz 18. Der Differentialquotient der cyklometrischen Funktion:

$$y = arc\,(tg = x)$$

[oder: $y = arc\,tg\,x$, siehe Erkl. 60]

bezw. **des Bogens einer veränderlichen Tangens** (siehe Erkl. 58) ist $= 1$, geteilt durch $1 + x^2$

— Man beachte hierbei die Zusätze 1 u. 2). —

Vorauss. $y = arc\,(tg = x)$ ode
$y = arc\,tg\,x$

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

Beweis I. Da nach den Erkläru 58 und 59 in der gegebenen Funk

1). . . . . $y = arc\,tg\,(= x)$ ode

1a) . . . . . $y = arc\,tg\,x$ (siehe Erk

die Grösse x die Tangens des Boge repräsentiert, so erhält man zun durch Umformung:

2). . . . . $x = tg\,y$

und nach dem Lehrsatze 12:

3). . . . . $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{cos^2 y}$

Durch Umkehrung der beiden S dieser Gleichung erhält man nach Erkl. 62 für den fraglichen Differe quotienten:

4). . . . . $\frac{dy}{dx} = cos^2 y$

Derselbe kann nun noch, wie reduziert werden:

Nach der Erkl. 65, ist:

a). . . . $cos\,y = \pm \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 y}}$

mithin kann man:

Erkl. 65. Eine goniometr. Formel, heisst:

$$cos\,\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

(siehe das Kapitel: Die Goniometrie, Seite 16, Gleich. 5).

b). . . . . $\cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y}$

setzen, und man erhält aus Gleich. 4).:

5). . . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+tg^2 y}$

Setzt man noch:

$$tg\, y = x \text{ (siehe vorst. Gleich. 2),}$$

bezw. $tg^2 y = x^2$

so erhält man schliesslich aus Gleich. 5).:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

was zu beweisen war.

Beweis II. Der Beweis kann auch analog dem Beweise I zu Lehrsatz 16, bezw. analog dem Beweise I zu Lehrsatz 12 geführt werden. Derselbe sei hiermit kurz angedeutet:

Aus der gegebenen Funktion:

1). . . . . $y = arc\,(tg = x)$

erhält man wie vorher durch Umkehrung:

2). . . . . $x = tg\, y$

mithin ist, analog dem Beweise zu Lehrsatz 12, Seite 50:

3). . . . . $x = \frac{\sin y}{\cos y}$

4). . . $x + \Delta x = \frac{\sin(y+\Delta y)}{\cos(y+\Delta y)}$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$\Delta x = \frac{\sin(y+\Delta y)}{\cos(y+\Delta y)} - \frac{\sin y}{\cos y}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \left(\frac{\sin(y+\Delta y)}{\cos(y+\Delta y)} - \frac{\sin y}{\cos y}\right) \cdot \frac{1}{\Delta y}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\sin(y+\Delta y).\cos y - \cos(y+\Delta y).\sin y}{\cos(y+\Delta y).\cos y} \cdot \frac{1}{\Delta y}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\sin \Delta y}{\cos(y+\Delta y).\cos y} \cdot \frac{1}{\Delta y} \quad \text{(s. Erkl. 49)}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\sin \Delta y}{\Delta y} \cdot \frac{1}{\cos(y+\Delta y)\cos y}$$

Kehrt man diese Gleichung um erhält man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\sin \Delta y} \cdot \cos(y + \Delta y) \cos y$$

Setzt man endlich: $\Delta y = \alpha$ und mit Δy $(= \alpha)$ zur Grenze Null angedeutet durch:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \left[\frac{\Delta y}{\sin \Delta y} \cdot \cos(y + \Delta y) c \right.$$

so erhält man nach der Erkl. 34, für den fraglichen Differentialquotien

$$\frac{dy}{dx} = 1 \,.\, \cos(y + 0) \,.\, \cos y = \cos y \,.$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y \quad \text{wie in der Gleich. 4}$$

dem Beweise I, welcher analog wie hin noch weiter ausgeführt werden

---

Zusatz 1. Da es unzählig viele und zwar positive und negative Bogen gibt, deren **Kosinus** gleiche Werte haben (siehe Zusatz 1, Seite 75), so ist die Funktion:

$$y = arc\,(tg = x)$$

bezw. deren Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$$

[siehe die Gleich. 4). in dem Beweise I]

mehrdeutig; um diese Mehrdeutigkeit auszuschliessen, ist bei Anwendung des Lehrsatzes 18 der fragliche Bogen **stets zwischen**

$$+\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{\pi}{2}$$

[d. i. ein Bogen, dessen zugehöriger Centriewinkel ein positiver oder negativer **spitzer** Winkel ist]

liegend anzunehmen.

Man vergl. den Zusatz 1, des Lehrsatzes 16.

Zusatz 2. Hat man:

. . . $y = arc\,(tg = -x)$

[oder: $y = arc\,tg\,(-x)$, siehe Erkl. 60]

h.: ist y gleich dem Bogen, dessen Tan-
s $= -x$, also negativ ist, so kann
n, da nach dem vorigen Zusatz nur solche
gen, welche zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ liegen,
che also in Grad ausgedrückt, kleiner
$+90^0$ und kleiner als -90^0 sind, in
racht kommen, und da die Tangens
s negativen Bogens (spitzen Win-
) gleich der negativen Tangens des-
en positiven Bogens (Winkels) ist, siehe
l. 66, hierfür schreiben:

. . . $y = -arc\,(tg = x)$

oder: $y = -arc\,tg\,x$]

rkl. 66. Eine goniometrische Formel heisst:

$$tg\,(-\alpha) = -tg\,\alpha$$

he Formel 33 in Kleyers Lehrb. der Goniometrie.)

v). Differentialquotient vom Bogen einer veränderlichen Kotangens.

ehrsatz 19. Der Differentialquotient
cyklometrischen Funktion:

$$y = arc\,(ctg = x)$$

oder: $y = arc\,ctg\,x$, siehe Erkl. 60]

des Bogens einer veränder-
ien Kotangens ist $= -1$, ge-
durch $1 + x^2$.

n berücksichtige bei der Anwendung dieses
s den Zusatz 1.

Vorauss. $y = arc\,(ctg = x)$

oder: $y = arc\,ctg\,x$

Behaupt. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$

Beweis I. Nach der Erkl. 58 stellt in der gegebenen Funktion:

a). . . . $y = arc\,(ctg = x)$

[oder: $y = arc\,ctg\,x$]

die Grösse x die Kotangens des Bogens y dar; die gegebene Funktion kann man also in der Form schreiben:

b). . . . . $x = ctg\,y$

Differentiiert man diese Gleichung, so erhält man nach dem Lehrsatz 13:

1). . . . . $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{sin^2 y}$

und hieraus ergibt sich:

2). . . . . $\frac{dy}{dx} = -sin^2 y$

Setzt man hierin nach der in Erkl. 67 angeführten goniometrischen Formel:

kl. 67. Eine goniometrische Formel heisst:

$$sin\,\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\,\alpha}}$$

Formel 15c in Kleyers Lehrb. der Goniometrie.)

$$\sin y = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + ctg^2 y}}$$

also für:

$$\sin^2 y = \frac{1}{1 + ctg^2 y}$$

so erhält man:

3). . . . $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + ctg^2 y}$

Berücksichtigt man nunmehr, dass Gleichung b).:

$$ctg^2 y = x^2$$

gesetzt werden kann, so erhält man in sicht dessen aus Gleichung 3). die leitende Beziehung:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Erkl. 68. Ein Satz aus der Goniometrie heisst:

„Die Tangens eines spitzen Winkels oder eines Bogens, der kleiner als $\frac{\pi}{2}$ oder 90^0 ist, ist gleich der Kotangens seines Komplementwinkels bezw. desjenigen Bogens, der jenen zu $\frac{\pi}{2}$ oder zu 90^0 ergänzt,“ in Zeichen:

$$tg\,\alpha = ctg\,(90^0 - \alpha)$$

(Siehe Formel 16 b in Kleyers Lehrb. der Goniometrie.)

Erkl. 69. Ist die Summe zweier Bogen z und z_1 gleich $\frac{\pi}{2}$ oder 90^0, in Zeichen:

a). . . . . $z + z_1 = \frac{\pi}{2}$

so ist der eine dieser Bogen z. B.:

b). . . . . $z = \frac{\pi}{2} - z_1$

Berücksichtigt man nunmehr, dass nach Gleichung a). z und z_1 solche Bogen sind, die sich zu 90^0 $\left(\text{zu } \frac{\pi}{2}\right)$ ergänzen, so kann man in Rücksicht darauf, dass nach der Erkl. 68 die Bogen z und z_1 solche Bogen sein müssen, welche die Eigenschaft haben, dass die Tangens des einen gleich der Kotangens des andern ist, und wenn man diese Tangens bezw. diese Kotangens hiernach mit ein und demselben Buchstaben, z. B. mit dem Buchstaben x bezeichnet, an Stelle der Gleichung b). auch schreiben:

c). . . $arc\,(ctg = x) = \frac{\pi}{2} - arc\,(tg = x)$

Beweis II. Aus dem in der Erl angeführten goniometrischen Satz sich der weitere Satz:

„Der Bogen (*arcus*), dessen Kotangen ist, ist gleich $\frac{\pi}{2}$ weniger dem (*arcus*), dessen Tangens ebenfalls =

(siehe Erkl. 69)

oder die Relation:

$$arc\,(ctg = x) = \frac{\pi}{2} - arc\,(tg = x$$

Nach diesem Satz kann man die bene Funktion:

a). . . . . $y = arc\,(ctg = x)$

auch in der Form schreiben:

b). . . . . $y = \frac{\pi}{2} - arc\,(tg = x)$

Differentiiert man diese Funktion den Lehrsätzen 3 und 18, so erhält

1). . . . . $\frac{dy}{dx} = o - \frac{1}{1 + x^2}$

oder:

2). . . . . $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}$

d. i. die zu beweisende Behauptung.

Beweis III. Man kann den Beweis ganz analog dem Beweis II zum satz 18 führen.

Beweis IV. Aus dem in der Er angeführten goniometrischen Satz sich nach der Erkl. 71 der weitere S

Erkl. 70. Ein Satz aus der Goniometrie ist:

„Die Kotangens eines Winkels oder Bogens ist gleich dem reciproken Wert der Tangens desselben Winkels oder desselben Bogens," in Zeichen:

$$ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$$

(siehe Formel 9 in Kleyers Lehrb. der Goniometrie.)

Erkl. 71. In der in der Erkl. 70 angeführ- goniometrischen Formel ist α ein Bogen, en Kotangens $= \frac{1}{tg\,\alpha}$ oder, wenn dieses x bezeichnet wird, $= x$ ist, in Zeichen:

$$ctg\,\alpha = x$$

a sich aus jener Relation die analoge Re- n:

$$\frac{1}{ctg\,\alpha} = tg\,\alpha$$

ɔt, und da hiernach dasselbe α ein Bogen dessen Tangens gleich dem reciproken ekehrten) Wert jener Kotangens, also nicht $\frac{1}{tg\,\alpha}$ oder $= x$, sondern $= tg\,\alpha$ oder $= \frac{1}{x}$ ɔ ergibt sich hieraus der Satz:

„Der Bogen, dessen Kotangens $= x$, muss gleich dem Bogen sein, dessen Tangens $= \frac{1}{x}$ ist," in Zeichen:

$$arc\,(ctg = x) = arc\,(tg = \frac{1}{x})$$

„Der Bogen, dessen Kotangens $= x$ ist, ist gleich dem Bogen, dessen Tangens gleich dem reciproken Wert jener Kotangens, nämlich $= \frac{1}{x}$ ist", in Zeichen:

$$arc\,(ctg = x) = arc\,(tg = \frac{1}{x})$$

Hiernach kann man die gegebene Funktion:

a). . . . . $y = arc\,(ctg = x)$

auch in der Form schreiben:

b). . . . . $y = arc\,(tg = \frac{1}{x})$

Differentiiert man diese Funktion nach den Lehrsätzen 7 und 18, indem man für $\frac{1}{x}$, welches eine Funktion von x ist, $= u$ gesetzt denkt (siehe Lehrsatz 7), so erhält man:

a'. . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot -\frac{1}{x^2}$$

(siehe Zusatz 4 des Lehrsatzes 6).

Multipliziert man die beiden Brüche rechts miteinander, Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner und reduziert gleichzeitig, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2+1}$$

oder die zu beweisende Behauptung:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

(siehe Zusatz 1 und die Erkl. 72).

Zusatz 1. Nach der in dem Beweis I stellten Gleichung 2). hat man für Differentialquotienten der Funktion:

. . . . . $y = arc\,(ctg = x)$

:

. . . $\frac{dy}{dx} = -sin^2 y$

es nun unzählig viele, sowohl tive als negative Bogen (Winkel) von welchen die Quadrate der zu- rigen Sinus dieselben Werte haben, gibt sich hieraus, dass jener Differen- otient mehrdeutig ist.

a diese Mehrdeutigkeit auszuschliessen, ei Anwendung des Lehrsatzes 19 der chte Bogen y stets als ein solcher an-

zunehmen, welcher zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ liegt, zu welchem also ein Centriewinkel gehört, der ein positiver oder negativer spitzer Winkel ist (siehe Erkl. 61).

Erkl. 72. Die Differentialquotienten der cyklometrischen Funktionen kann man auch direkt, ohne auf die umgekehrten (goniometrischen) Formen zurückzugehen, herleiten.

Auf welche Weise dies möglich ist, soll hier z. B. an der cyklometrischen Funktion:

a). . . . . $y = arc\,(tg = x)$

gezeigt werden.

Aendert sich die unabhängig Veränderliche x um Δx, so ändert sich auch die abhängig Veränderliche y um Δy, und man erhält aus Gleichung a).:

b). . . $y + \Delta y = arc\,(tg = x + \Delta x)$

Subtrahiert man hiervon die ursprüngliche Funktion a). und dividiert in der somit erhaltenen Gleichung zur Bildung des Differenzenquotienten beiderseits mit Δx, so erhält man:

c). $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{arc\,(tg = x + \Delta x) - arc\,(tg = x)}{\Delta x}$$

Bringt man in Bezug auf den Zähler des Quotienten rechts die in der Erkl. 73 entwickelte Formel b). in Anwendung, indem man in derselben für

$$a = x + \Delta x$$

und für

$$b = x$$

setzt, so geht jene Gleichung über in:

d). $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{arc\left(tg = \frac{\Delta x}{1 + x\,(x + \Delta x)}\right)}{\Delta x}$$

Setzt man nunmehr:

α). . . $$\frac{\Delta x}{1 + x\,(x + \Delta x)} = \alpha$$

so erhält man aus d).:

e). . . . . $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{arc\,(tg = \alpha)}{\Delta x}$$

Da sich nun aus Gleichung α). ergibt:

β). . . $$\frac{\Delta x}{1 + x\,(x + \Delta x)} : \alpha = 1$$

so kann man Gleichung e). in Rücksicht dieses auch schreiben in der Form:

f). $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{arc\,(tg = \alpha)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\frac{1 + x\,(x + \Delta x)}{\alpha}}$$

Vertauscht man die Nenner rechts, so erhält man hieraus:

Erkl. 73. Bedeutet in der in der Ei angeführten goniometrischen Formel

a). . . $$tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta}$$

α einen Bogen (Winkel), dessen Tange $= a$ ist,

und bedeutet

β einen Bogen (Winkel), dessen Tange $= b$ ist,

und man setzt dementsprechend und der üblichen symbolischen Schreibweise a linken Seite jener Formel für:

$$\alpha = arc\,(tg = a)$$

und für:

$$\beta = arc\,(tg = b)$$

und auf der rechten Seite jener Form

$$tg\,\alpha = a$$

$$tg\,\beta = b$$

so geht jene goniometrische Formel übe

$$tg\left[arc\,(tg = a) - arc\,(tg = b)\right] = \frac{a}{1+}$$

Berücksichtigt man, dass dies heisst:

$$\left[arc\,(tg = a) - arc\,(tg = b)\right]$$

ist der Bogen (Winkel), dessen Tang $\frac{a - b}{1 + a \,.\, b}$ ist, so erhält man, wenn ma Aussage in der üblichen Weise sym schreibt, die cyklometrische Formel:

b). . . $$arc\,(tg = a) - arc\,(tg = b) = arc\left(tg = \frac{a - b}{1 + a \,.\, b}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{arc\,tg\,(=\alpha)}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

r:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{arc\,(tg=\alpha)}{\alpha} \cdot \frac{1}{1+x(x+\Delta x)}$$

etzt man in dieser Gleichung:

$\gamma)$. . . . $\alpha = tg\,\beta$

:

$\delta)$. . . . $\beta = arc\,(tg=\alpha)$

rhält man noch die weitere Gleichung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\beta}{tg\,\beta} \cdot \frac{1}{1+x(x+\Delta x)}$$

enkt man sich nunmehr Δx stetig kleiner, dlich klein werdend, was man durch:

$$lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = lim\frac{\beta}{tg\,\beta} \cdot \frac{1}{1+x(x+\Delta x)}$$

in Rücksicht der Erkl. 75 durch:

$$lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = lim\frac{\beta}{sin\beta} \cdot cos\,\beta \cdot \frac{1}{1+x(x+\Delta x)}$$

ıten kann, und berücksichtigt man, dass mendlich kleine Δx nach Gleichung $\alpha)$. $= 0$, somit nach Gleichung $\gamma)$:

$$tg\,\beta = 0$$

hiernach und nach der Erkl. 76:

$$\beta = 0^0$$

t werden kann, so erhält man für den gen Differentialquotienten (oder bei unendleinen Δx):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{sin\,0^0} \cdot cos\,0^0 \cdot \frac{1}{1+x(x+0)}$$

in Rücksicht der Erkl. 77 und nach ger Reduktion:

. . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

e Beweise des Lehrsatzes 18 auch ergaben.

Erkl. 74. Eine goniometrische Formel heisst:

$$tg\,(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1+tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta}$$

(Siehe Formel 46 in Kleyers Lehrb. der Goniometrie).

Erkl. 75. Eine goniometrische Formel heisst:

$$tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

(Siehe Formel 7 in Kleyers Lehrb. der Goniometrie.)

Erkl. 76. Eine goniometrische Formel heisst:

$$tg\,0^0 = 0$$

(Siehe Abschnitt 10 in Kleyers Lehrb. der Goniometrie.)

Erkl. 77. Aus der Goniometrie ist bekannt, dass

$$cos\,0^0 = 1$$

und

$$sin\,0^0 = 0 \text{ ist.}$$

(Siehe Abschnitt 10 in Kleyers Lehrb. der Goniometrie.)

---

nerkung 10. Die Differentialquotienten der cyklometrischen Funktionen:

$$y = arc\,(sec = x)$$
$$y = arc\,(cosec = x)$$
$$y = arc\,(sin\,vers = x)$$
und $$y = arc\,(cos\,vers = x)$$

n den folgenden gelösten Aufgaben entwickelt.

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 65. Man soll den Differentialquotienten von:

$$y = arc\,(sin = \sqrt{1-2x})$$

bestimmen.

Auflösung. Beachtet man, dass $\sqrt{1$
d. i. $(1-2x)^{\frac{1}{2}}$ eine Funktion von x is
bringt zunächst die Lehrsätze 7 und
Anwendung, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-2x})^2}} \cdot \frac{d(1-}{dx}$$

Beachtet man nunmehr, dass $1-2$
Funktion von x ist, und bringt die
sätze 1 und 7 in weiterem in Anwe
so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-2x})^2}} \cdot \frac{1}{2}(1-2x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d(}{}$$

Bringt man jetzt noch den Lehrsat
Anwendung, so ergibt sich hieraus f
gesuchten Differentialquotienten:

a). . . $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-2x})^2}} \cdot \frac{1}{2}(1-2x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot -2$$

oder nach gehöriger Reduktion, s. Er

A). . . $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{1-2x}}$$

Erkl. 78. Reduziert man die rechte Seite der nebenstehenden Gleichung a)., so erhält man der Reihe nach:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)}} \cdot \frac{1}{2}(1-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-2x}} \cdot -2$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{1-2x}}$$

Aufgabe 66. Ebenso, von:

$$y = arc\left(cos = \frac{x}{x^2+3x-5}\right)$$

Auflösung. Nach den Lehrsätzen
17 hat man zunächst:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x^2+3x-5}\right)^2}} \cdot \frac{d\frac{x}{x^2+3}}{dx}$$

Reduziert man den Nenner des 1
tienten rechts, wie in der Erkl. 79 g
und bringt in Bezug auf den 2. Quo
den Lehrsatz 6 in Anwendung, so
man für den gesuchten Differentialquoti

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+3x-5}{\sqrt{x^4+6x^3-2x^2-30x+5}} \cdot \frac{(x^2+3x-5).1-x.(2}{(x^2+3x-5)^2}$$

oder, reduziert:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-x^2-5}{(x^2+3x-5)\sqrt{x^4+6x^3-2x^2-30x+5}}$$

mithin:

$$\text{A} \ldots \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+5}{(x^2+3x-5)\sqrt{x^4+6x^3-2x^2-30x+5}}$$

Erkl. 79. Die Wurzel:

$$\sqrt{1-\left(\frac{x}{x^2+3x-5}\right)^2}$$

kann man wie folgt umformen:

$$\sqrt{1-\left(\frac{x}{x^2+3x-5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{x^2}{(x^2+3x-5)^2}}$$

oder:

$$= \sqrt{\frac{(x^2+3x-5)^2-x^2}{(x^2+3x-5)^2}}$$

oder:

$$= \frac{1}{x^2+3x-5}\cdot\sqrt{x^4+6x^3+9x^2-10x^2-30x+25-x^2}$$

(siehe Erkl. 80)

oder:

$$= \frac{1}{x^2+3x-5}\cdot\sqrt{x^4+6x^3-2x^2-30x+25}$$

Erkl. 80. Die Formel, nach welcher man ein Trinom in die 2. Potenz erheben kann, oder nach welcher man das Quadrat eines Trinoms entwickeln kann, heisst:

$$(a+b+c)^2 = a^2+2b.a+b^2+2c.(a+b)+c^2$$

Bei dieser Formel ist angenommen, dass a, b und c positiv sind; ist a, bezw. b oder c negativ, so muss dies auf einfache Weise berücksichtigt werden, indem überall da, wo z. B. das positive c steht, das negative c gesetzt werden muss.

Aufgabe 67. Ebenso, von:

$$y = arc\left(tg = \frac{1}{x-2}\right)$$

Auflösung. Nach den Lehrsätzen 7 und 18 ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{x-2}\right)}{dx}$$

Reduziert man den 1. Quotienten rechts und bringt in Bezug auf den 2. Quotienten den Zusatz 2 des Lehrsatzes 6 in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}}\cdot-\frac{1}{(x-2)^2}\cdot\frac{d(x-2)}{dx}$$

Reduziert man weiter und führt die in dem letzten Quotienten angedeutete Diffe-

rentiation nach dem Lehrsatz 3 und Erkl. 14 aus, so erhält man für der suchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2+1} \cdot -\frac{1}{(x-2)^2} \cdot$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+(x-2)^2}$$

Aufgabe 68. Ebenso, von:

$$y = arc\,(ctg = m^{4x})$$

Auflösung. Nach den Lehrsätzen 7 19 ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+(m^{4x})^2} \cdot \frac{d(m^{4x})}{dx}$$

Hieraus ergibt sich nach Anwendung Lehrsätze 7 und 8:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+(m^{4x})^2} \cdot m^{4x} \cdot lg\,m \cdot \frac{d(}{d}$$

und nach Anwendung des Lehrsatzes

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+(m^{4x})^2} \cdot m^{4x} \cdot lg\,m \cdot 4$$

Reduziert, erhält man für:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4\,m^{4x} \cdot lg\,m}{1+m^{8x}}$$

Aufgabe 69. Ebenso, von:

$$y = e^{arc\,(sin = x)}$$

Auflösung. Nach dem Zusatz 2 Lehrsatzes 8 ist:

$$\frac{dy}{dx} = e^{arc\,(sin = x)} \cdot \frac{d\,[arc\,(sin = x)}{dx}$$

und hieraus ergibt sich nach Anwe des Lehrsatzes 16:

$$\frac{dy}{dx} = e^{arc\,(sin = x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{arc\,(sin = x)}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aufgabe 70. Ebenso, von:

$$y = arc\,(sin = lg\,sin\,x)$$

Auflösung. Nach Anwendung der sätze 7 und 16 erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(lg\,sin\,x)^2}} \cdot \frac{d\,(lg\,sin\,x)}{dx}$$

Bringt man im weiteren die Lehrsä und 9 in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(lg\,sin\,x)^2}} \cdot \frac{1}{sin\,x} \cdot \frac{d\,(sin\,x)}{dx}$$

rkl. 81. Eine goniometrische Formel heisst:

$$ctg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$$

ehe Formel 8 in Kleyers Lehrb. der Goniometrie.)

und hieraus findet man nach Anwendung des Lehrsatzes 10:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(lg\,sin\,x)^2}} \cdot \frac{1}{sin\,x} \cdot cos\,x$$

oder nach Erkl. 81:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ctg\,x}{\sqrt{1-(lg\,sin\,x)^2}}$$

---

ufgabe 71. Ebenso, von:

$$y = arc\,(sec = u)$$

n u irgend eine Funktion von x be-et.

Auflösung. Die gegebene Gleichung:

$$y = arc\,(sec = u)$$

sagt, wie früher gezeigt wurde, in ihrer Umkehrung aus, dass u die Sekans eines Bogens y sein soll, in Zeichen:

a). . . . . $u = sec\,y$

Differentiiert man diese Funktion, in welcher y eine von x abhängige Variable bedeutet, nach x, so erhält man nach den Lehrsätzen 7 und 14:

b). . . . $\frac{du}{dx} = \frac{sin\,y}{cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx}$

und hieraus ergibt sich zunächst:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos^2 y}{sin\,y} \cdot \frac{du}{dx}$$

Setzt man nach der Erkl. 83:

$$cos^2 y = \frac{1}{u^2}$$

und nach der Erkl. 85:

$$sin\,y = \sqrt{1-\frac{1}{u^2}}$$

so erhält man für den gesuchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{u^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}} \cdot \frac{du}{dx}$$

oder nach gehöriger Reduktion:

A). . . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$

---

kl. 82. Eine Formel aus der Goniometrie t:

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$$

he Formel 11 in Kleyers Lehrb. der Goniometrie.)

kl. 83. Setzt man nach der Erkl. 82 in nstehender Gleichung:

. . . . . $u = sec\,y$

$$sec\,y = \frac{1}{cos\,y}$$

hält man:

. . . . . $u = \frac{1}{cos\,y}$

. . . $cos^2 y = \frac{1}{u^2}$

kl. 84. Eine goniometrische Formel heisst:

$$sin\,\alpha = \sqrt{1-cos^2\alpha}$$

e Formel 15a in Kleyers Lehrb. der Goniometrie.)

kl. 85. Nach der Erkl. 84 ist:

$$sin\,y = \sqrt{1-cos^2 y}$$

zt man hierin nach der Gleichung c). in 83:

$$cos^2 y = \frac{1}{u^2}$$

hält man:

. . . $sin\,y = \sqrt{1-\frac{1}{u^2}}$

Aufgabe 72. Ebenso, von:

$$y = arc\,(cosec = u)$$

wenn u eine Funktion von x bedeutet.

Erkl. 86. Ist die Summe zweier Bogen Z und Z_1 gleich $\frac{\pi}{2}$ oder 90^0, in Zeichen:

a). . . . . $Z + Z_1 = \frac{\pi}{2}$ (oder $= 90^0$)

so ist der eine dieser Bogen z. B.:

b). . . . . $Z = \frac{\pi}{2} - Z_1$

Ergänzen sich die Bogen Z und Z_1 wie vorstehend angenommen zu 90^0 $\left(\text{zu } \frac{\pi}{2}\right)$, so muss nach der Erkl. 87 die Kosekans des einen gleich der Sekans des andern jener Bogen sein; bezeichnet man hiernach die Sekans und die Kosekans jener Bogen mit einem und demselben Buchstaben, z. B. mit x, so kann man jene Gleichung b). auch in der Form schreiben:

c). . . $arc\,(cosec = x) = \frac{\pi}{2} - arc\,(sec = x)$

Erkl. 87. Eine goniometrische Formel heisst:

$$cosec\,\alpha = sec\,(90^0 - \alpha)$$

(Siehe Formel 16e in Kleyers Lehrb. der Goniometrie.)

Auflösung. Nach der in der Erk aufgestellten Gleichung c). kann man

a). . . $arc\,(cosec = u) = \frac{\pi}{2} - arc\,(sec =$

setzen.

Man kann somit auch die gegebene F tion:

b). . . . . $y = arc\,(cosec = u)$

in der Form schreiben:

c). . . . . $y = \frac{\pi}{2} - arc\,(sec = u)$

Differentiiert man diese Funktion dem Lehrsatz 3 und der in Auflösun vorigen Aufgabe 71 entwickelten Diff tialformel, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = o - \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

oder:

A). . . $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

Anmerkung 11. Analoge ungelöste Aufgaben sind im Abschnitt z). enthalten.

Die Differentialquotienten einiger besonderer Funktionen.

w). Differentialquotient einer Potenz, deren Basis und der Exponent je eine Funktion der unabhängig Variablen i

Lehrsatz 20. Der Differentialquotient der Funktion:

$$y = u^v$$

in welcher u und v Funktionen derselben unabhängig Variablen x, derselben Independenten oder Freiveränderlichen x sind, ist:

$$\frac{dy}{dx} = u^v . lg\,u \cdot \frac{dv}{dx} + v . u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

Vorauss. $y = u^v$

$u = \varphi(x)$

$v = \psi(x)$

Behaupt.

$$\frac{dy}{dx} = u^v . lg\,u \cdot \frac{dv}{dx} + v . u^{v-1} \cdot \frac{d}{d}$$

Beweis I. Aendert sich in der benen Funktion:

a). . . . . $y = u^v$

in welcher u und v Funktionen der unabhängigen (independenten) Variablen x bedeuten, diese Variable x um Δx und ändert sich dementsprechend:

u um Δu
v „ Δv
y „ Δy

so geht jene Funktion über in:

b). . . $y + \Delta y = (u + \Delta u)^{v+\Delta v}$

Subtrahiert man hiervon die gegebene Funktion a)., so erhält man für die Aenderung von y:

c). . . $\Delta y = (u + \Delta u)^{v+\Delta v} - u^v$

Addiert man auf der rechten Seite dieser Gleichung:

$$+ (u + \Delta u)^v$$

und:

$$- (u + \Delta u)^v$$

wodurch diese Seite keine Veränderung erleidet, so ist:

d). . . . $\Delta y = (u + \Delta u)^{v+\Delta v} \underbrace{- (u + \Delta u)^v + (u + \Delta u)^v}_{= 0} - u^v$

und man erhält hiernach für den Differenzenquotienten:

e). . . . $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta u)^{v+\Delta v} - (u + \Delta u)^v}{\Delta x} + \frac{(u + \Delta u)^v - u^v}{\Delta x}$

oder:

e_1). . . . $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta u)^{v+\Delta v} - (u + \Delta u)^v}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{(u + \Delta u)^v - u^v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$

Denkt man sich nun Δx, somit auch Δu, Δv und Δy stetig kleiner, unendlich klein werdend, was man auch symbolisch durch:

f). . . . $lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim \frac{(u + \Delta u)^{v+\Delta v} - (u + \Delta u)^v}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + lim \frac{(u + \Delta u)^v - u^v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$

andeutet, und berücksichtigt man, dass alsdann nach der Erkl. 88 der erste Quotient:

$$\frac{(u + \Delta u)^{v+\Delta v} - (u + \Delta u)^v}{\Delta v}$$

auf der rechten Seite der Gleichung e_1). für ein unendlich klein werdendes Δx, bezw. dass der erste Quotient:

$$lim \frac{(u + \Delta u)^{v+\Delta v} - (u + \Delta u)^v}{\Delta v}$$

auf der rechten Seite der Gleich. f). den Differentialquotienten der Exponential-

rkl. 88. Hat man die Funktion:

. . . . . $z = (u + \Delta u)^v$

elcher $u + \Delta u$ die unveränderliche Baiiner Potenz bedeutet, deren Exponent die hängig Veränderliche v ist, ist also $\Delta u)^v$ eine sogen. Exponentialgrösse e den Abschnitt h)., und man denkt sich Variable (die Independente) v um Δv gert, so ändert sich auch dementsprechend Δz, und die Gleichung a). geht über in:

. . $z + \Delta z = (u + \Delta u)^{v+\Delta v}$

Hiervon die ursprüngliche Funktion a). subtrahiert, gibt:

c). $\Delta z = (u+\Delta u)^v + \Delta v - (u+\Delta u)^v$

Für den Differenzenquotienten jener Funktion a). hat man hiernach:

d). $\frac{\Delta z}{\Delta v} = \frac{(u+\Delta u)^v + \Delta v - (u+\Delta u)^v}{\Delta v}$

Denkt man sich Δv, damit auch Δz stetig kleiner, unendlich klein werdend, was auch durch:

1). $lim \frac{\Delta z}{\Delta v} = lim \frac{(u+\Delta u)^v + \Delta v - (u+\Delta u)^v}{\Delta v}$

symbolisch dargestellt wird, so erhält man schliesslich den Differentialquotienten $\frac{dz}{dv}$ der Exponentialgrösse $(u+\Delta u)^v$, man erhält also nach den Lehrsätzen 7 und 8:

1a). . . $\frac{dz}{dv} = (u+\Delta u)^v . lg(u+\Delta u)$

Der Quotient:

$$\frac{(u+\Delta u)^v + \Delta v - (u+\Delta u)^v}{\Delta v}$$

in nebenstehender Gleichung e_1). ist somit für ein unendlich klein werdendes Δv, was dadurch angedeutet wird, dass man vor diesen Quotienten die Abkürzung *lim* setzt (siehe nebenstehende Gleichung f)., gleichbedeutend mit dem Differentialquotient der Exponentialgrösse $(u+\Delta u)^v$.

Erkl. 89. Da in dem nebenstehenden Ausdruck:

α). . . . $(u+\Delta u)^v . lg(u+\Delta u)$

Δu als unendlich klein gegen die endliche Grösse u nicht in Betracht kommen kann, indem durch Hinzufügen einer unendlich kleinen Grösse zu einer endlichen Grösse letztere um einen angebbaren Wert nicht vergrössert wird, so kann man für jenen Ausdruck, ohne einen besonderen Fehler zu begehen, auch setzen:

α_1). . . . . $u^v . lg\, u$

Erkl. 90. Hat man die Funktion:

a). . . . . $z = u^v$

in welcher v den unveränderlichen Exponenten einer Potenz bedeutet, deren Basis u die unabhängig Variable u ist (siehe den Abschnitt a)., und man denkt sich die Variable u um Δu geändert, so ändert sich auch dementsprechend z um Δz und die Gleichung a). geht über in:

b). . . . $z + \Delta z = (u+\Delta u)^v$

grösse $(u+\Delta u)^v$ vorstellt, dass man nach den in der Erkl. 88 aufgestellten chungen 1). und 1a). für jenen Quoti bei unendlich klein werdendem Δx

α). . . $(u+\Delta u)^v . lg(u+\Delta u)$

oder nach der Erkl. 89:

α_1). . . . . $u^v . lg\, u$

setzen kann; dass ferner der zweite tient:

$$\frac{(u+\Delta u)^v - u^v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

auf der rechten Seite der Gleichung für ein unendlich klein werde Δx, bezw. dass der zweite Quotient:

$$lim \frac{(u+\Delta u)^v - u^v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

auf der rechten Seite der Gleichung f) Differentialquotienten der Potenz $(u+$ vorstellt, dass man also nach der Erk für diesen Quotienten bei unendlich k werdendem Δx:

β). . . . . $v . u^{v-1}$

setzen kann; so geht für ein unen kleines Δx die Gleichung e_1). über in

A). . . $\frac{dy}{dx} = u^v \cdot lg\, u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot u^{v-1} \cdot$

was zu beweisen war (siehe Erkl. 92).

Beweis II. Logarithmiert man z die gegebene Funktion:

a). . . . . $y = u^v$

so erhält man:

b). . . . . $lg\, y = v . lg\, u$ (siehe Erk

Differentiiert man beide Seiten d Gleichung nach der Independenten (u hängigen Variablen) x, was man k indem jede Seite jener Gleichung b). Funktion einer und derselben Inde denten x ist, so erhält man nach An dung der Lehrsätze 7 und 9 auf der lin Seite der Gleichung b)., und nach An dung des Lehrsatzes 5 auf der rech Seite der Gleichung b).:

1). . . $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{d(lg\, u)}{dx} + lg\, u \cdot \frac{d}{d}$

Führt man die in dem ersten Quotie rechts angedeutete Differentiation nach

Hiervon die ursprüngliche Funktion subtrahiert, gibt:

$$\ldots \quad \Delta z = (u + \Delta u)^v - u^v$$

Für den Differenzenquotienten jener Funktion a). hat man hiernach:

$$\ldots \quad \frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{(u+\Delta u)^v - u^v}{\Delta u}$$

Denkt man sich Δu stetig kleiner, unendlich klein werdend, was auch durch:

$$\ldots \quad lim\ \frac{\Delta z}{\Delta u} = lim \frac{(u+\Delta u)^v - u^v}{\Delta u}$$

symbolisch dargestellt wird, so erhält man schliesslich den Differentialquotienten $\frac{dz}{du}$ der Potenz u^v, man erhält also nach den Lehrsätzen 7 und 1:

$$\ldots \ldots \quad \frac{dz}{du} = v \,.\, u^{v-1}$$

Der Quotient:

$$\frac{(u+\Delta u)^v - u^v}{\Delta u}$$

somit für ein unendlich klein werdendes Δu, was auch dadurch angedeutet wird, dass man vor jenen Quotienten die Abkürzung *lim* setzt (siehe nebenstehende Gleich. f)., gleichbedeutend mit dem Differentialquotient der Potenz u^v.

Erkl. 91. Alle die Logarithmierungen, bei denen nicht ausdrücklich anders gesagt, beziehen sich auf das natürliche Logarithmensystem, d. i. das Logarithmensystem, dessen $e = 2{,}71828\ldots$ ist, und welche allgemein „*e*“ bezeichnet wird.

Erkl. 92. Aus dem nebenstehenden Beweis I kann man für die Differentiation einer Funktion der Form:

$$\ldots \ldots \quad y = u^v$$

in welcher u und v Funktionen derselben unabhängig Variablen x sind, folgende Regel herleiten:

„Man differentiiere die Funktion u^v nach x einmal so, als ob u konstant und v die Veränderliche sei $\left(\text{man erhält: } u^v \,.\, lg\, u \cdot \frac{dv}{dx}\right)$; dann differentiiere man die Funktion u^v nach x als ob v konstant und u die Veränderliche sei $\left(\text{man erhält: } v \,.\, u^{v-1} \,.\, \frac{du}{dx}\right)$ und addiere die somit erhaltenen beiden Resultate.“

Nach dieser Regel erhält man für den Differentialquotienten jener Funktion unter a).:

$$\frac{dy}{dx} = u^v \,.\, lg\, u \cdot \frac{dv}{dx} + v \,.\, u^{v-1} \,.\, \frac{du}{dx}$$

Lehrsätzen 7 und 9 weiter aus, so erhält man:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + lg\, u \cdot \frac{dv}{dx}$$

oder:

$$2). \quad \ldots \quad \frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + y \cdot lg\, u \cdot \frac{dv}{dx}$$

Setzt man hierin für y den Wert u^v nach Gleichung a)., so ergibt sich schliesslich für den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = u^v \cdot \frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \cdot lg\, u \cdot \frac{dv}{dx}$$

oder, reduziert und anders geordnet:

$$A^1). \quad \ldots \quad \frac{dy}{dx} = u^v \cdot lg\, u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

wie in dem Beweise I. (siehe Erkl. 93).

Dieser Differentialquotient besteht aus zwei Teilen; der 1. Teil wird durch Differentiation nach vorstehendem erhalten, wenn man in u^v die Basis u als konstant und nur den Exponenten v als veränderlich ansieht; der andere Teil wird erhalten, wenn man in u^v den Exponenten v als konstant und die Basis u als veränderlich ansieht.

Erkl. 93. Setzt man in der Funktion:

a). . . . . $y = u^v$

in Rücksicht darauf, dass u und v Funktionen derselben unabhängig Variablen sind:

$$u = f(x)$$
$$v = \varphi(x)$$

so kann man nach dem Lehrsatz 20 den Differentialquotienten jener Funktion a). auch wie folgt schreiben:

b). . . $\frac{dy}{dx} = [f(x)]^{\varphi(x)} \cdot lg f(x) \cdot \varphi'(x) + \varphi(x) [f(x)]^{\varphi(x)-1} \cdot f'(x)$

in welcher Gleichung $\varphi'(x)$ und $f'(x)$ die abgeleiteten Funktionen von $\varphi(x)$ und $f(x)$ oder die Differentialquotienten dieser Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ nach x bedeuten.

Zusatz 1. Nach dem Lehrsatz 20 ist der Differentialquotient der Funktion:

a). . . . . $y = u^v$

in welcher u und v Funktionen derselben unabhängigen Variablen x, derselben Independenten x sind:

1). . . $\frac{dy}{dx} = u^v \cdot lgu \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx}$

Für den Fall, dass:

α). . . . $u = v = x$

ist, geht jene Funktion a). über in:

b). . . . . $y = x^x$

Für den Differentialquotienten dieser Funktion erhält man nach Gleichung 1).:

$$\frac{dy}{dx} = x^x \cdot lgx \cdot \frac{dx}{dx} + x \cdot x^{x-1} \cdot \frac{dx}{dx}$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = x^x . lgx . 1 + x^x . 1$$

mithin:

2). . . . $\frac{dy}{dx} = x^x (lgx + 1)$

Zusatz 2. Nach dem Lehrsatz 20 ist der Differentialquotient der Funktion:

a). . . . . $y = u^v$

welcher u und v Funktionen derselben bhängigen Variablen x sind:

$$\ldots \frac{dy}{dx} = u^v \cdot lgu \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

ür den Fall, dass:

$$\alpha). \ldots v = x$$

geht jene Funktion a). über in:

$$\ldots y = u^x$$

ür den Differentialquotienten dieser ktion erhält man nach Gleichung 1).:

$$\frac{dy}{dx} = u^x \cdot lgu \cdot \frac{dx}{dx} + x \cdot u^{x-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

:

$$\frac{dy}{dx} = u^x \cdot lgu + x \cdot u^{x-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

ür den Fall, dass:

$$\beta). \ldots u = x$$

geht jene Funktion a). über in:

$$\ldots y = x^v$$

ür den Differentialquotienten dieser ktion erhält man nach Gleichung 1).:

$$\frac{dy}{dx} = x^v \cdot lgx \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot x^{v-1} \cdot \frac{dx}{dx}$$

:

$$\frac{dy}{dx} = x^v \cdot lgx \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot x^{v-1}$$

ısatz 3. Den Lehrsatz 20 kann man itern wie folgt:

at man z. B. die Funktion:

$$\ldots y = u^{(v^w)} \quad \text{(siehe Erkl. 86)}$$

elcher:

$$\ldots \begin{cases} u = f(x) \\ v = \varphi(x) \\ w = \psi(x) \end{cases}$$

n welcher also u, v und w Funktionen elben Independenten x sind, so kann den Differentialquotienten jener Funkunter a). unter anderm wie folgt her-ı:

garithmiert man Gleichung a)., so ist:

$$\ldots lgy = v^w \cdot lgu$$

fferentiiert man beide Seiten dieser hung nach x, so ist nach den Lehrn 9 und 5:

$$\frac{dy}{dx} = v^w \cdot \frac{d(lgu)}{dx} + lgu \cdot \frac{d(v^w)}{dx}$$

Führt man die auf der rechten Seite noch angedeuteten Differentiationen nach dem Lehrsatz 9, bezw. nach dem Lehrsatz 20 aus, so erhält man weiter:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = v^w\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} + lgu\left(v^w\cdot lgv\cdot\frac{dw}{dx} + w\cdot v^{w-1}\cdot\frac{dv}{dx}\right)$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = y\cdot\left[v^w\left(\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} + lgu\cdot lgv\cdot\frac{dw}{dx} + \frac{w\,.\,lgu}{v}\cdot\frac{dv}{dx}\right)\right]$$

und wenn man den Wert für y aus Gleichung a). substituiert:

1). . . $$\frac{dy}{dx} = u^{(v^w)}\cdot v^w\cdot\left(\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} + lgu\cdot lgv\cdot\frac{dw}{dx} + \frac{w\,.\,lgu}{v}\cdot\frac{dv}{dx}\right)$$

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 73. Man soll den Differentialquotient von:

$$y = (1+\cos x)^{\sin x}$$

bestimmen.

Erkl. 94. Eine goniometrische Formel heisst:

1). . . . . $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

(Siehe Formel 13 in Kleyers Lehrb. der Goniometrie.)

Nach dieser Formel ist:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

oder:

$$\sin^2\alpha = 1^2 - \cos^2\alpha$$

mithin:

2). . . $\sin^2\alpha = (1+\cos\alpha)\,.\,(1-\cos\alpha)$

Auflösung. Beachtet man, dass di gebene Funktion eine Potenz ist, Basis $(1+\cos x)$ und deren Exponent je eine Funktion von x ist, und b dementsprechend den Lehrsatz 20 in wendung, so erhält man zunächst:

$$\frac{dy}{dx} = (1+\cos x)^{\sin x}\cdot lg(1+\cos x)\cdot\frac{d(\sin}{dx}$$

$$\sin x\,.\,(1+\cos x)^{\sin x-1}\cdot\frac{d(1+\cos x)}{dx}$$

Führt man die auf der rechten Seite ser Gleichung noch angedeuteten Diff tiationen nach dem Lehrsatze 10, nach den Lehrsätzen 3 und 11 aus, s hält man:

$$\frac{dy}{dx} = (1+\cos x)^{\sin x}\cdot lg(1+\cos x)\,.\,co$$

$$\sin x\,.\,(1+\cos x)^{\sin x-1}\cdot -\sin x$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = (1+\cos x)^{\sin x}\cdot\left[log(1+\cos x)\cos x - \frac{\sin^2}{1+c}\right.$$

Setzt man noch nach der Erkl. 94:

$$\sin^2 x = (1+\cos x)(1-\cos x)$$

und reduziert, so erhält man schliessli

$$\frac{dy}{dx} = (1+\cos x)^{\sin x}\cdot\left[lg(1+\cos x)\cos x - (1-\cos\right.$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = (1+\cos x)^{\sin x}\cdot\left[\left[lg(1+\cos x)+1\right]\cdot\cos x -\right.$$

Aufgabe 74. Ebenso, von:

$$y = x^x$$

Auflösung. Nach dem Lehrsatz 20 erhält man, wenn man in demselben

$$u = x$$
und
$$v = x$$

setzt:

$$\frac{dy}{dx} = x^x \cdot lg\, x \cdot \frac{dx}{dx} + x \cdot x^{x-1} \cdot \frac{dx}{dx}$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = x^x \cdot lg\, x + x^x$$

mithin:

$$\frac{dy}{dx} = x^x \cdot (1 + lg\, x)$$

(Siehe auch den Zusatz 1 des Lehrsatzes 20.)

Aufgabe 75. Ebenso, von:

$$y = \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^x$$

Auflösung. Man forme zunächst die gegebene Funktion wie folgt um:

$$y = \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^x}$$

$$y = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$

mithin:

a). . . . . $y = (a : x^{-1})^{\frac{x}{2}}$

Bringt man nunmehr den Lehrsatz 20 in Anwendung, so erhält man für den Differentialquotienten dieser Funktion:

$$\frac{dy}{dx} = (a \cdot x^{-1})^{\frac{x}{2}} \cdot lg\, a \cdot x^{-1} \cdot \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{dx} + \frac{x}{2}(a \cdot x^{-1})^{\frac{x}{2}-1} \cdot \frac{d(a \cdot x^{-1})}{dx}$$

oder, wenn man die noch angedeuteten Differentiationen nach den Lehrsätzen 4 und 1 ausführt:

$$\frac{dy}{dx} = (a \cdot x^{-1})^{\frac{x}{2}} \cdot lg\, a \cdot x^{-1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{x}{2}(a \cdot x^{-1})^{\frac{x}{2}-1} \cdot -a \cdot x^{-2}$$

Nach gehöriger Reduktion erhält man hieraus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \cdot lg\frac{a}{x} - \frac{x}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1} \cdot \frac{a}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \cdot lg\frac{a}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{x}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \cdot lg\frac{a}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$

mithin:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \cdot \left(lg\frac{a}{x} - 1\right)$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^{x} \cdot \left(lg\frac{a}{x} - \right.$$

Aufgabe 76. Ebenso, von:

$$y = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{1-x}{x}}$$

Auflösung. Nach dem Lehrsatz 2(hält man:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{1-x}{x}} \cdot lg\frac{1-x}{x} \cdot \frac{d\left(\frac{1-x}{x}\right.}{dx}$$

$$\frac{1-x}{x} \cdot \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{1-x}{x}-x} \cdot \frac{d\left(\frac{1-x}{x}\right)}{dx}$$

Erkl. 95. Nach dem Lehrsatz 6 ist:

$$\frac{d\left(\frac{1-x}{x}\right)}{dx} = \frac{x \cdot d(1-x)}{dx} - (1-x) \cdot \frac{dx}{dx}$$

mithin ist:

$$\frac{d\left(\frac{1-x}{x}\right)}{dx} = \frac{x \cdot -1 - (1-x) \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{-x-1+x}{x^2}$$

oder:

$$= -\frac{1}{x^2}$$

Führt man die noch angedeutete Diff tiation nach dem Lehrsatz 6 aus und gleichzeitig den gemeinschaftlichen F $\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{1-x}{x}}$ vor eine Parenthese, so man nach der Erkl. 95:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{1-x}{x}} \cdot \left[lg\frac{1-x}{x} \cdot -\frac{1}{x^2}\right.$$

$$\left.\frac{1-x}{x} \cdot \left(\frac{1-x}{x}\right)^{-1} \cdot -\frac{1}{x^2}\right]$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{1-x}{x}} \cdot -\frac{1}{x^2} \cdot \left[lg\frac{1-x}{x} + \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1}{1}\right.$$

mithin:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{1-x}{x}} \cdot \left(lg\frac{1-x}{x}\right.$$

Aufgabe 77. Ebenso, von:

$$y = x^{\left(x^x\right)}$$

Auflösung. Setzt man:

$$x^x = v \quad \text{(siehe Erkl. 96)}$$

so geht die gegebene Funktion über i

a). . . . . $y = x^v$

worin also nach vorstehendem:

a_1). . . . . $v = x^x$

ist. Differentiiert man die Funktion a). nach dem Lehrsatz 20, so erhält

$$\frac{dy}{dx} = x^v \cdot lg\,x \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot x^{v-1} \cdot \frac{dx}{dx}$$

Erkl. 96. Potenzen von der in der Aufgabe 77 gegebenen Form werden auch oft in der Form x^{x^x} geschrieben, man beachte hierbei wohl, dass dies $x^{\left(x^x\right)}$ bedeuten soll, und dass $x^{\left(x^x\right)}$ etwas anderes bedeutet als $\left(x^x\right)^x$.

Setzt man an die Stelle von v nach Gleichung a_1). wieder x^x, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = x^{\left(x^x\right)} \cdot lg\, x \cdot \frac{d\,(x^x)}{dx} + x^x \cdot x^{\left(x^x\right)-1} \cdot \frac{dx}{dx}$$

Führt man die auf der rechten Seite durch $\frac{d\,(x^x)}{dx}$ und $\frac{dx}{dx}$ angedeuteten Differentiationen aus, und zwar die erste wiederum nach dem Lehrsatz 20 (die zweite ergibt 1), so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = x^{\left(x^x\right)} \cdot lg\, x \,.\, x^x \,.\, (1 + lg\, x) + x^x \,.\, x^{\left(x^x\right)-1} \,.\, 1$$

Der Wert für $\frac{d\,(x^x)}{dx}$ wurde aus der Auflösung der Aufgabe 74 einfach substituiert.

oder nach gehöriger Reduktion:

$$\frac{dy}{dx} = x^{\left(x^x\right)} \,.\, x^x \,.\, \left[lg\, x \,.\, (1 + lg\, x) + \frac{1}{x}\right]$$

(Siehe auch den Zusatz 3 zum Lehrsatz 20.)

---

ufgabe 78. Ebenso, von:

$$y = \left[arc\,(sin = x^2)\right]^{lg\, x}$$

Auflösung. Nach dem Lehrsatz 20 erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \left[arc\,(sin = x^2)\right]^{lg\, x} \,.\, lg\, arc\,(sin = x^2) \cdot \frac{d\,(lg\, x)}{dx} +$$

$$lg\, x \,.\, \left[arc\,(sin = x^2)\right]^{lg\, x - 1} \cdot \frac{d\left(arc\,(sin = x^2)\right)}{dx}$$

kl. 97. Nach dem Lehrsatz 16 ist:

$$\frac{d\left(arc\,(sin = x^2)\right)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot \frac{d\,(x^2)}{dx}$$

t man die rechts noch angedeutete Differation nach dem Lehrsatz 1 aus, so erman:

$$\frac{d\left(arc\,(sin = x^2)\right)}{dx} = \frac{2\,x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Führt man die noch angedeuteten Differentiationen nach dem Lehrsatz 9, bezw. nach dem Lehrsatz 16 aus, so erhält man (siehe Erkl. 97):

$$\frac{dy}{dx} = \left[arc\,(sin = x^2)\right]^{lg\, x} \,.\, \frac{lg\, arc\,(sin = x^2)}{x} +$$

$$lg\, x \,.\, \left[arc\,(sin = x^2)\right]^{lg\, x - 1} \cdot \frac{2\,x}{\sqrt{1-x^4}}$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \left[arc\,(sin = x^2)\right]^{lg\, x} \cdot \left[\frac{lg\, arc\,(sin = x^2)}{x} + \frac{2\,x \,.\, lg\, x}{\sqrt{1-x^4} \,.\, arc\,(sin = x^2)}\right]$$

---

merkung 12. Analoge ungelöste Aufgaben sind in dem Abschnitt z). enthalten.

---

x). Differentialquotient einer Funktion mehrerer anderer Funktionen derselben unabhängig Variablen.

(Partielle Differentialquotienten.)

Lehrsatz 21. Der Differentialquotient der Funktion:

$$y = f(u, v)$$

in welcher u und v solche Funktionen derselben unabhängig Variablen x sind, in Zeichen:

$$u = \varphi(x)$$
$$v = \psi(x)$$

die auf irgend eine Weise arithmetisch verbunden die Funktion y ausmachen, ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

wenn $\frac{\partial y}{\partial u}$ einen Differentialquotienten bedeutet, welchen man erhält, wenn man in jener Funktion $f(u, v)$ u als unabhängig Variable und v als Konstante betrachtet, und wenn $\frac{\partial y}{\partial v}$ einen Differentialquotienten bedeutet, welchen man erhält, wenn man in jener Funktion $f(u, v)$ v als unabhängig Variable und u als Konstante betrachtet.

Erkl. 98. Hat man die Funktion:

a). . . . . $z = f(u, v + \Delta v)$

in welcher $v + \Delta v$ eine Konstante und u die unabhängig Variable bedeutet, so geht bei einer Aenderung von u um Δu diese Funktion über in:

b). . . $z + \Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v)$

Subtrahiert man hiervon die ursprüngliche Funktion a)., so erhält man für die Aenderung z:

c). $\Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)$

und für den Differenzenquotienten:

d). $$\frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u}$$

Denkt man sich Δu, somit auch Δz stetig kleiner, unendlich klein werdend, was auch durch:

e). $$lim \frac{\Delta z}{\Delta u} = lim \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u}$$

angedeutet wird, so erhält man den Differentialquotienten jener Funktion z nach u:

Vorauss. $y = f(u, v)$
$u = \varphi(x)$
$v = \psi(x)$

Behaupt.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Beweis. Aendert sich in der gegebe Funktion:

a). . . . . $y = f(u, v)$

in welcher u und v solche Funktionen Independenten (unabhängig Veränderliche sind, die auf irgend eine Weise arithmeti verbunden sind (s. Erkl. 105) die Variab um Δx, und ändert sich dementsprech

u um Δu
v um Δv
y um Δy

so geht jene Funktion über in:

b). . . $y + \Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v)$

Subtrahiert man hiervon die gegeb Funktion a)., so erhält man für die Aen rung von y:

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)$$

Addiert man auf der rechten Seite di Gleichung:

und $$\begin{matrix} -f(u, v + \Delta v) \\ +f(u, v + \Delta v) \end{matrix}$$

wodurch an dem Wert der rechten S jener Gleichung nichts geändert wird, erhält man:

c). $\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)$
$f(u, v + \Delta v) - f(u, v)$

Für den Differenzenquotienten hat sonach, wenn man diese Gleichung du Δx dividiert:

. . $\frac{dz}{du}$ oder $\frac{df(u, v+\Delta v)}{du} =$

im $\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u}$

auch:

. . $\frac{dz}{du}$ oder $\frac{df(u, v+\Delta v)}{du} =$

$\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u}$

n Δu unendlich klein ist.

d). $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta x} +$

$\frac{f(u, v+\Delta v) - f(u, v)}{\Delta x}$

oder:

e). $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} +$

$\frac{f(u, v+\Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$

Denkt man sich nun Δx, somit auch Δu, Δv und Δy stetig kleiner, unendlich klein werdend, was man auch symbolisch durch:

f). $lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} +$

$lim \frac{f(u, v+\Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$

andeutet, und berücksichtigt man, dass alsdann

a). der Quotient:

$$\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u}$$

auf der rechten Seite der Gleichung e). für ein unendlich kleines Δv, bezw. dass der erste Quotient:

$$lim \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u}$$

auf der rechten Seite der Gleichung f). den Differentialquotienten der Funktion $f(u, v+\Delta v)$ darstellt, wenn in dieser Funktion nur u als eine unabhängig Variable, $v + \Delta v$ aber eine Konstante bedeutet (siehe Erkl. 98), und dass man für diesen Differentialquotienten der Funktion $f(u, v+\Delta v)$, in welcher, nochmals erwähnt, nur u als variabel, $v + \Delta v$ aber als konstant betrachtet werden muss, nach der Erkl. 99 auch den Differentialquotienten der Funktion $f(u, v)$, in welcher wiederum nur u als variabel, v aber als konstant betrachtet werden muss, setzen kann, dass dieser Differentialquotient nach der Erkl. 100 partieller Differentialquotient der Funktion $y = f(u, v)$ nach der unabhängig Variablen u (v als Konstante gedacht) genannt und durch $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$ bezw. durch $\frac{\partial y}{\partial u}$ bezeichnet wird; berücksichtigt man ferner, dass alsdann

b). der Quotient:

$$\frac{f(u, v+\Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}$$

auf der rechten Seite der Gleichung e). für ein unendlich kleines Δv, bezw. dass der Quotient:

rkl. 99. Ist in der Funktion:

$$f(u, v+\Delta v)$$

elcher nur u die unabhängig Variable $v+\Delta v$ aber eine Konstante ist, Δv ndlich klein gegen die endliche Grösse ie in nebenstehendem Beweis I vorausgewird), so kann man dies Δv, ohne einen nderen Fehler zu begehen, weglassen, indurch das Hinzufügen einer unendn kleinen Grösse zu einer endlichen se letztere um einen angebbaren Wert vergrössert werden kann, denn sonst wäre Δv nicht unendlich klein gegen v.

kl. 100. Den Differentialquotienten einer tion zweier oder mehrerer Veränderlichen, den Differentialquotienten der Funktion:

. . . . $y = f(u, v)$

her so bestimmt wird, indem von den n Veränderlichen u und v die eine als hängig Veränderliche, die andere onstante angenommen wird, wird parer Differentialquotient der betreffenunktion nach der als unabhängig annmenen Veränderlichen genannt.

r Unterscheidung eines solchen partielifferentialquotienten von dem sog. ganzen totalen Differentialquotienten jener Funk-

a)., welcher durch $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet wird,

e der deutsche Mathematiker *Jacobi* (1804 351) statt des Buchstabens d den Buchn ∂ (ein rundes ∂) ein und bezeichnete z. B., in jener Funktion a). u als unabhängig derliche und v als Konstante angenommen den partiellen Differentialquotienten der tion y nach der unabhängig Veränder- u durch $\frac{\partial y}{\partial u}$ bezw. durch $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$.

Wird in jener Funktion a). hingegen v als unabhängig Variable und u als Konstante betrachtet, so wird der partielle Differentialquotient jener Funktion y nach der unabhängig Variablen v, bezeichnet durch $\frac{\partial y}{\partial v}$ bezw. durch $\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$.

Erkl. 101. Hat man die Funktion:

a). . . . . $z = f(u, v)$

in welcher u eine Konstante und v die unabhängig Variable bedeutet, so geht bei einer Aenderung von v um Δv diese Funktion über in:

b). . . . $z + \Delta z = f(u, v + \Delta v)$

Subtrahiert man hiervon die ursprüngliche Funktion a)., so erhält man für die Aenderung z:

c). . . $\Delta z = f(u, v + \Delta v) - f(u, v)$

und für den Differenzenquotienten:

d). . . $\frac{\Delta z}{\Delta v} = \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}$

Denkt man sich Δv, somit auch Δz stetig kleiner, unendlich klein werdend, was auch durch:

e). $lim \frac{\Delta z}{\Delta v} = lim \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}$

angedeutet wird, so erhält man den Differentialquotienten jener Funktion z nach v:

1). $\frac{dz}{dv}$ oder $\frac{df(u,v)}{dv} = lim \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}$

oder auch:

1a). $\frac{dz}{dv}$ oder $\frac{df(u,v)}{dv} = \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}$

wenn Δv unendlich klein ist.

Zusatz 1. Den Lehrsatz 21 kann man wie folgt erweitern:

Hat man die Funktion:

a). . . . . $y = f(u, v, w)$

und ist:

$$a_1). \quad \begin{cases} u = \varphi(x) \\ v = \psi(x) \\ w = \varkappa(x) \end{cases}$$

so ist der Differentialquotient jener Funktion:

1). $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}$

Den Beweis der Richtigkeit dieser Aussage kann man in analoger Weise führen wie den Beweis des Lehrsatzes 21:

„Aendert sich x um Δx, und ändert sich dementsprechend u um Δu, v um Δv, w um Δw, y um Δy, so geht jene Funktion a). über in:

$$lim \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}$$

auf der rechten Seite der Gleichung f). Differentialquotienten der Funktion $f($ darstellt, wenn in dieser Funktion v eine unabhängig Variable, u e eine Konstante bedeutet (siehe Erkl. dass dieser Differentialquotient nach Erkl. 100 partieller Differentialquo der Funktion $y = f(u, v)$ nach der abhängig Variablen v (u als Konst gedacht) genannt und durch $\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$ b durch $\frac{\partial y}{\partial v}$ bezeichnet wird, und berück tigt man, dass

c). für unendlich kleine Δx, Δv, und Δy:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$; $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$; $\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{d}{d}$

ist, so erhält man für den totalen D rentialquotienten der gegebenen Funk

$$y = f(u, v)$$

in welcher u und v Funktionen der u hängig Variablen x sind:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

was zu beweisen war.

$$y + \Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w)$$

Nach Subtraktion der ursprünglichen Funk-
n erhält man für die Aenderung von y:

$$y = f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v, w)$$

Addiert man auf der rechten Seite dieser
ichung:

$$- f(u, v + \Delta v, w + \Delta w)$$
$$+ f(u, v + \Delta v, w + \Delta w)$$

ner:
$$- f(u, v, w + \Delta w)$$

auch:
$$+ f(u, v, w + \Delta w)$$

durch an dem Wert der rechten Seite jener
ichung nichts geändert wird, dividiert dann
somit erhaltene Gleichung zur Bildung des
ferenzenquotienten mit Δx und zieht je zwei
sprechende Glieder zusammen, so erhält man:

$$\frac{y}{} = \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v+\Delta v, w+\Delta w)}{\Delta x} +$$

r:
$$\frac{f(u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v, w+\Delta w)}{\Delta x} + \frac{f(u, v, w+\Delta w) - f(u, v, w)}{\Delta x}$$

$$\frac{y}{} = \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v+\Delta v, w+\Delta w)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} +$$

$$\frac{f(u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v, w+\Delta w)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{f(u, v, w+\Delta w) - f(u, v, w)}{\Delta w} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

Denkt man sich nun Δx, somit auch Δu,
, Δw und Δy stetig kleiner, unendlich
ein werdend, und berücksichtigt man, dass
dann:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d y}{d x}$$

$$\frac{+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v+\Delta v, w+\Delta w)}{\Delta u} = \frac{\partial y}{\partial u}$$

ılich gleich dem Differentialquotienten der
ıktion:

$$y = f(u, v + \Delta v, w + \Delta w)$$

ın $v + \Delta v$, $w + \Delta w$ konstant und nur u
ıbhängig veränderlich ist (hierzu gelangt
ı in analoger Weise, wie in der Erkl. 98 an-
eutet wurde), oder gleich dem Differential-
tienten der Funktion:

$$y = f(u, v, w)$$

[da die unendlich kleinen Δv und Δw gegen die endlichen Grössen v und w weggelassen werden können, siehe Erkl. 99]

ın v und w konstant und wiederum nur u
ıbhängig veränderlich ist, also gleich dem
:tiellen Differentialquotienten der Funktion
$= f(u, v, w)$ genommen nach der unabhän-
Veränderlichen u ist (siehe Erkl. 100);
s ferner:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{d u}{d x}$$

$$\frac{, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v, w+\Delta w)}{\Delta v} = \frac{\partial y}{\partial v}$$

nämlich (analog wie vorhin) gleich dem partiellen Differentialquotienten der Funktion $y = f(u, v, w)$ genommen nach der unabhängig Variablen v ist (siehe die Erkl. 98—100); dass ferner:

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

und

$$\frac{f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w)}{\Delta w} = \frac{\partial y}{\partial w}$$

nämlich (analog wie vorhin) gleich dem partiellen Differentialquotienten der Funktion $y = f(u, v, w)$ genommen nach der unabhängig Variablen w ist (siehe die Erkl. 98—100) und dass schliesslich:

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{dw}{dx}$$

ist, so erhält man:

1). $$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}$$

Hat man die Funktion:

b). . . . $y = f(u, v, w, z, \ldots)$

und ist:

b_1). . . . . $\begin{cases} u = \varphi(x) \\ v = \psi(x) \\ w = \varkappa(x) \\ z = \lambda(x) \end{cases}$

so ist der Differentialquotient jener Funktion:

2). $$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Den Beweis kann man in analoger Weise führen, wie im vorigen angedeutet ist.

Erkl. 102. Aus dem Beweis des Lehrsatzes 21 kann man für die Differentiation einer Funktion von der Form:

a). . . . . $y = f(u, v)$

in welcher

$$u = \varphi(x)$$
$$v = \psi(x)$$

ist, folgende Regel ableiten:

„Sind u und v zwei solche Funktionen derselben Independenten x, welche auf irgend eine Weise (siehe Erkl. 105) zu einer neuen Funktion verbunden sind, so findet man den (totalen) Differentialquotienten dieser neuen Funktion (genommen nach x), wenn man diese Funktion einmal partiell nach u, das anderemal partiell nach v differentiiert [d. h. einmal so differentiiert als ob u die unabhängig Variable und v die Konstante wäre, das anderemal so differentiiert als ob v die unabhängig Variable und u die Konstante wäre], alsdann die erhaltenen partiellen Differentialquotienten bezw. mit den nach x genommenen Differentialquotien-

der Funktionen u und v multipliziert und somit erhaltenen Produkte addiert."

rkl. 103. Der Differentialquotient:

$$\cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Funktion:

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad y = f(u, v)$$

elcher:

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \begin{cases} u = \varphi(x) \\ v = \psi(x) \end{cases}$$

wird auch oft in der Form:

$$\cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

auch in der Form:

$$\cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

hrieben (siehe Erkl. 104).

ener Differentialquotient wird auch in Rück- t der durch *Lagrange* angegebenen Bezeich- sweisen der Differentialquotienten als ab- eitete (derivierte) Funktionen, wenn:

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$$

$$\frac{dv}{dx} = \psi'(x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = f'_u(u, v)$$

$$\cdot \frac{\partial y}{\partial v} = f'_v(u, v)$$

Die Indices u und v deuten an, dass bei Ableitung der Funktion f' lediglich u bezw. v als unabhängig variabel zu betrachten ist.

tzt wird, in der Form geschrieben:

$$\cdot \frac{dy}{dx} = f'_u(u, v) \cdot \varphi'(x) + f'_v(u, v) \cdot \psi'(x)$$

ch *Euler* wird jener Differentialquotient in Form geschrieben:

$$\cdot \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right) \cdot \frac{du}{dx} + \left(\frac{dy}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{dx}$$

(Siehe Erkl. 104.)

r das Differential dy erhält man aus Glei- g 1).:

$$\cdot \cdot \, dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv$$

: man auch oft:

$$\cdot \cdot \, dy = \partial_u y + \partial_v y$$

auch:

$$\cdot \cdot \, dy = \partial_u f(u, v) + \partial_v f(u, v)$$

ibt.

kl. 104. Die hie und da übliche Schreib- :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$a_1) \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

sollte ganz vermieden werden, indem dies sehr leicht zu Irrtümern führen kann, denn hiernach würde die Differentialgleichung $\alpha)$. in Erkl. 103 übergehen in:

$$\alpha_1) \ldots dy = \frac{dy}{du} \cdot du + \frac{dy}{dv} \cdot dv$$

In dem dy links bedeutet y die gegebene Funktion:

$$y = f(u, v)$$

unter der Voraussetzung, dass

$$u = \varphi(x)$$
$$v = \psi(x)$$

ist; in dem dy des ersten Quotienten rechts bedeutet y die Funktion $y = f(u, v)$ unter der Voraussetzung, dass u eine unabhängig Veränderliche und v eine Konstante ist; in dem dy des zweiten Quotienten rechts bedeutet schliesslich y die Funktion $y = f(u, v)$ unter der Voraussetzung, dass v eine unabhängig Veränderliche und u eine Konstante ist. Jedem jener dy wäre sonach eine andere Bedeutung beizulegen.

Erkl. 105. Mittels des Lehrsatzes 21 und dessen Zusatz 1 kann man die Differentialquotienten einer jeden zusammengesetzten Funktion — d. i. eine arithmetische Verbindung mehrerer anderer Funktionen einer und derselben unabhängigen Variablen, wie z. B. die Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{c} u + v - w \\ u \,.\, v \\ u \,.\, v \,.\, w \\ \dfrac{u}{v} \\ u^v \end{array}\right\} \text{ in welchen z B. } \begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ v = \psi(x) \\ w = \varkappa(x) \end{array} \text{ ist,}$$

herleiten; jener Lehrsatz mit seiner in Zusatz 1 ausgesprochenen Erweiterung enthält somit eine allgemeine Regel, nach welcher man die Differentialquotienten zusammengesetzter Funktionen, wie z. B. die vorstehenden, bestimmen kann (siehe die gelösten Aufgaben 79—84).

Die früher aufgestellten Lehrsätze 2, 5, 6 und 20 können somit auch als Folgerungen jenes Lehrsatzes 21 betrachtet werden, da sich dieselben aus letzterem ableiten lassen.

Hat man z. B. die Funktion:

$$a) \ldots \ldots y = u \pm v$$

in welcher:

$$a_1) \ldots \ldots \left\{\begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ v = \psi(x) \end{array}\right.$$

ist, so erhält man nach jenem Lehrsatz 21 für den Differentialquotienten dieser Funktion:

$$1) \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

)a nun der partielle Differentialquotient Funktion:

$$y = u \pm v$$

h der als unabhängig angenommenen Va-
)len u, bezeichnet durch $\frac{\partial y}{\partial u}$, bestimmt wird,
em man in dieser Funktion nur u als un-
ıängig Variable, v aber als Konstante
rachtet, da also nach dem Lehrsatz 3:

). . . $\frac{\partial y}{\partial u}$ oder $\frac{\partial (u \pm v)}{\partial u} = 1$ (siehe Erkl. 14)

gleichen, wenn in der Funktion $u \pm v$ die
sse u als Konstante, v als die unabhän-
Veränderliche betrachtet wird:

). . . $\frac{\partial y}{\partial v}$ oder $\frac{\partial (u \pm v)}{\partial v} = \pm 1$

so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \frac{du}{dx} + \pm 1 \cdot \frac{dv}{dx}$$

r:

. . . $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

(vergleiche hiermit den Lehrsatz 2).

Iat man z. B. die Funktion:

. . . . . $y = u \,.\, v$

welcher:

. . . . . $\begin{cases} u = \varphi(x) \\ v = \psi(x) \end{cases}$

so erhält man nach jenem Lehrsatz 21 für
Differentialquotienten dieser Funktion:

. . $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$

)a nun der partielle Differentialquotient Funktion:

$$y = u \,.\, v$$

h der als unabhängig angenommenen Va-
)len u, bezeichnet durch $\frac{\partial y}{\partial u}$, bestimmt wird,
em man in dieser Funktion nur u als un-
hängig Variable, v aber als Konstante zu
rachten hat, da also nach Lehrsatz 4:

). . . . $\frac{\partial y}{\partial u}$ oder $\frac{\partial (u \,.\, v)}{\partial u} = v$

gleichen:

). . . . $\frac{\partial y}{\partial v}$ oder $\frac{\partial (u \,.\, v)}{\partial v} = u$

so erhält man:

. . . . . $\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{du}$

(vergleiche hiermit den Lehrsatz 5).

Hat man z. B. die Funktion:

c). . . . . $y = \frac{u}{v}$

in welcher:

c_1). . . . . $\begin{cases} u = \varphi(x) \\ v = \psi(x) \end{cases}$

ist, so erhält man nach jenem Lehrsatz 21 für den Differentialquotienten dieser Funktion:

3). . . $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$

Da nun der partielle Differentialquotient der Funktion:

$$y = \frac{u}{v}$$

nach der als unabhängig angenommenen Variablen u, bezeichnet durch $\frac{\partial y}{\partial u}$, bestimmt wird, indem man in dieser Funktion nur u als unabhängig Variable, v aber als Konstante zu betrachten hat, da also nach Lehrsatz 4:

ε). . . $\frac{\partial y}{\partial u}$ oder $\frac{\partial \left(\frac{u}{v}\right)}{\partial u} = \frac{1}{v}$

desgleichen nach Lehrsatz 4 und 1 und in Rücksicht darauf, dass bei Bestimmung von $\frac{\partial y}{\partial v}$, v die unabhängig Variable und u die Konstante ist:

ζ). . . $\frac{\partial y}{\partial v}$ oder $\frac{\partial \left(\frac{u}{v}\right)}{\partial v} = \frac{\partial \left(u \,.\, v^{-1}\right)}{\partial v} = u \,.\, -1 \,.\, v^{-1} = -\frac{u}{v^2}$

ist, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v} \cdot \frac{du}{dx} + -\frac{u}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx}$$

oder:

3a). . . $\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$

(vergleiche hiermit den Lehrsatz 6).

Hat man z. B. die Funktion:

d). . . . . $y = u^v$

in welcher:

d_1). . . . . $\begin{cases} u = \varphi(x) \\ v = \psi(x) \end{cases}$

ist, so erhält man nach jenem Lehrsatz 21 für den Differentialquotient dieser Funktion:

4). . . $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$

a nun der partielle Differentialquotient
Funktion:

$$y = u^v$$

der als unabhängig angenommenen Va-
len u, bezeichnet durch $\frac{\partial y}{\partial u}$, bestimmt wird,
m man in dieser Funktion nur u als un-
ängig Variable, v aber als Konstante
etrachten hat, da also nach dem Lehrsatz 1:

$$\ldots \frac{\partial y}{\partial u} \text{ oder } \frac{\partial (u^v)}{\partial v} = v \,.\, u^{v-1}$$

leichen nach dem Lehrsatz 8, wenn in u^v
v als unabhängig Variable, aber u als
tante betrachtet wird:

$$\ldots \frac{\partial y}{\partial v} \text{ oder } \frac{\partial (u^v)}{\partial v} = u^v \,.\, lg\, u$$

so erhält man:

$$\ldots \frac{dy}{dx} = v \,.\, u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \,.\, lg\, u \cdot \frac{dv}{dx}$$

(vergleiche hiermit den Lehrsatz 20).

---

at man z. B. ferner die Funktion:

$$\ldots\ldots y = u$$

elcher:

$$\ldots\ldots u = \varphi(x)$$

in welcher eine zweite Funktion der un-
ängig Variablen x fehlt, so erhält man
dem Lehrsatz 21 für den Differential-
ienten dieser Funktion:

$$\ldots \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + 0$$

m der zweite Teil $\frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$ für diesen spe-
en Fall wegfällt oder = Null ist; berück-
tigt man ferner, dass aus demselben Grunde

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{dy}{du}$$

so erhält man:

$$\ldots \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

(vergleiche hiermit den Lehrsatz 7).

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 79. Man soll den Differentialquotienten von:

$$y = \cos 4x \,.\, \sin 3x$$

bestimmen, dabei den Lehrsatz 21 in Anwendung bringen.

Auflösung. Setzt man in der gegeb Funktion y für:

$$4x = u$$
$$3x = v$$

so erhält man nach dem Lehrsatz 21 den gesuchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial(\cos u \,.\, \sin v)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial(\cos u \,.\, \sin v)}{\partial v}$$

Führt man die angedeuteten partie Differentiationen aus, indem man be sichtigt, dass in:

$$\frac{\partial(\cos u \,.\, \sin v)}{\partial u}$$

u als eine unabhängig Veränderliche v als eine Konstante, dass hingegen

$$\frac{\partial(\cos u \,.\, \sin v)}{\partial v}$$

v als eine unabhängig Veränderliche u als Konstante betrachtet werden n so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u \,.\, \sin v \cdot \frac{du}{dx} + \cos u \,.\, \cos v$$

Setzt man nunmehr wieder $u = 4x$ $v = 3x$ und führt auch noch die Diffe tiationen von $4x$ und $3x$ nach x aus erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 4x \,.\, \sin 3x \,.\, 4 + \cos 4x \,.\, \cos 3$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \,.\, \cos 3x \,.\, \cos 4x - 4 \,.\, \sin 3x \,.\, \sin$$

Man vergleiche mit diesem Resultat Resultat der gelösten Aufgabe 44.

Aufgabe 80. Ebenso, von:

$$y = \sin x - e^x$$

Auflösung. Setzt man in der gegeb Funktion y für:

$$\sin x = u$$
$$e^x = v$$

so erhält man nach dem Lehrsatz 21 den gesuchten Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial(u - v)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial(u - v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Führt man die partiellen Differentiationen aus, indem man berücksichtigt, dass in:

$$\frac{\partial (u - v)}{\partial u}$$

u als eine unabhängig Veränderliche und v als eine Konstante, dass hingegen in:

$$\frac{\partial (u - v)}{\partial v}$$

u als eine Konstante und v als eine unabhängig Veränderliche betrachtet werden muss, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \frac{du}{dx} + -1 \cdot \frac{dv}{dx}$$

oder für u und v die Werte gesetzt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx} - \frac{d(e^x)}{dx}$$

und nach den Lehrsätzen 10 und 8 differentiiert:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - e^x$$

---

fgabe 81. Ebenso, von:

$a^x + lg\,(\sin x) + arc\,(tg = a^{2x}) + \sin^4 x$

Auflösung. Setzt man in der gegebenen Funktion y für:

$$a^x = u$$

und

$$\sin x = v$$

so geht die gegebene Funktion über in:

a). . . $y = u + lg\,v + arc\,(tg = u^2) + v^4$

Für deren Differentialquotienten hat man nach dem Lehrsatz 21:

1). . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$

Führt man zunächst die angedeuteten partiellen Differentiationen aus, indem man berücksichtigt, dass $\frac{\partial y}{\partial u}$ den partiellen Differentialquotienten der unter a). angeführten Funktion y nach der unabhängig Veränderlichen u (v als eine Konstante betrachtet) bedeutet, dass somit nach den Lehrsätzen 2, 3 und 18:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 1 + 0 + \frac{2u}{1 + u^4} + 0$$

oder: $$= 1 + \frac{2u}{1 + u^4}$$

ist (siehe Erkl. 106); dass ferner $\frac{\partial y}{\partial v}$ den partiellen Differentialquotienten der unter a). angeführten Funktion y nach der als unabhängig anzunehmenden Veränderlichen v

kl. 106. Nach dem Lehrsatz 18 erhält für den Differentialquotienten von $z = g = u^2)$:

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{1 + (u^2)^2} \cdot \frac{d(u^2)}{du}$$

n:

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{1 + u^4} \cdot 2u$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{2u}{1 + u^4}$$

Erkl. 107. Bestimmt man den Differentialquotienten der gegebenen Funktion:

$$y = a^x + lg\,(sin\,x) + arc\,(tg = a^{2x}) + sin^{4x}$$

direkt nach den Lehrsätzen 2, 8, 7, 9, 18 und 10, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = a^x\,lg\,a + \frac{1}{sin\,x}\cdot\frac{d\,(sin\,x)}{dx} + \frac{1}{1+(a^{2x})^2}\cdot\frac{d\,(a^{2x})}{dx} + 4\,sin^3 x\cdot\frac{d\,(sin\,x)}{dx}$$

und wenn man weiter nach den Lehrsätzen 10, 7 und 8 differentiiert:

$$\frac{dy}{dx} = a^{\prime x}\,lg\,a + \frac{1}{sin\,x}\cdot cos\,x + \frac{1}{1+a^{4x}}\cdot a^{2x}\cdot lg\,a\cdot\frac{d\,(2\,x)}{dx} + 4\,sin^3 x\,.\,cos\,x$$

und nunmehr noch nach dem Lehrsatz 3 differentiiert:

$$\frac{dy}{dx} = a^x\,lg\,a + \frac{cos\,x}{sin\,x} + \frac{1}{1+a^{4x}}\cdot a^{2x}\,.\,lg\,a\,.\,2 + 4\,sin^3 x\,.\,cos\,x$$

Reduziert und geordnet erhält man hiernach:

$$\frac{dy}{dx} = a^x\,lg\,a + \frac{2\,a^{2x}}{1+a^{4x}}\cdot lg\,a + ctg\,x + 4\,sin^3 x\,.\,cos\,x$$

nämlich denselben Differentialquotienten wie in nebenstehender Auflösung.

(u als eine Konstante betrachtet) bede
dass somit nach den Lehrsätzen 2, 3, 9 u

$$\frac{\partial y}{\partial v} = 0 + \frac{1}{v} + 0 + 4v^3$$

$$\text{oder:} = \frac{1}{v} + 4v^3$$

ist, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \left(1+\frac{2u}{1+u^4}\right)\cdot\frac{du}{dx} + \left(\frac{1}{v}+4v^3\right)$$

Setzt man nunmehr wieder:

$$\text{und} \quad \begin{aligned} u &= a^x \\ v &= sin\,x \end{aligned}$$

so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \left(1+\frac{2\,a^x}{1+(a^x)^4}\right)\cdot\frac{d\,(a^x)}{dx} + \left(\frac{1}{sin\,x}+4\,(sin\,x)^3\right)\cdot\frac{d\,(sin\,x)}{dx}$$

Führt man die hier noch angedeut
Differentiationen von a^x und $sin\,x$ na
mittels Anwendung der Lehrsätze 8 un
aus und reduziert gleichzeitig, so e
man:

$$\frac{dy}{dx} = \left(1+\frac{2\,a^x}{1+a^{4x}}\right)\cdot a^x\cdot lg\,a + \left(\frac{1}{sin\,x}+4\,.\,sin^3 x\right)\,.\,cos\,x$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = a^x\,.\,lg\,a + \frac{2\,a^{2x}}{1+a^{4x}}\,lg\,a + ctg\,x - 4\,sin^3 x\,.\,cos\,x$$

(Siehe Erkl. 107.)

Aufgabe 82. Ebenso, von:

$$y = sin\,e^x + \sqrt{tg\,x} + e^{-2x}\,.\,tg\,x + e^{2x}$$

Auflösung. Setzt man in der gegeb
Funktion y für:

$$\text{und} \quad \begin{aligned} e^x &= u \\ tg\,x &= v \end{aligned}$$

so geht dieselbe über in:

a). . . . $y = sin\,u + v^{\frac{1}{2}} + u^{-2}\,.\,v + u^2$

Für den Differentialquotienten dieser Fu
tion hat man nach dem Lehrsatz 21:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Da nun:

α). $\frac{\partial y}{\partial u} = cos\,u + 0 + -2\,u^{-3}\,.\,v + 2u$

oder: $= cos\,u - 2u^{-3}\,.\,v + 2u$

Ueber

Tchebychefsche Annäherungsmethoden.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen

vorgelegt von

Paul Kirchberger
aus Weilburg a./Lahn.

Göttingen 1902.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei.
(W. Fr. Kaestner).

Referent: Herr Professor Hilbert.

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Juli 1902.

Meinen lieben Eltern.

Einleitung.

Mit dem Begriff der Funktion ist das Postulat der numerischen Berechnung der Funktionswerte für irgendwelche Werte der unabhängigen Variabeln gegeben. Da aber die vier elementaren Spezies der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, oder streng genommen nur die ersten drei derselben, die einzigen numerisch ausführbaren Rechnungsarten, alle andern aber nur insoweit durchführbar sind, als sie sich auf diese zurückführen lassen, so folgt hieraus, dass wir sämtliche Funktionen nur insoweit numerisch beherrschen, als sie sich durch rationale Funktionen ersetzen, d. h. angenähert darstellen lassen. Hieraus erhellt die grosse Bedeutung der Annäherungsprobleme für die gesamte Mathematik und die ausgezeichnete Stellung, die die Probleme der Annäherung durch rationale oder ganze rationale Funktionen einnehmen. In der That setzt, wenigstens für die numerische Berechnung, jede Annäherung durch andere, z. B. trigonometrische Funktionen, die annäherungsweise Ersetzbarkeit dieser Funktionen durch rationale voraus.

Die sämtlichen Probleme der Annäherung können wir von verschiedenem Gesichtspunkt aus einteilen. Die verschiedene Natur der anzunähernden Funktion, die entweder stetig sein, oder auch aus diskreten Wertepaaren bestehen kann, lässt die eigentlichen Annäherungsprobleme und die Interpolationsprobleme unterscheiden. Ferner können wir einteilen nach der Art der annähernden Funktion, die ein Polynom, eine rationale oder eine transcendente Funktion sein kann. Vor allem aber können wir nach der Natur der Annäherung selber, d. h. nach dem Gesichtspunkt, von dem aus die gesuchte Funktion als die am besten annähernde betrachtet werden soll, verschiedene Gruppen von Problemen unterscheiden. Es kann ein bestimmter Punkt bevorzugt und hier z. B. in der Uebereinstimmung möglichst vieler Ableitungen das

Kriterium der besten Annäherung gesehen werden, wie dies bei den abgebrochenen Potenzreihen und Kettenbrüchen der Fall ist. Es kann aber auch ein ganzes Intervall gleichberechtigt erscheinen. Dann können entweder alle gemachten Fehler gleichmässig berücksichtigt werden, indem verlangt wird, dass die Summe ihrer absoluten Beträge, die Summe ihrer Quadrate u. s. w. möglichst klein sei. Dies führt, wenn die anzunähernde Funktion stetig ist, auf ein Problem der Variationsrechnung. Oder aber es kann gefordert werden, dass der grösste Fehler, der bei der Ersetzung der anzunähernden Funktion durch die annähernde begangen wird, möglichst klein sei.

Dies letzte Kriterium wurde zuerst von Poncelet aufgestellt und von Tchebychef systematisch ausgearbeitet.

Vergleichen wir diese Methode mit der gewöhnlichen, nach der Potenzreihen nach einer endlichen Anzahl Glieder abgebrochen werden, so leuchtet sofort ein Vorzug der Tchebychefschen Methode ein: Jede Annäherung hat nur Sinn in einem endlichen Intervall, und in einem solchen erfüllen die abgebrochenen Potenzreihen keine Minimalbedingung. Die Tchebychefsche Methode hat dagegen den Nachteil, dass bei ihr der Grad der annähernden Funktion fest vorgeschrieben sein muss, es also nicht, wie bei den Potenzreihen, möglich ist, durch Erhöhung des Grades mit Benutzung des vorangegangenen Resultates eine Besserung der Annäherung zu erzielen.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, zunächst die Tchebychefschen Resultate darzustellen; hierbei werden einige Fragen zu erledigen sein, die Tchebychef bei der Abfassung seiner Arbeiten, die um etwa 50 Jahre zurückliegt, noch fernliegen mussten, wie namentlich die Frage nach der Existenz der annähernden Funktion und der analytischen Natur ihrer Koefficienten. Sodann wird prinzipiell nicht nur mit Tchebychef die Zahl, sondern auch das Vorzeichen der Fehler zu berücksichtigen sein. Schliesslich soll die Theorie auch auf Funktionen zweier Variabeln übertragen werden.

Kapitel I. Allgemeine Theorie bei einer reellen Veränderlichen.

§ 1. Definition.

Es sei $\varphi(x)$ die gegebene, angenähert darzustellende Funktion der reellen Variabeln x. Ferner sei ein Intervall gegeben, als

das wir in der Regel $-1 \cdots +1$ annehmen wollen, und n sei der gegebene Grad der gesuchten ganzen rationalen Funktion. Ist

$$f_n(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$$

irgend eine ganze rationale Funktion $n$ten Grades, so hat die Differenz

$$f_n(x) - \varphi(x),$$

absolut genommen im gegebenen Intervall ein Maximum. Dies Maximum sei mit L bezeichnet und Abweichung genannt. Wir suchen diejenige Funktion $f_n(x)$, für die L ein Minimum wird. Sie heisse die „Annäherungsfunktion" von $\varphi(x)$ im Intervall $-1 \cdots +1$.

§ 2. Existenzbeweis.

L ist eine Funktion der Parameter $p_0, p_1 \cdots p_n$

$$L = L(p_0, p_1 \ldots p_n),$$

und es handelt sich um das Minimum dieser Funktion. Nach dem Weierstrassschen Fundamentalsatz hat eine stetige Funktion im endlichen Bereich ein Minimum. Wir wollen daher nachweisen, dass wir uns auf ein endliches Gebiet beschränken können, und zu diesem Zweck beweisen wir folgenden

Algebraischen Hilfssatz: Es sei für eine ganze rationale Funktion der Grad n und ein endliches Intervall der reellen Variabeln vorgeschrieben. Nach Annahme einer endlichen, aber beliebig grossen Zahl A lassen sich den $(n+1)$ Koefficienten unserer Funktion Intervalle zuordnen, derart dass, wenn auch nur ein Koefficient aus seinem Intervall heraustrit, ohne dass über das Verhalten der übrigen Koefficienten etwas bekannt zu sein braucht, die Funktion an mindestens einer Stelle des Intervalls einen Wert annimmt, der dem absoluten Betrage nach grösser ist als A.

Denkt man sich jede ganze rationale Funktion $n$ten Grades als Punkt eines $(n+1)$ dimensionalen Raumes dargestellt, und sei M der grösste Wert, den eine Funktion im vorgeschriebenen Intervall annimmt, so lautet unser Satz:

Ausserhalb eines $(n+1)$ dimensionalen Prismas ist M dem absoluten Betrage nach überall grösser als A. Dies Prisma kann nur von dem Intervall, dem Grad und von A abhängen.

Die Funktion sei

$$p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0 ,$$

das Intervall

$$a - h \cdots a + h.$$

Wir transformieren

$$\bar{x} = \frac{(x-a)\,(2n+2)}{h},$$

wodurch

$$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{p}_n \bar{x}^n + \bar{p}_{n-1} \bar{x}^{n-1} + \cdots + \bar{p}_0 = f(x).$$

Die p sind einfache Funktionen der $\bar{p}$, und es lassen sich die den p zugehörigen Intervalle leicht berechnen, wenn die der $\bar{p}$ bekannt sind. Das Intervall für $\bar{x}$ ist $-(2n+2) \cdots + (2n+2)$. Wir schreiben nun wieder x, p, f statt $\bar{x}$, $\bar{p}$, $\bar{f}$. Da wir zur Betrachtung der Wurzeln übergehen wollen, betrachten wir nicht $f(x)$, sondern $f(x) + x^{n+1}$; ich behaupte, für diese Funktion können als die gesuchten Intervalle genommen werden:

$$\begin{aligned} |p_n| &\leqq f_1^{(n+1)}(A) \\ |p_{n-1}| &\leqq f_2^{(n+1)}(A) \\ &\vdots \\ |p_1| &\leqq f_n^{(n+1)}(A) \\ |p_0| &\leqq f_{n+1}^{(n+1)}(A) \end{aligned}$$

wo unter $f^{(n+1)}$ die elementaren symmetrischen Funktionen von $(n+1)$ Variabeln verstanden sind, und die Werte aller dieser Variabeln gleich A gesetzt werden sollen, also

$$\begin{aligned} f_1^{(n+1)}(A) &= A + A + \cdots + A = (n+1)\,A \\ f_2^{(n+1)}(A) &= AA + AA + \cdots + AA = \frac{n(n+1)}{2} A^2 \\ &\vdots \\ f_{n+1}^{(n+1)}(A) &= AA \cdots = A^{n+1} \end{aligned}$$

d. h. die $f^{(n+1)}$ sind die Entwickelungskoefficienten von

$$(x + A)^{n+1}.$$

Tritt auch nur ein p aus seinem Intervall heraus, so muss von den Wurzeln von $x^{n+1} + f(x) = 0$ eine dem absoluten Betrag nach grösser sein als A. Denn wären alle $\leqq A$, so wären auch die Koefficienten alle $\leqq f^{(n+1)}$ (wo jedes p mit dem ihm entsprechenden $f^{(n+1)}$ zu vergleichen ist) wie aus der Beziehung zwischen Wurzeln und Koefficienten einer Gleichung hervorgeht. Diese Wurzel sei x_1; $|x_1| > A$. Ist x_1 positiv, so betrachten wir in der Ebene der Variabeln x diejenige Halbebene, in der der reelle Teil negativ ist, und umgekehrt; den Streifen $0 \ldots (2n + 2)$ bezw. $0 \ldots -(2n + 2)$ teilen wir durch Parallele zur immaginären Axe in $(n + 1)$ Streifen, von denen jeder 2 Einheiten breit ist. Es kann nun nicht in jedem dieser Streifen eine Wurzel von $x^{n+1} + f(x) = 0$ liegen, denn diese Gleichung hat ausser x_1, das in der andern Halbebene liegt, nur noch n Wurzeln, während wir $(n + 1)$ Streifen haben. Es sei mit ξ der Mittelpunkt der reellen Axe in einem Streifen bezeichnet, in dem keine Wurzel liegt. Dann ist $|\xi^{n+1} + f(\xi)|$ grösser als A. Denn zerlegen wir $x^{n+1} + f(x)$ in Primfaktoren $(x - x_1)\ (x - x_2) \ldots (x - x_{n+1})$, so ist für $x = \xi$ der erste Faktor absolut genommen grösser als A, alle andern sind grösser oder gleich 1. Nun handelt es sich nicht um $x^{n+1} + f(x)$, sondern um $f(x)$, das aber höchstens um x_{n+1}, d. h. im Maximum um $(2n + 2)^{n+1}$ kleiner sein kann. Wir müssen also A durch $A + (2n + 2)^{n+1}$ ersetzen. Wir kommen zu dem Resultat:

Der angekündigte Hilfssatz ist bewiesen; als die den Koefficienten von

$$p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p_0$$

zuzuordnenden Intervalle können die Entwickelungskoefficienten von

$$[x + A + (2n + 2)^{n+1}]^{n+1}$$

genommen werden, wenn das Intervall für x $-(2n + 2) \cdots + (2n + 2)$ ist. Andernfalls ist noch eine Transformation erforderlich.

Kehren wir zu dem Existenztheorem des Minimums der Abweichung L zurück. Wenn M der absolut grösste Wert ist, den

die gegebene Funktion φ in dem Intervall annimmt, und L_1 ein irgendwie wirklich angenommener Werth der Abweichung (etwa $L_1 = M$, wenn $f(x) \equiv 0$), so setzen wir $A = |M| + |L_1|$; denn jetzt ist sicher ausserhalb unseres $(n+1)$ dimensionalen Prismas $L > L_1$, weshalb wir uns bei der Aufsuchung des Minimums von L auf das $(n+1)$ dimensionale Prisma selbst beschränken können. Hier im endlichen Bereich existiert aber das Minimum nach dem Weierstrassschen Fundamentalsatz, falls

$$L = L(p_0, p_1, \ldots p_n)$$

eine stetige Funktion ist. Das ist nun in der That der Fall; denn durch hinreichend kleine Aenderungen der p können wir erreichen, dass sich die ganze rationale Funktion $f(x)$ an jeder Stelle des Intervalls um weniger ändert als die beliebig klein vorgeschriebene Grösse ε; dann ändert sich auch $f(x) - \varphi(x)$ an jeder Stelle weniger als ε, und also auch L, das Maximum dieser Differenz.

Diese Erwägung setzt die Stetigkeit von $\varphi(x)$ nicht voraus. Dagegen muss von $\varphi(x)$ Endlichkeit und Eindeutigkeit verlangt werden, da sonst die Definition von L ihren Sinn verliert. Wohl aber bleibt unser Existenzbeweis gültig für Funktionen $\varphi(x)$, die für einzelne Strecken des gegebenen Intervalles nicht definiert sind, und er gilt auch für den Fall des Interpolationsproblems, in dem $\varphi(x)$ nur an einzelnen diskreten Punkten definiert ist.

Der Beweis für die Existenz der Tchebychefschen Annäherungsfunktion ist damit erbracht.

Verallgemeinerung für mehr Veränderliche. Dieser Existenzbeweis lässt sich ohne Schwierigkeit auch auf den Fall übertragen, dass eine Funktion mehrerer Variabeln $\varphi(x, y)$ oder auch $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ durch eine ganze rationale Funktion $n$ten Grades $f(x, y)$ bezw. $f(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ angenähert dargestellt werden soll, wo die Annäherungsfunktion wieder so definiert wird, dass das Maximum L von $|f - \varphi|$ im vorgeschriebenen Intervall ein Minimum wird. Wir können uns auf zwei Variabeln beschränken, da die Verallgemeinerung durch den Schluss von n auf $n+1$ nichts Neues bietet. Wir beweisen zunächst den algebraischen Hilfssatz. Es ist

$$f(x, y) = Cx^n + g_1(y) \cdot x^{n-1} + g_2(y) \cdot x^{n-2} + \cdots + g_n(y).$$

Als Funktion von x aufgefasst können wir nach dem Vorigen

jedem Koefficienten ein Intervall zuordnen, das nicht überschritten werden kann, ohne dass $f(x, y)$ an irgend einer Stelle des Intervalles A überschreitet. Sei etwa dem g_ν das Intervall $-a_\nu \cdots + a_\nu$ zugeordnet. Wenden wir jetzt auf $g_\nu(y)$ unsern algebraischen Hilfssatz an, wobei a_ν die Rolle von A spielt, so lassen sich für die $\nu + 1$ Koefficienten von g_ν Intervalle angeben, die nicht überschritten werden können, ohne dass $|g_\nu(y)|$ für irgend ein y des Intervalles grösser wird als a_ν. Dies sind die gesuchten Intervalle der Koefficienten von $f(x, y)$, wie unmittelbar zu sehen. — Wir haben hierbei die Intervallgrenzen von x und von y als voneinander unabhängig angenommen, d. h. ein rechteckiges Intervall vorausgesetzt. Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, da wir zu jedem Intervall ein rechteckiges bestimmen können, das völlig innerhalb des gegebenen liegt. Dies rechteckige Intervall dient uns dann zur Bestimmung der Intervallgrenzen.

Es lassen sich also den Koefficienten von $f(x, y)$ Intervalle zuordnen, derart, dass wenn auch nur ein Koefficient aus seinem Intervall heraustritt, $|f(x, y)|$ für mindestens ein Wertepaar grösser wird als A. Der Existenzbeweis der Annäherungsfunktion gestaltet sich weiterhin nicht verschieden von dem Fall einer Variabeln.

§ 3. Notwendige Bedingungen.

1. Ein allgemeiner Satz.

Wir verallgemeinern das Problem dadurch, dass wir die Differenz $f(x) - \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ die gegebene, $f(x)$ die gesuchte Funktion ist, als speziellen Fall einer Funktion $F(x, p_0, p_1 \ldots p_n)$, die von einer Variabeln x und $(n + 1)$ Parametern p abhängt, auffassen. Ueber $F(x)$ machen wir folgende Voraussetzungen:

1) $F(x)$ sei als Funktion von x in einem gegebenen Intervall, etwa $-1 \cdots + 1$ stetig.

2) Als Funktion der p sei $F(x, p_0, p_1 \ldots p_n)$ im Reellen überall fortgesetzt differentiierbar und in eine beliebig weit konvergierende Taylorsche Reihe entwickelbar.

3) Die Ableitungen nach p behalten den stetigen Charakter in x zwischen $-1 \cdots + 1$.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Parameter p so zu wählen, dass die Abweichung der Funktion $F(x)$ von 0 ein Minimum wird, und suchen hierfür zunächst notwendige Bedingungen. Es seien

$$x_1\ x_2\ \ldots\ x_\nu$$

diejenigen alle voneinander verschiedenen Punkte des Intervalles $-1 \cdots +1$, an denen $F(x)$ die Abweichung L annimmt, was ausser an den Grenzen $x = \pm 1$ nur bei Extremwerten von $F(x)$ der Fall sein kann. Ich behaupte nun eine notwendige Bedingung dafür, dass $L = L(p_0\ p_1\ \ldots\ p_n)$ ein Minimum wird, ist die, dass die algebraischen Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial F(x_1)}{\partial p_0}\cdot\lambda_0 + \frac{\partial F(x_1)}{\partial p_1}\cdot\lambda_1 + \cdots + \frac{\partial F(x_1)}{\partial p_n}\cdot\lambda_n = s_1\\
&\frac{\partial F(x_2)}{\partial p_0}\cdot\lambda_0 + \frac{\partial F(x_2)}{\partial p_1}\cdot\lambda_1 + \cdots + \frac{\partial F(x_2)}{\partial p_n}\cdot\lambda_n = s_2\\
&\quad\vdots\\
&\frac{\partial F(x_\nu)}{\partial p_0}\cdot\lambda_0 + \frac{\partial F(x_\nu)}{\partial p_1}\cdot\lambda_1 + \cdots + \frac{\partial F(x_\nu)}{\partial p_n}\cdot\lambda_n = s_\nu
\end{aligned}$$

die so zu verstehen sind, dass nach der partiellen Differentiation das zu untersuchende Wertsystem $p_0\ p_1\ \ldots\ p_n$ eingesetzt wird, keine endlichen Werte für die λ ergeben.

Die rechten Seiten bedeuten dabei Grössen, die nur dem Vorzeichen nach bestimmt sind; es habe

$$\begin{aligned}
&s_1 \text{ dasselbe Vorzeichen wie } F(x_1) \text{ und sei } \neq 0\\
&s_2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad F(x_2) \quad \text{„} \quad \text{„} \neq 0\\
&\quad\vdots\\
&s_\nu \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad F(x_\nu) \quad \text{„} \quad \text{„} \neq 0.
\end{aligned}$$

Ich behaupte, die Gleichungen dürfen für kein Wertsystem s ein endliches Wertsystem der λ ergeben, wenn die p so gewählt sind, dass

$$L = L(p_0\ p_1\ \ldots\ p_n)$$

ein Minimum ist.

Nehmen wir also an, für irgend ein System der s und p ergäben die Gleichungen ein endliches System λ, so ist zu zeigen, dass der diesem Wertsystem p entsprechende Wert $\bar{L}$ von L kein Minimum ist, dass also für ein dem angenommenen System p benachbartes System $L = L(p_0\ p_1\ \ldots\ p_n)$ kleiner wird, d. h. dass für dies Wertsystem p $F(x)$ auf der ganzen Strecke

$$-1 \leqq x \leqq 1$$

kleiner bleibt als $\bar{L}$. Als dies benachbarte Wertsystem wählen wir

$$\begin{aligned} p_0 - \lambda_0\varepsilon \quad &\text{statt} \quad p_0 \\ p_1 - \lambda_1\varepsilon \quad &\text{,,} \quad p_1 \\ &\vdots \\ p_n - \lambda_n\varepsilon \quad &\text{,,} \quad p_n \end{aligned}$$

wo ε eine kleine positive Grösse ist, über deren Kleinheit wir uns die Verfügung noch vorbehalten. $F_\varepsilon(x)$ bezeichne die Funktion mit den neuen, $F_0(x)$ die mit den alten Parametern. Wir entwickeln $F_\varepsilon(x)$ nach Potenzen von ε, was nach unsern Voraussetzungen erlaubt ist:

$$F_\varepsilon = F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial p_0} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \varepsilon} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_n}{\partial \varepsilon}\right) \varepsilon + \cdots$$

$$= F_0 - \left(\frac{\partial F}{\partial p_0} \cdot \lambda_0 + \frac{\partial F}{\partial p_1} \cdot \lambda_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n} \cdot \lambda_n\right) \varepsilon + (\varepsilon^2) + \cdots$$

Nun sieht man, dass diese Grösse für $-1 \leqq x \leqq +1$ absolut genommen überall kleiner ist als $\bar{L}$. Denn

1) An den Stellen $x_1, x_2 \ldots x_\nu$ können wir für

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p_0} \cdot \lambda_0 + \frac{\partial F}{\partial p_1} \cdot \lambda_1 + \cdots \frac{\partial F}{\partial p_n} \lambda_n\right)$$

die Grössen s einsetzen, und haben so z. B. für x_1

$$F_\varepsilon(x_1) = F_0(x_1) - s_1 \varepsilon + (\varepsilon^2) + \cdots,$$

welche Grösse, da s_1 vom selben Vorzeichen ist als $F_0(x_1)$, für genügend kleine ε dem absoluten Betrag nach kleiner ist als

$$|F_0(x_1)| = \bar{L}.$$

2) Für die Nachbarschaft von $x_1\, x_2 \ldots x_\nu$ gilt dasselbe. In der Nähe eines jeden dieser Punkte grenzen wir einen Bereich der Variabeln x ab, in dem immer noch

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p_0} \cdot \lambda_0 + \frac{\partial F}{\partial p_1} \cdot \lambda + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n} \cdot \lambda_n\right)$$

dasselbe Vorzeichen hat, wie die entsprechende Grösse s. Nach unsern Voraussetzungen müssen wir, da $s \neq 0$ überall einen endlichen Bereich erhalten, dessen Grösse wohl von s, aber nicht von ε abhängt.

3) Ausserhalb dieser Bereiche ist $F_0(x)$ überall um ein endliches Stück kleiner als $\bar{L}$, wegen der Stetigkeit gilt für $F_\varepsilon(x)$ dasselbe, wenn ε genügend klein genommen ist.

$F_\varepsilon(x)$ bleibt also in dem ganzen Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ kleiner als $\bar{L}$. F_ε ist also eine Funktion kleinerer Abweichung als F_0, d. h. $L = L(p_0\ p_1 \ldots p_n)$ ist kein Minimum, wenn das System der linearen Gleichungen endliche Lösungen zulässt. — Wir müssen jedoch beachten, dass unsere Herleitung zunächst nur dann einen Sinn hat, wenn die Punkte $x_1\ x_2 \ldots x_\nu$, an denen $F(x)$ seine Abweichung annimmt, diskrete Punkte sind. Es darf also nicht $|F(x)|$ in einem endlichen Intervall gleich L sein. Unser Resultat ist: damit die Abweichung der Funktion $F(x, p_0\ p_1 \ldots p_n)$ von 0 ein Minimum werde, ist die Nichtauflösbarkeit der Gleichungen (1) notwendige Bedingung.

2. Anwendung des Vorigen.

Statt der allgemeinen Funktion $F(x, p_0\ p_1 \ldots p_n)$ des vorigen Abschnittes setzen wir nun die Differenz

$$f_n(x) - \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine gegebene, zwischen -1 und $+1$ stetige Funktion und $f_n(x)$ die gesuchte Annäherungsfunktion darstellt, wodurch unsern Bedingungen über $F(x)$ sicher genügt ist. Damit die Gleichung

$$|f_n(x) - \varphi(x)| = L$$

für endliche Intervalle ausgeschlossen ist, braucht nur vorausgesetzt zu werden, dass $\varphi(x)$ für kein endliches Intervall mit einer ganzen rationalen Funktion $n$ten oder niedrigeren Grades zusammenfällt. Da also

$$F(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_0 - \varphi(x)$$

so lauten unsere Gleichungen (1)

$$
\begin{aligned}
&\lambda_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_1^n = s \\
&\lambda_0 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_2^n = s_2 \\
&\quad\vdots \\
&\lambda_0 + \lambda_1 x_\nu + \lambda_2 x_\nu^2 + \cdots + \lambda_n x_\nu^n = s_\nu .
\end{aligned}
\tag{1^a}
$$

Bezeichnen wir

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n \text{ mit } H(x),$$

so ist $H(x)$ eine ganze rationale Funktion $n$ten Grades, die durch unser Gleichungssystem nur insoweit bestimmt wird, als sie an vorgeschriebenen Stellen von vorgeschriebenem Vorzeichen sein muss. Für die Frage, ob unser Gleichungssystem durch passende Wahl der Koefficienten von $H(x)$ befriedigt werden kann, kommt nun nur die Anzahl der Zeichenwechsel unter den $s_1, s_2 \cdots s_\nu$ in Betracht. Bedeutet etwa der Uebergang von s_1 zu s_2 einen Zeichenwechsel, so können wir dem dadurch genügen, dass wir eine Wurzel von $H(x) = 0$ zwischen x_1 und x_2 festsetzen. Thun wir dies bei allen Zeichenwechseln, und sorgen, dass $H(x_1)$ das richtige Vorzeichen hat, so sind alle Bedingungen unserer Gleichungen (1^a) erfüllt. Sind weniger Zeichenwechsel als Wurzeln vorhanden, so können wir die überzähligen Wurzeln ausserhalb des Intervalles $-1 \cdots +1$ annehmen. Da wir n Wurzeln zur Verfügung haben, so sind bei n und weniger Zeichenwechseln unsere Gleichungen stets lösbar.

Unsere notwendige Bedingung für $f_n(x)$ als Funktion kleinster Abweichung von $\varphi(x)$ können wir also auch so aussprechen:

Die notwendige Bedingung für die Funktion kleinster Abweichung ist die, dass unter $s_1, s_2 \cdots s_\nu$ d. h. unter

$$f_n(x_1) - \varphi(x_1), \quad f_n(x_2) - \varphi(x_2), \quad \ldots \quad f_n(x_\nu) - \varphi(x_\nu),$$

wo $x_1, x_2 \ldots x_\nu$ die Annahmestellen der Abweichung bedeuten, mindestens $(n+1)$ Zeichenwechsel auftreten.

Alle Erwägungen dieses Paragraphen lassen sich ausdehnen auf den Fall, dass $\varphi(x)$ nur abteilungsweise oder nur in diskreten Punkten definiert ist. Wir können uns ferner von der Einschränkung befreien, dass die Abweichung nur an diskreten Punkten angenommen werden soll. Werde etwa L in dem endlichen Intervall

$$a \leqq x \leqq b$$

angenommen, so haben wir in die Gleichungen (1) die folgende aufzunehmen:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial p_0} \cdot \lambda_0 + \frac{\partial F(x)}{\partial p_1} \cdot \lambda_1 + \cdots \frac{\partial F(x)}{\partial p_n} \cdot \lambda_n = s_k$$

für

$$a \leqq x \leqq b$$

wodurch sich an der Beweisführung nichts ändert. Die Funktion $H(x)$ muss dann im ganzen Intervall $a \ldots b$ das Vorzeichen von s_k behalten, und wir sehen sofort, dass ein solches Intervall wie ein diskreter Punkt anzusehen ist.

Die Annahme der Abweichung muss $(n + 2)$ Mal in abwechselndem Sinn erfolgen, wobei ein endliches Intervall, in dem die Abweichung angenommen wird, als eine einzige Annahme zu betrachten ist.

§ 4. Diese Bedingungen sind hinreichend und eindeutig.

Aus der Eindeutigkeit würde nach dem Existenzbeweise folgen, dass die Bedingungen hinreichend sind, wir wollen aber beides zugleich durch folgenden nun zu beweisenden Satz darthun:

Ist $f_n(x)$ ein Polynom $n$ten Grades, das der notwendigen Bedingung genügt, so giebt es kein von ihm verschiedenes Polynom $n$ten Grades von ebenso kleiner oder noch kleinerer Abweichung.

Sei also $\overline{f}_n(x)$ ein Polynom, dessen Abweichung von $\varphi(x)$ nicht grösser ist als L.

Falls nun, was ja möglich ist $\nu > (n + 2)$, so wählen wir unter $x_1\ x_2 \ldots x_\nu$ $(n + 2)$ Werte aus von der Art, dass je zwei aufeinander folgende einen Zeichenwechsel von $f_n(x) - \varphi(x)$ liefern, und es seien nun diese Werte mit $x_1, x_2 \ldots x_{n+2}$ bezeichnet, (die möglicherweise mit $x_1\ x_2 \ldots x_\nu$ zusammenfallen können).

Wir betrachten:

$$[f_n(x) - \varphi(x)] - [\overline{f}_n(x) - \varphi(x)],$$

was eine ganze rationale Funktion vom höchstens $n$ten Grade ist.

$$= f_n(x) - \bar{f}_n(x).$$

An den Stellen $x_1, x_2 \ldots x_{n+2}$ ist

$$|f_n(x) - \varphi(x)| = L,$$

während

$$|\bar{f}_n(x) - \varphi(x)| \leqq L;$$

nehmen wir an, es gelte das Ungleichheitszeichen, so ist für das Vorzeichen von

$$[f_n(x) - \varphi(x)] - [\bar{f}_n(x) - \varphi(x)]$$

das des Minuenden massgebend, und es müsste dann die Differenz, ebenso wie der Minuend $(n + 1)$ Zeichenwechsel, also auch $(n + 1)$ Nullstellen zwischen -1 und $+1$ haben, d. h. $f_n(x) - \bar{f}_n(x) \equiv 0$. Gilt aber in $\bar{f}_n(x) - \varphi(x) \leqq L$ an einigen oder allen Stellen $x_1 x_2 \ldots x_{n+2}$ das Gleichheitszeichen, so rücken die Wurzeln von den Intervallen $x_1 \ldots x_2$, $x_2, \ldots x_3$, $\ldots$ $\ldots x_{n+1} \ldots x_{n+2}$ in diese Punkte selbst, ihre Zahl wird dabei, wie man sich leicht überzeugt, nicht geändert.

Auch an dieser Betrachtung ändert sich nichts, wenn wir statt eines der Punkte ein endliches Intervall einführen, in dem die Differenz ein festgesetztes Vorzeichen haben soll.

Damit ist unsere notwendige Bedingung als zugleich hinreichend und eindeutig nachgewiesen. Es ist nicht nur das kleinste Minimum, sondern überhaupt das Minimum von L als Funktion von $p_0 p_1 \ldots p_n$ eindeutig bestimmt. In geometrischer Interpretation können wir unsere Resultate in folgenden Satz zusammenfassen:

Zu jeder stetigen Kurve lässt sich eine und nur eine Parabel $n$ten Grades angeben, die in einem vorgegebenen Intervall die Kurve $(n + 1)$ mal durchsetzt und sich an den $(n + 2)$ Punkten (oder Intervallen) grösster Entfernung gleich weit von der gegebenen Kurve entfernt.

Aus der Eindeutigkeit der Annäherungsfunktion folgt sofort folgender Satz: Liegt das definierende Intervall symmetrisch zum Nullpunkt, so ist die Annäherungsfunktion gerade, wenn die anzunähernde Funktion gerade ist, und ungerade, wenn diese ungerade ist. Im ersten Fall haben wir in $f(-x)$ im zweiten in $-f(-x)$ eine zweite Funktion, die den Bedingungen der Annäherungsfunktion genügt, woraus denn unser Satz folgt.

§ 5. Stetigkeit.

Wir benutzen die vorigen Sätze, um zu beweisen, dass sich die Annäherungsfunktion bei festgehaltenem Grad und Intervall mit der anzunähernden Funktion stetig ändert. Es sei $\varphi(x)$ eine in dem betrachteten Intervall den allgemeinen Bedingungen der Stetigkeit und Eindeutigkeit genügende Funktion, $f(x)$ die zugehörige Annäherungsfunktion $n$ten Grades. Ferner sei $\varphi_\varepsilon(x)$ eine von $\varphi(x)$ nur wenig verschiedene stetige und eindeutige Funktion, die in dem betrachteten Intervall

$$|\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leqq \varepsilon$$

genügt, wo wir uns die Verfügung über die kleine Grösse ε noch vorbehalten. $\varphi_\varepsilon(x)$ verläuft in dem betrachteten Intervall völlig innerhalb eines von zwei parallelen Kurven begrenzten Streifens. Wenn nun $f_\varepsilon(x)$ die zu $\varphi_\varepsilon(x)$ gehörende Annäherungsfunktion ist, so behaupte ich kann auch

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)|$$

durch geeignete Wahl von ε während des ganzen Intervalles beliebig klein gemacht werden. Zum Beweis betrachten wir die Funktion

$$[f(x) - \varphi(x)] - [f_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)]$$

an denjenigen Stellen $x_1, x_2 \ldots x_{n+2}$, an denen $[f(x) - \varphi(x)]$ seine Abweichung L, und zwar in abwechselndem Sinn annimmt. Sei nun L_ε die Abweichung der Funktion $f_\varepsilon(x)$ von $\varphi_\varepsilon(x)$, so ist

$$L_\varepsilon \leqq |\ L + \varepsilon.\ |$$

Wäre nämlich $L_\varepsilon > L + \varepsilon$, so würde $f(x)$, dessen Differenz von $\varphi_\varepsilon(x)$ im ganzen Intervall nirgends grösser wird als $L + \varepsilon$, besser annähern als $f_\varepsilon(x)$;

$$|f_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)|$$

ist also im ganzen Intervall, und also auch an den Stellen $x_1, x_2, \ldots x_{n+2}$ nicht grösser als $L + \varepsilon$. Nehmen wir, um die Vorstellung zu fixieren, an, es sei $f(x) - \varphi(x)$ an der Stelle x_1 positiv, also gleich $+ L$, so ist

$$[f(x) - \varphi(x)] - [f_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)]$$

für $x = x_1$ algebraisch genommen nicht kleiner als $-\varepsilon$. An der Stelle x_2 ist

$$[f(x) - \varphi(x)] - [f_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)]$$

nicht grösser als $+\varepsilon$. In dieser Weise fahren wir bis x_{n+2} fort.

Nun unterscheidet sich

$$f(x) - f_\varepsilon(x)$$

von

$$[f(x) - \varphi(x)] - [f_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)]$$

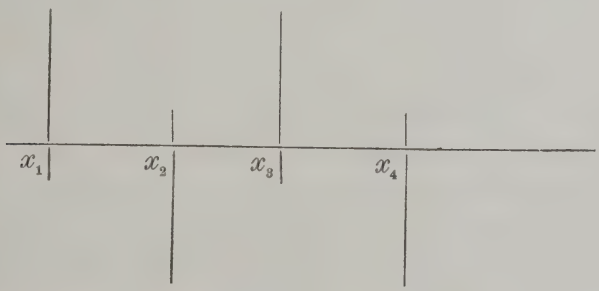
höchstens um ε; also können wir von der Funktion

$$f(x) - f_\varepsilon^*(x),$$

die eine ganze rationale Funktion $n$ten Grades ist, folgendes sagen: Sie ist an der Stelle

x_1 nicht kleiner als -2ε
x_2 „ grösser „ $+2\varepsilon$
x_3 „ kleiner „ -2ε
. . . . . .

Die durch die Funktion dargestellte Kurve muss also durch die in unserer Figur an den Stellen $x_1, x_2 \ldots x_{n+2}$ gezeichneten Geraden hindurchgehen.



Ich behaupte nun: In mindestens einem der Intervalle $x_1 \ldots x_2$, $x_2 \ldots x_3$, $\ldots\ldots x_{n+1} \ldots x_{n+2}$ wird die Funktion $f(x) - f_\varepsilon(x)$ dem absoluten Betrage nach nicht grösser als 2ε.

Nehmen wir zunächst das Gegenteil an: In jedem der Intervalle läge eine Stelle, an der die Funktion $f(x) - f_\varepsilon(x)$ absolut genommen grösser wäre als 2ε; ich behaupte: dann liegt in dem

Intervall $x_1 \ldots x_3$ ein Minimum. Denn wenn 1) $f(x) - f_\varepsilon(x)$ an einer Stelle des Intervalls kleiner wird als -2ε, so muss diese Differenz, da sie an den Grenzen x_1 und x_3 nicht kleiner ist als -2ε, ein Minimum haben. Denn jede stetige Funktion hat im endlichen Intervall, wenn der kleinste Wert nicht an den Grenzen liegt, ein Minimum. Wenn aber 2) $f(x) - f_\varepsilon(x)$ im Intervall $x_1 \ldots x_3$ nicht kleiner wird als -2ε, so muss es nach unserer Annahme in jedem der Teilintervalle $x_1 \ldots x_2$ und $x_2 \ldots x_3$ grösser werden als $+2\varepsilon$. Da es für x_2 nicht grösser sein kann als $+2\varepsilon$, so sieht man, dass auch in diesem Fall ein Minimum statthaben muss.

Auf diese Weise fahren wir fort: Ist unsere Annahme, dass in jedem Teilintervall die Funktion $f(x) - f_\varepsilon(x)$ aus dem Streifen $-2\varepsilon \ldots +2\varepsilon$ heraustritt, richtig, so lässt sich zeigen, dass in jedem der Intervalle mit ungeraden Indices $x_1 \ldots x_3$, $x_3 \ldots x_5$ ein Minimum und in jedem der Intervalle mit geraden Indices $x_2 \ldots x_4$, $x_4 \ldots x_6 \ldots$ ein Maximum liegen muss. Wir haben also, da n solcher Intervalle vorhanden sind: $x_1 \ldots x_3$, $x_2 \ldots x_4 \ldots x_n \ldots x_{n+2}$, den Widerspruch, dass $f(x) - f_\varepsilon(x)$ als ganze rationale Funktion $n$ten Grades n Extremwerte annehmen müsste.

Folglich war die Annahme unrichtig; die Funktion $f(x) - f_\varepsilon(x)$ wird in der That in mindestens einem der Intervalle

$$x_1 \ldots x_2 \qquad x_2 \ldots x_3 \ldots x_{n-1} \ldots x_{n-2}$$

dem absoluten Betrag nach nicht grösser als 2ε.

Man sieht nun ferner leicht, dass, wenn eine ganze rationale Funktion $n$ten Grades in einem endlichen Intervall, dessen Grenzen von ε unabhängig sind, absolut genommen kleiner bleibt als ε (wie wir Kürze halber statt 2ε schreiben), die Koefficienten dieser Funktion für hinreichend kleine ε beliebig klein gemacht werden können. Es genügt schon, dass die Funktion an $(n+1)$ festgehaltenen diskreten Punkten $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_{n+1}$ die wir, wenn das ganze Intervall gegeben ist, etwa in gleichem Abstand von einander annehmen, kleiner bleibt als ε. Denn wenn wir die Koefficienten bestimmen wollen, so geschieht dies aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
p_n\xi_1^n &+ p_{n-1}\xi_1^{n-1} + \ldots + p_0 = \varepsilon_1 \\
p_n\xi_2^n &+ p_{n-1}\xi_2^{n-1} + \ldots + p_0 = \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
p_n\xi_{n+1}^n &+ p_{n-1}\xi_{n+1}^{n-1} + \ldots + p_0 = \varepsilon_{n+1}
\end{aligned}$$

wo die

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\nu+1} \qquad \leqq \varepsilon .$$

Die p erscheinen in der Form

$$\frac{d_1}{D}\varepsilon_1 + \frac{d_1}{D}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{d_{n+1}}{D} \cdot \varepsilon_{n+1},$$

wo D die Cauchysche Determinante und die d Unterdeterminanten der ξ, also von ε unabhängig sind; es werden also in der That alle p für hinreichend kleines ε beliebig klein.

Ist für einen der Koefficienten von $f(x) - f_\varepsilon(x)$ eine obere Grenze des absoluten Betrages vorgeschrieben, so müssen wir für jedes der $(n + 1)$ Intervalle $x_1 \ldots x_2$, $x_2 \ldots x_3$, $\ldots$ $x_{n+1} \ldots x_{n+2}$ auf die angegebene Weise ε bestimmen; der kleinste der so gefundenen Werte giebt die zulässige Grösse von

$$\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)$$

an.

Ist $\varphi(x)$ nur durch einen „Funktionsstreifen" gegeben, so liegt die zugehörige Annäherungsfunktion in einem Gebiet, das mit dem Funktionsstreifen beliebig schmal wird. Wir können auch sagen: Der topographische Charakter der Annäherungsfunktion ist nur von dem topographischen Charakter der anzunähernden Funktion abhängig (also z. B. nicht von ihrer analytischen Natur; dagegen wird sich zeigen, dass die analytische Natur der Koefficienten der Annäherungsfunktion durch die analytische Natur der gegebenen Funktion bedingt ist.)

§ 6. Exkurs über die Darstellung durch rationale Funktionen.

Unser bisheriger Gedankengang lässt sich leicht übertragen für den Fall, dass die Annäherung nicht durch ganze, sondern durch gebrochene rationale Funktionen bewirkt werden soll.

Existenzbeweis.

Es sei eine in dem zu betrachtenden Intervall $-1 \ldots +1$ endliche und eindeutige Funktion $\varphi(x)$ gegeben und n als Grad für den Nenner, m für den Zähler der Annäherungsfunktion vorgeschrieben. Wir wollen beweisen, dass die Abweichung der Funktionen der Form

$$\frac{p_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \cdots + q_0}{p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + 1}$$

ein Minimum annimmt, und betrachten zu diesem Zweck die Funktionen der Form:

$$\frac{q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \cdots + q_0}{p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_0}$$

Aus dem $(m + n + 2)$ dimensionalen Raum, den diese Funktionen erfüllen, schneiden wir durch die Bedingungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} |q_m| \leqq 1 \quad |q_{m-1}| \leqq 1 \ldots |q_0| \leqq 1 \\ |p_n| \leqq 1 \quad |p_{n-1}| \leqq 1 \ldots |p_0| \leqq 1 \end{aligned}$$

einen Würfel aus und betrachten die Wandungen dieses Würfels, an denen von (2) mindestens einmal das Gleichheitszeichen gilt; ich behaupte L als Funktion der q und p hat auf diesen Wandungen ein Minimum, für das $p_0 \neq 0$.

L kann in diesem Gebiet als stetige Funktion der p und q betrachtet werden, denn die einzigen Unstetigkeitsstellen sind die Unendlichkeitsstellen, die für unsere Minimumfrage nicht in Betracht kommen. L nimmt also sein Minimum nach dem Weierstrassschen Satz an. Ist für dieses $p_0 \neq 0$, so ist der Satz bewiesen, ist aber $p_0 = 0$, so muss notwendig auch $q_0 = 0$, weil sonst für $x = 0$ die Annäherungsfunktion, also auch L unendlich würde, ein Minimum also sicher nicht stattfände. Wir können alsdann Zähler und Nenner durch x teilen und so den Grad beider um 1 erniedrigen. Wir gehen deshalb zu einem um 2 Dimensionen niedrigeren Raum und betrachten in diesem den analogen Würfel. Auf diese Weise fahren wir fort, und wenn das Verfahren nicht früher abbricht, kommen wir entweder auf Funktionen der Form

$$\frac{q_\mu x^\mu + q_{\mu-1} x^{\mu-1} + \cdots + q_0}{p_0}$$

d. h. auf ganze Funktionen, die wir bereits abgehandelt haben oder auf Funktionen der Form

$$\frac{q_0}{p_\nu x^\nu + p_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + p_0}.$$

Bei dem Minimum dieser Funktionen kann nicht mehr $p_0 = 0$;

denn es müsste wegen des Punktes $x = 0$ alsdann auch $q_0 = 0$. Der Nenner kann aber nicht identisch 0 sein, weil ja mindestens ein $|p|$ gleich 1 sein muss. Wir würden also auf die identische Null geführt, die wir aber auch durch $q_0 = 0$; $p_\nu = p_{\nu-1} = \cdots$ $\cdots = p_1 = 0$ $p_0 = 1$ erreichen können. Wir bekommen also stets ein Minimum, für das $p_0 \neq 0$. Dividieren wir alle Koefficienten durch p_0, so haben wir die gesuchte rationale Funktion. Es giebt keine besser annnähernde rationale Funktion der Grade m und n; denn gäbe es eine, so könnten wir alle Koefficienten durch den absolut grössten unter ihnen dividieren, wodurch der Widerspruch zu Tage träte.

Zu jeder eindeutigen und endlichen Funktion giebt es in einem gegebenen Intervall eine am besten annähernde, rationale Funktion, deren Grad im Zähler und Nenner vorgeschrieben ist, und deren absolutes Glied im Nenner gleich 1 ist.

Notwendige Bedingungen.

Um notwendige Bedingungen zu finden, wenden wir wieder unsern allgemeinen Satz S. 14 und die Bedingungen (1) an, die hier, wenn

$$F(x) = \frac{f_m(x)}{f_n(x)} - \varphi(x)$$

$$f_m(x) = q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \cdots + q_0$$

$$f_n(x) = p_n x_n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + 1$$

folgendermassen lauten: Es dürfen die Gleichungen:

$$\frac{1}{f_n(x_1)}\,(x_1^m\lambda_m + x_1^{m-1}\cdot\lambda_{m-1} + \cdots + \lambda_0) -$$

$$- \frac{f_m(x_1)}{(f_n(x_1))^2}\,(x_1^n\lambda_{m+n} + x_1^{n-1}\lambda_{m+n-1} + \cdots x_1\lambda_{m+1}) = s_1$$

$$(1^b)\quad \frac{1}{f_n(x_2)}\,(x_2^m\lambda_m + x_2^{m-1}\lambda_{m-1} + \cdots + \lambda_0) -$$

$$- \frac{f_m(x_2)}{(f_n(x_2))^2}\,(x_2^n\lambda_{m+n} + x_2^{n-1}\lambda_{m+n-1} + \cdots x_2\lambda_{m+1}) = s_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{f(x_\nu)}\,(x_\nu^m\lambda_m + x_\nu^{m-1}\lambda_{m-1} + \cdots + \lambda_0) -$$

$$- \frac{f_m(x_\nu)}{(f_n(x_\nu))^2}\,(x_\nu^n\lambda_{m+n} + x_\nu^{n-1}\lambda_{m+n-1} + \cdots x_\nu\lambda_{m+1}) = s_\nu$$

kein endliches System der λ zulassen, das sie befriedigt. Ich multipliciere nun die erste Gleichung mit $f_n(x_1))^2$, die zweite mit $(f_n(x_2))^2$ u. s. f. Der Sinn der rechten Seite wird dadurch nicht geändert, da ja s_1, s_2 . . . s_ν nur in Bezug auf das Vorzeichen bestimmt sind, das durch Multiplikation mit $(f_n(x_1))^2$ . . . nicht geändert werden kann. Auch kann $f_n(x_1)$ nicht gleich 0 sein, weil $f_n(x)$ im Nenner der Annäherungsfunktion steht, die nicht unendlich werden kann; (die Möglichkeit gemeinsamer Wurzeln von $f_n(x)$ und $f_m(x)$ werden wir sogleich ausschliessen). $s_1 . (f_n(x_1))^2$ bedeutet also dasselbe wie s_1. Denken wir uns ferner, um das negative Vorzeichen zu entfernen, die λ_{m+1}, λ_{m+2} . . . λ_{m+n} durch ihre negativen Werte ersetzt, so können wir unsere Gleichungen schreiben:

$$\begin{aligned}
&f_n(x_1)\,(x_1^m\lambda_m + x_1^{m-1}\lambda_{m-1} + \ldots + \lambda_0)\\
&\qquad + f_m(x_1)\,(x_1^n\lambda_{m+n} + x_1^{n-1}\lambda_{m+n-1} + \ldots + x_1\lambda_{m+1}) = s_1\\
&f_n(x_2)\,(x_2^m\lambda_m + x_2^{m-1}\lambda_{m-1} + \ldots + \lambda_0)\\
&\qquad + f_m(x_2)\,(x_2^n\lambda_{m+n} + x_2^{n-1}\lambda_{m+n-1} + \ldots + x_2\lambda_{m+1}) = s_2\\
&\quad\vdots\\
&f_n(x_\nu)\,(x_\nu^m\lambda_m + x_\nu^{m-1}\lambda_{m-1} + \ldots + \lambda_0)\\
&\qquad + f_m(x_\nu)\,(x_\nu^n\lambda_{m+n} + x_\nu^{n-1}\lambda_{m+n-1} + \ldots x_\nu\lambda_{m+1}) = s_\nu.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade; wir können sie also schreiben:

$$\begin{aligned}
&b_{m+n}x_1^{m+n} + b_{m+n-1}x_1^{m+n-1} + \ldots + b_1x_1 + b_0 = s_1\\
&b_{m+n}x_2^{m+n} + b_{m+n-1}x_2^{m+n-1} + \cdots + b_1x_2 + b_0 = s_2\\
&\quad\vdots\\
&b_{m+n}x_\nu^{m+n} + b_{m+n-1}x_\nu^{m+n-1} + \cdots + b_1x_\nu + b_0 = s_\nu
\end{aligned} \tag{3}$$

wobei

$$\begin{aligned}
b_0 &= \lambda_0\\
b_1 &= \lambda_0p_1 + \lambda_1 &&+ \lambda_{m+1}q_0\\
b_2 &= \lambda_0p_2 + \lambda_1p_1 + \lambda_2 &&+ \lambda_{m+1}q_1 + \lambda_{m+2}q_2\\
b_3 &= \lambda_0p_3 + \lambda_1p_2 + \lambda_2p_1 + \lambda_3 &&+ \lambda_{m+1}q_2 + \lambda_{m+2}q_1 + \lambda_{m+3}q_0\\
&\quad\vdots\\
b_{m+n-1} &= \lambda_{m-1}p_n + \lambda_mp_{n-1} &&+ \lambda_{m+n-1}q_m + \lambda_{m+n}q_{m-1}\\
b_{m+n} &= \lambda_mp_n &&+ \lambda_{m+n}q_m.
\end{aligned} \tag{4}$$

Die $(m+n+1)$ reihige Determinante dieses Systems lautet, wenn wir Zeilen und Spalten vertauschen:

$$D = \begin{vmatrix}
1 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & p_1 & \cdots & p_{n-2} & p_{n-1} & p_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & p_{n-3} & p_{n-2} & p_{n-1} & p_n & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
0 & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_m & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\
0 & 0 & q_0 & q_1 & q_2 & \cdots & q_{m-1} & q_m & 0 & 0 \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & q_0 & q_1 & \cdots & q_{m-2} & q_{m-1} & q_m & 0 \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & \cdots & q_{m-3} & q_{m-2} & q_{m-1} & q_m \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}$$

Denken wir uns vor dem q_0 noch ein $\overline{q}$ stehen, das wir nachher gleich 0 setzen wollen, so sehen wir, dass D die Resultante der beiden Funktionen ist,

$$1 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$$

und

$$\overline{q} + q_0 x + q_1 x^2 + \cdots + q_m x^{m+1}$$

d. h. der beiden Funktionen

$$f_n(x) \qquad \text{und} \qquad x \cdot f_m(x).$$

Da nun das absolute Glied in $f_n(x)$ gleich 1 ist, $f_n(x)$ also für $x = 0$ nicht verschwindet, so haben diese Funktionen dann und nur dann einen Faktor gemein, wenn $f_n(x)$ und $f_m(x)$ einen Faktor gemein haben. Der zunächst zu betrachtende Fall $D \neq 0$ ist also identisch damit, dass

$$\frac{f_m(x)}{f_n(x)}$$

irreduzibel ist.

In diesem Fall sind die Gleichungen (1^b) vollständig äquivalent mit (3), und die Bedingung, dass (1^b) keine bestimmten Werte für λ ergeben sollen, ist identisch damit, dass (3) keine bestimmten Werte für b ergeben sollen. Dies führt, wie oben

bei den ganzen rationalen Funktionen auf die Bedingung, dass unter den $s_1, s_2 \ldots s_\nu$ sich mindestens $m+n+1$ Zeichenwechsel finden.

Hinreichende und eindeutige Bedingungen.

Diese unter der Voraussetzung $D \neq 0$ notwendige Bedingung ist stets hinreichend und bestimmt das kleinste Minimum eindeutig, was wie oben durch Betrachtung der Funktion

$$\left[\frac{f_m(x)}{f_n(x)} - \varphi(x)\right] - \left[\frac{\overline{f}_m(x)}{\overline{f}_n(x)} - \varphi(x)\right]$$
$$= \frac{f_m(x)}{f_n(x)} - \frac{\overline{f}_m(x)}{\overline{f}_n(x)} = \frac{f_m \cdot \overline{f}_n - \overline{f}_m \cdot f_n}{f_n \cdot \overline{f}_n},$$

die nicht $(m+n+1)$ Zeichenwechsel haben kann, ohne dass

$$f_m \cdot \overline{f}_n - \overline{f}_m \cdot f_n \equiv 0$$
$$\frac{f_m}{f_n} \equiv \frac{\overline{f}_m}{\overline{f}_n},$$

nachgewiesen wird. Der Nachweis der Eindeutigkeit erstreckt sich aber hier nur auf das kleinste Minimum, die Frage nach der Möglichkeit grösserer Minima, die $D = 0$ genügen, bleibt offen.

Die Untersuchung gestaltet sich also so, dass wir zuerst nach einer rationalen Funktion $\frac{f_m(x)}{f_n(x)}$ suchen, die $(m+n+1)$ Zeichenwechsel der Abweichung ergiebt. Existiert diese, so ist sie ein Minimum, und es existiert dann keine rationale Funktion der Form $\frac{f_m(x)}{f_n(x)}$ mit ebenso kleiner oder noch kleinerer Abweichung. Existiert sie nicht, so bedeutet dies, dass die Zahlen m und n zu hoch gegriffen sind, dass wir mit Funktionen $\frac{f_{m-1}(x)}{f_{n-1}(x)}$ dieselbe Annäherung erreichen können. Wir suchen also unter diesen Funktionen solche, die $m+n-1$ Zeichenwechsel ergeben, u. s. f.

Zusammenfassend können wir sagen: Die Bedingung von $(m+n+1)$ Zeichenwechseln ist stets hinreichend, und wenn sie erfüllbar ist, auch notwendig.

§ 7. Interpolationsprobleme.

1. Geometrisches Beispiel für symmetrische Behandlung der beiden Variabeln.

Wir wollen folgendes geometrische Problem behandeln, das

vielleicht geeignet ist, den Sinn unserer Methoden zu veranschaulichen. Es sei K ein Kegelschnitt und 1, 2 . . . 6 Punkte in der Ebene. Von jedem dieser Punkte betrachte ich das kürzeste der Lote, die sich von ihm an K ziehen lassen, und nenne es L_ν. Die grösste der Strecken L_ν sei mit L bezeichnet.

Es seien nun die Punkte 1, 2 . . . 6 gegeben und die Aufgabe gestellt, denjenigen Kegelschnitt zu finden, für den L ein Minimum wird.

Die Existenz der Lösung folgt, wenn wir bedenken, dass es zur Bestimmung des Kegelschnittes nur auf die Verhältnisse seiner Koefficienten ankommt, aus Betrachtungen, die den S. 21—23 angestellten ähnlich sind.

Ich behaupte, eine notwendige Bedingung für das Minimum ist die Gleichheit aller L_ν. Nehmen wir also an, es seien weniger als 6, etwa 2, der Grössen L_ν gleich L. Auf den 2 Normalen, deren $L_\nu = L$, trage ich nun vom Kegelschnitt aus eine Strecke ε ab, die den gegebenen Punkten zugerichtet ist. Die Endpunkten dieser beiden Strecken zusammen mit 3 der übrigen 4 Normalen-Fusspunkte definieren einen neuen Kegelschnitt, dessen L, wenn ε genügend klein gewählt ist, kleiner ist, als das des erst angenommenen.

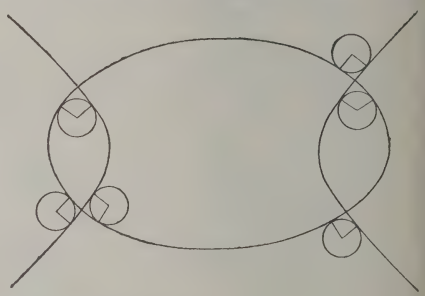
Denn von den zwei ausgezeichneten Punkten existiert eine Verbindungsstrecke zum Kegelschnitt von der Länge $L-\varepsilon$, die senkrechte Entfernung ist daher gleich oder kleiner $L-\varepsilon$. Von den drei hinzugenommenen Punkten existiert eine Verbindungsstrecke L_ν, wo $L_\nu < L$. Die Entfernung des letzten Punktes aber, die kleiner war als L, bleibt dies auch bei dem neuen Kegelschnitt bei genügend kleinem ε wegen der Stetigkeit.

Fixieren wir, Einfachheit halber, unsern Kegelschnitt als Ellipse, so können wir weiter sagen, dass 1, 2 . . . 6 bei dem verlangten Kegelschnitt abwechselnd innerhalb und ausserhalb der Ellipse liegen müssen. Das „abwechselnd“ ist hierbei so zu verstehen: Beim Umlauf der Ellipse ergiebt sich für die Fusspunkte der Lote eine cyklische Reihenfolge. Diese soll auch auf die gegebenen Punkte selbst übertragen werden. Nehmen wir etwa an, zwei aufeinanderfolgende Punkte, etwa 1 und 2 lägen ausserhalb der Ellipse. Ich betrachte nun die Schaar der Ellipsen, die durch die festgehaltenen Fusspunkte der Lote von den Punkten 3, 4, 5 und 6 gehen. Keine dieser Ellipsen kann auf dem Bogen 3 1 2 6 die ursprüngliche Ellipse schneiden, weil wir sonst zwei Ellipsen mit 5 gemeinsamen Punkten hätten. Jede dieser Ellipsen liegt daher

längs des Bogens 3 1 2 6 entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb der ursprünglichen Ellipse. Diejenigen Nachbarellipsen, die ganz ausserhalb liegen, haben einen geringeren Abstand von den Punkten 1 und 2 als die ursprüngliche. Daher ist L entweder kleiner geworden, oder die L_ν sind für die neue Ellipse nicht mehr gleich, und für diesen Fall zeigten wir schon, dass L verkleinert werden kann.

Für Hyperbel und Parabel gilt derselbe Satz. Unser für die Ellipse gültiger Schluss, dass ein Schnittpunkt vorhanden sein müsste, falls der neue Kegelschnitt längs eines gewissen Bogens nicht entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des alten läge, lässt sich dort durch einfache projektive Erwägungen ersetzen.

Die Frage nach der Eindeutigkeit oder Vieldeutigkeit der Aufgabe ist hier nicht so einfach zu entscheiden, als bei dem Tchebychefschen Problem, da Eindeutigkeit allgemein jedenfalls nicht existiert. Dies rührt daher, dass man von einer Reihenfolge der gegebenen Punkte, ehe der gesuchte Annäherungs-Kegelschnitt bekannt ist, nicht reden kann. In der That ist in unserer Figur, die einen Fall der Zweideutigkeit der Lösung zeigt, die Reihenfolge der Punkte in Bezug auf jeden der beiden Kegelschnitte eine verschiedene.



2. Das gewöhnliche Interpolationsproblem.

Es seien $(n+2)$ Punkte

$$(x_1 y_1) \quad (x_2 y_2) \ \ldots \ (x_{n+2} y_{n+2})$$

gegeben, und es sei gesucht ein Polynom $n$ten Grades

$$y = x^n p_n + x^{n-1} p_{n-1} + \cdots + p_0$$

von der Art, dass die grösste der Differenzen

$$y - y_\nu \qquad \nu = 1, 2 \ldots n+2$$

möglichst klein sei.

Unsere Theorie liefert uns sofort die Lösung: Sind die Punkte in der Richtung der wachsenden Abscissen angeordnet,

also $x_1 < x_2 < x_3 \ldots$ (den Fall zweier gleichen x, der einer Zweideutigkeit von $\varphi(x)$ entsprechen würde, schliessen wir aus), so müssen alle $(n+2)$ Werte $y - y_v$ absolut gleich, aber abwechselnd positiv und negativ sein. Dies führt uns auf folgendes System linearer Gleichnngen:

$$\begin{aligned}
p_n x_1^n + p_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + p_0 - L &= y_1 \\
p_n x_2^n + p_{n-1} x_2^{n-1} + \cdots + p_0 + L &= y_2 \\
&\vdots \\
p_n x_{n+2}^n + p_{n-1} x_{n+2}^{n-1} + \cdots + p_0 + (-1)^{n+2} L &= y_{n+1}
\end{aligned}$$

wo die x bekannt, die p und L zu bestimmen sind. Die Determinante dieses System ist die folgende:

$$\begin{vmatrix}
x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & 1 & -1 \\
x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & 1 & +1 \\
x_3^n & x_3^{n-1} & \cdots & 1 & -1 \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
x_{n+2}^n & x_{n+2}^{n-1} & \cdots & 1 & (-1)^{n+2}
\end{vmatrix}$$

und man kann leicht sehen, dass diese Determinante, wie unsere allgemeine Theorie dies auch fordert, stets von 0 verschieden ist. Entwickeln wir nach den Elementen der letzten Spalte, so erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & 1 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & 1 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & 1 \\ x_{n+2}^n & x_{n+2}^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & 1 \\ x_3^n & x_3^{n-1} & \cdots & 1 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ x_{n+2}^n & x_{n+2}^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

wo die Summe das Vorzeichen $(-1)^{n-2}$ erhält. Diese Summe kann nicht verschwinden; denn alle Determinanten haben dieselben Vorzeichen, weil in jeder von ihnen die Basis der Elemente einer Zeile grösser ist als die aller vorhergehenden, und hierdurch das

Vorzeichen des Differenzenprodukts, dem diese Determinanten gleich sind, bestimmt ist, nämlich gleich dem von $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Die Bedingung $x_1 < x_2 < x_3 \ldots$ ist dabei durchaus wesentlich, man findet z. B. für $n = 2$ durch Ausrechnen:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 x_1 & 1 & -1 \\ x_2^2 x_2 & 1 & 1 \\ x_3^2 x_3 & 1 & -1 \\ x_4^2 x_4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4).$$

Die Determinante kann also für voneinander verschiedene x verschwinden, wenn x_2 und x_4 zwischen x_1 und x_3 liegen. Geometrisch bedeutet dies: Wenn 4 Punkte gegeben sind und eine Parabel gesucht wird, die in der Richtung der y-Axe von allen 4 gleich weit entfernt ist, so ist dies stets möglich, wenn die Punkte nach wachsenden Abscissen geordnet abwechselnd auf der einen und der andern Seite der Parabel liegen sollen, dagegen unter Umständen unmöglich, wenn zwei Punkte hintereinander auf derselben Seite der Parabel liegen sollen.

Sind mehr als $(n+2)$ Punkte gegeben, so ist folgendermassen zu verfahren: Man wähle auf alle möglichen Weisen aus den gegebenen Punkten $(n+2)$ aus und berechne die hierdurch eindeutig bestimmte Kurve nach dem oben angegebenen Verfahren. Unter allen so erhaltenen Kurven giebt es eine und nur eine, bei der der Abstand jedes der Punkte, die nicht zu ihrer Berechnung gedient haben kleiner ist als der Abstand der $n+2$. Unter Abstand ist dabei die Entfernung in der Richtung der Ordinate verstanden, bei „kleiner" ist Gleichheit nicht ausgeschlossen.

Der Beweis ergiebt sich aus der allgemeinen Theorie. Das Interpolationsproblem liefert also die wesentlichsten Resultate der Tchebychefschen Annäherungsmethoden. Das Problem reduziert sich aber hier auf die Auflösung linearer Gleichungen.

Kapitel II. Aufstellung der Annäherungs-Funktion.

§ 1. Analytische Formulierung.

Wir kehren zu dem Problem zurück, zu der gegebenen stetigen Funktion $\varphi(x)$ für das Intervall $-1 \cdots +1$ die Annähe-

rungs-Funktion zu bestimmen. Wenn wir nun zunächst unsere Bedingungen für die Annäherungsfunktion S. 15 ff. analytisch ausdrücken wollen, müssen wir bedenken, dass, weil $|f_n(x) - \varphi(x)|$ im Intervall $-1 \cdots +1$ kleiner oder gleich L, die Werte von $|f_n(x) - \varphi(x)| = L$ Extremwerte darstellen, mit Ausnahme der Werte $x = \pm 1$, falls für sie die Gleichung statt hat.

$f_n(x)$ unterliegt dann den Bedingungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
&f_n(x_1) - \varphi(x_1) = L \\
&\quad (x_1 + 1)\,(f_n'(x_1) - \varphi'(x_1)) = 0 \\
&f_n(x_2) - \varphi(x_2) = -L \\
&\quad f_n'(x_2) - \varphi'(x_2) = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&f_n(x_{n+1}) - \varphi(x_{n+1}) = (-1)^n L \\
&\quad f'(x_{n+1}) - \varphi'(x_{n+1}) = 0 \\
&f_n(x_{n+2}) - \varphi(x_{n+2}) = (-1)^{n+1} L \\
&\quad (x_{n+2} - 1)\,(f'(x_{n+2}) - \varphi'(x_{n+2})) = 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Praktisch ist jedoch häufig die folgende Form bequemer, obgleich sich in ihr der Grad der Gleichungen verdoppelt.

Es sollen die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&(f_n(x) - \varphi(x))^2 - L^2 = 0 \\
&\quad (x^2 - 1)\,(f_n'(x) - \varphi'(x)) = 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

zwischen $-1 \cdots +1$ $(n+2)$ voneinander verschiedene gemeinsame Wurzeln haben.

Indess sind diese analytisch formulierten Bedingungen nicht mehr hinreichend, sondern bloss noch notwendig. Denn sie enthalten nicht mehr unter allen Umständen die Bedingung, dass

$$|f_n(x) - \varphi(x)| \leqq L \qquad \text{für} \qquad -1 \leqq x \leqq 1,$$

worauf wir später zurückzukommen haben.

Aus der Definition der Annäherungs-Funktion folgt ein Satz, der im Folgenden mehrfach angewandt werden wird: Die Annäherungs-Funktion lässt Multiplikation mit einer Konstanten zu. Ist $f_n(x)$ Annäherungsfunktion zu $\varphi(x)$, so ist im selben Intervall $C \cdot f_n(x)$ Annäherungsfunktion zu $C \cdot \varphi(x)$.

§ 2. Aufstellung für den einfachsten Fall.

Es sei

$$\varphi(x) = x^{n+1}$$

die Abweichung von $x^{n+1} - f_n(x)$ von 0 soll ein Minimum werden.

Die zweite der Gleichungen (2) ist dann nur vom Grade $(n+2)$; es müssen daher alle ihre Wurzeln auch Wurzeln der ersten Gleichung (2) sein. Nun sind die n Wurzeln, die nicht $(x^2-1) = 0$ sondern $f_n'(x) - \varphi'(x) = 0$ erfüllen, sämtlich Doppelwurzeln von $(f_n(x) - \varphi(x))^2 - L^2 = 0$, weil ja eben die Ableitung der linken Seite verschwindet, d. h.

$$(f_n(x) - \varphi(x))^2 - L^2 = 0$$

hat mit

$$(f_n'(x) - \varphi'(x))^2 = 0$$

$2n$ Wurzeln gemein. Die übrig bleibenden Wurzeln von $(f_n(x) - \varphi(x))^2 - L^2 = 0$ müssen nach dem Obigen $x = \pm 1$ sein. Also hat

$$(f_n(x) - \varphi(x))^2 - L^2 = 0$$

mit

$$(x^2-1)\,(f_n'(x) - \psi'(x))^2 = 0$$

$2n+2$ d. h. alle Wurzeln gemein, und wenn wir bedenken, dass in der ersten Gleichung der Koefficient des höchsten Gliedes gleich 1, in der zweiten gleich $(n+1)^2$ ist, so haben wir, wenn wir kurz

$$\varphi(x) - f_n(x) = x^{n+1} - f_n(x) = y$$

setzen, die Differentialgleichung:

$$y^2 - L^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\,(x^2-1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

die durch Trennung der Variabeln ergiebt:

$$\frac{dy}{\sqrt{L^2-y}} = (n+1)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin\frac{y}{L} = (n+1)\arcsin x + C.$$

Hieraus ersieht man: Wenn x das Intervall $-1 \cdots +1$ durch-

läuft, arc sin x also von $-\frac{\pi}{2} \ldots + \frac{\pi}{2}$ und $(n+1)$ arc sin x von $-\frac{n+1}{2}\pi$ bis $\frac{n+1}{2}\pi$ wandert, so durchwandert die rechte Seite ein Intervall von $(n+1)\pi$, daher schwankt $\frac{y}{L}$ $(n+1)$ mal von -1 zu $+1$ und y von $-L$ zu $+L$.

Um C zu bestimmen, beachten wir die obige Bemerkung, dass für $x = \mp 1$ y gleich $\pm L$ sein muss. Bei geradem n wird dem durch $C = 0$, bei ungeradem durch $C = \frac{\pi}{2}$ genügt, wobei, worauf es aber nicht ankommt, C nur bis auf Vielfache von π bestimmt ist.

1) n sei gerade; es sei $x = \sin z$

$$\text{arc sin}\,\frac{y}{L} = (n+1)\,z$$

$$\frac{y}{L} = \sin(n+1)\,z$$

$\frac{y}{L}$ = dem immag. Teil von $\cos(n+1)z + i\sin(n+1)z$

= „ „ „ „ $(\cos z + i\sin z)^{n+1}$.

Wir ziehen von diesem Ausdruck den konjugierten ab und dividieren durch $2i$:

$$\frac{y}{L} = \frac{(\cos z + i\sin z)^{n+1} - (\cos z - i\sin z)^{n+1}}{2i}$$

$$= \pm\frac{1}{2}\left((\sin z + i\cos z)^{n+1} + (\sin z - i\cos z)^{n+1}\right)$$

$$= \pm\frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} + (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}\right)$$

der Koefficient von x^{n+1} ist dabei gleich der Summe der an ungerader Stelle stehenden $(n+1)$ten Binomialkoefficienten. Diese finden wir, wenn wir $(1-1)^{n+1}$ formal entwickeln als $\frac{2^{n+1}}{2} = 2^n$. Da nun der höchste Koefficient in y gleich 1 sein muss, so folgt

$$L = \mp\frac{1}{2^n}$$

$$y = \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{n+1}$$

2) n sei ungerade;

$$\begin{aligned}\frac{y}{L} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + (n+1)z\right)\\ &= \cos(n+1)z\\ &= \text{dem reellen Teil von } \cos(n+1)z + i\sin(n+1)z\\ &= \frac{1}{2}\left((\cos z + i\sin z)^{n+1} + (\cos z - i\sin z)^{n+1}\right)\\ &= \mp\frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} + (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}\right)\end{aligned}$$

d. h. wir erhalten dasselbe Resultat wie oben.

$$(3) \qquad y = \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{n+1}$$

ist diejenige ganze rationale Funktion $(n+1)$ten Grades, die sich von -1 bis $+1$ am wenigsten von 0 entfernt und 1 zum höchsten Koefficienten hat.

$x^{n+1} - y$ ist diejenige Funktion $n$ten Grades, die x^{n+1} am besten annähert. Man sieht, dass in (3) Glieder $n$ten Grades nicht vorkommen, wie dies auch aus unserer Bemerkung am Schluss von § 4 des vorigen Kapitels folgt. Daher ist $x^{n+1} - y$ nur vom $(n-1)$ten Grade, und daher sicher diejenige Funktion $(n-1)$ten Grades, die x^{n+1} am besten annähert.

Diejenige Funktion $n$ten Grades, die x^{n+2} am besten annähert, ist

$$x^{n+2} - \left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{n+2}\right].$$

§ 3. Die Annäherungsfunktion beliebiger analytischer Funktionen.

1. Analytischer Charakter der Koefficienten.

Nachdem wir die Annäherungsfunktion für die einfachsten Fälle $\varphi(x) = x^{n+1}$ und $\varphi(x) = x^{n+2}$ aufgestellt haben, gehen

wir zu dem allgemeinen Fall der Darstellung analytischer Funktionen über. Wir werden dann freilich keine endliche geschlossene Form, sondern nur ein konvergentes Verfahren erwarten dürfen, das eine annäherungsweise Darstellung der eindeutig definierten Annäherungsfunktion mit jeder beliebigen Genauigkeit gestattet. Dabei ist der Grundgedanke: Das Intervall, durch das die Annäherungsfunktion definiert ist, als klein vorauszusetzen, die Intervallgrenzen als Parameter einzuführen, und die Annäherungsfunktion nach Potenzen dieses Parameters zu entwickeln.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, die Intervallgrenzen seien $-h$ und $+h$, und die darzustellende Funktion $\varphi(x)$, von der Konvergenz in diesem Intervall vorausgesetzt wird, sei

$$\varphi(x) = k_0 + k_1 x + \cdots + k_n x^n + k_{n+1} x^{n+1} + \cdots,$$

wo wir weiter noch voraussetzen wollen, dass k_{n+1} und k_{n+2} nicht beide zugleich verschwinden. Wir setzen

$$x = hz,$$

sodass das definierende Intervall nunmehr stets

$$z = -1 \cdots +1.$$

Es wird

$$\varphi(x) = k_0 + k_1 hz + k_2 h^2 z^2 + \cdots + k_n h^n z^n + k_{n+1} h^{n+1} z^{n+1} + \cdots.$$

Aus der Definition der Annäherungsfunktion folgt, dass die Annäherungsfunktion von $\varphi(x)$ gleich ist

$$k_0 + k_1 hz + \cdots + k_n h^n z^n$$

vermehrt um die Annäherungsfunktion von

$$k_{n+1} h^{n+1} z^{n+1} + k_{n+2} h^{n+2} z^{n+2} + \cdots$$

und dass letztere wiederum gleich ist (nach dem Schluss des § 1):

$$h^{n+1} V,$$

wo V die Annäherungsfunktion von

$$k_{n+1} z^{n+1} + k_{n+2} hz^{n+2} + k_{n+3} h^2 z^{n+3} + \cdots$$

bedeutet. Setzen wir

$$k_0 + k_1 hz + \cdots k_n h^n z^n = \varphi_n(z),$$

so hat also die gesuchte Annäherungsfunktion die Form

$$\varphi_n(z) + h^{n+1} V.$$

Ich behaupte nun:

V lässt sich in eine in einem endlichen Intervall *h* konvergierende Reihe

$$V = V_0 + hV_1 + h^2 V_2 + \cdots$$

entwickeln, deren Koefficienten Polynome *n*ten Grades von *z* sind, deren Koefficienten nur noch von den *k* abhängen.

Ist

$$V = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \cdots p_0,$$

so lauten die Bedingungen für *V* nach (1):

$$\begin{aligned}
&p_n z_1^n + p_{n-1} z_1^{n-1} + \cdots + p_0 - (k_{n+1} z_1^{n+1} + hk_{n+2} z_1^{n+2} + \cdots) - L = 0 \\
(4)\quad &p_n z_2^n + p_{n-1} z_2^{n-1} + \cdots + p_0 - (k_{n+1} z_2^{n+1} + hk_{n+2} z_2^{n+2} + \cdots) + L = 0 \\
&\quad\vdots \\
&p_n z_{n+2}^n + p_{n-1} z_{n+2}^{n-1} + \cdots + p_0 - (k_{n+1} z_{n+2}^{n+1} + hk_{n+2} z_{n+2}^{n+2} + \cdots) + (-1)^{n+2} L = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(z_1 + 1) \frac{\partial}{\partial z_1} (p_n z_1^n + p_{n-1} z_1^{n-1} + \cdots + p_0 - (k_{n+1} z_1^{n+1} + hk_{n+2} z_1^{n+2} + \cdots)) = 0 \\
(5)\quad &\frac{\partial}{\partial z_2} (p_n z_2^n + p_{n-1} z_2^{n-1} + \cdots + p_0 - (k_{n+1} z_2^{n+1} + hk_{n+2} z_2^{n+2} + \cdots)) = 0 \\
&\quad\vdots \\
&(z_{n+2} - 1) \frac{\partial}{\partial z_{n+2}} (p_n z_{n+2}^n + p_{n-1} z_{n+2}^{n-1} + \cdots + p_0 - (k_{n+1} z_{n+2}^{n+1} + hk_{n+2} z_{n+2}^{n+2} + \cdots)) = 0
\end{aligned}$$

die wir abgekürzt

$$\begin{aligned}
F_1 - L &= 0 \\
F_2 + L &= 0 \ldots \\
(z_1 + 1) \frac{\partial F_1}{\partial z_1} &= 0 \\
\frac{\partial F_1}{\partial z_2} &= 0 \ldots
\end{aligned}$$

schreiben wollen.

Für $h = 0$ haben wir die Gleichungen berechnet. Es ist dort $\frac{\partial F_1}{\partial z_1} \neq 0$ $\frac{\partial F_{n+2}}{\partial z_{n+2}} \neq 0$. Wegen der Stetigkeit muss dies auch noch für ein endliches Intervall h der Fall sein. Der Einfachheit halber lassen wir also die erste und letzte der Gleichungen (5) weg und ersetzen sie durch $z_1 = -1$, $z_{n+2} = +1$. Die Funktionaldeterminante der übrigen $2n + 2$ Gleichungen mit den $2n + 2$ Unbekannten

$$p_n, p_{n-1}, \ldots p_0, L, z_2, z_3, \ldots z_{n+1}$$

lautet jetzt:

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial p_n} & \frac{\partial F_1}{\partial p_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial p_0} & \frac{\partial F_1}{\partial L} & \frac{\partial F_1}{\partial z_2} & \frac{\partial F_1}{\partial z_3} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_{n+1}} \\
\frac{\partial F_2}{\partial p_n} & \frac{\partial F_2}{\partial p_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial p_0} & \frac{\partial F_2}{\partial L} & \frac{\partial F_2}{\partial z_2} & \frac{\partial F_2}{\partial z_3} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial z_{n+1}} \\
\vdots & & & & & & & & \\
\frac{\partial F_{n+2}}{\partial p_n} & \frac{\partial F_{n+2}}{\partial p_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial F_{n+2}}{\partial p_0} & \frac{\partial F_{n+2}}{\partial L} & \frac{\partial F_{n+2}}{\partial z_2} & \frac{\partial F_{n+2}}{\partial z_3} & \cdots & \frac{\partial F_{n+2}}{\partial z_{n+1}} \\
\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2 \partial p_n} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2 \partial p_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2 \partial p_0} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2 \partial L} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2^2} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2 \partial z_3} & \cdots & \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2 \partial z_{n+1}} \\
\vdots & & & & & & & & \\
\frac{\partial^2 F_{n+1}}{\partial z_{n+1} \partial p_n} & \frac{\partial^2 F_{n+1}}{\partial z_{n+1} \partial p_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_{n+1}}{\partial z_{n+1} \partial p_0} & \frac{\partial^2 F_{n+1}}{\partial z_{n+1} \partial L} & \frac{\partial^2 F_{n+1}}{\partial z_{n+1} \partial z_2} & \frac{\partial^2 F_{n+1}}{\partial z_{n+1} \partial z_3} & \cdots & \frac{\partial^2 F_{n+1}}{\partial z_{n+1}^2}
\end{vmatrix}$$

Man sieht leicht, dass alle Elemente in dem Rechteck rechts oben verschwinden; denn es ist z. B. in der zweiten Zeile $\frac{\partial F_2}{\partial z_2} = 0$ nach (5) und $\frac{\partial F_2}{\partial z_3} = \frac{\partial F_2}{\partial z_4} = \cdots = 0$, weil $z_3, z_4 \ldots$ in F_2 nicht vorkommen. Aus letzterem Grunde verschwinden auch die Terme des unteren rechten Rechtecks mit Ausnahme der Diagonalglieder. Die Determinante ist demnach gleich:

$$\begin{vmatrix}
z_1^n & z_1^{n-1} & \ldots & z_1 & 1 & -1 \\
z_2^n & z_2^{n-1} & \ldots & z_2 & 1 & 1 \\
\vdots & & & & & \\
z_{n+2}^n & z_{n+2}^{n-1} & \ldots & z_{n+2} & 1 & (-1)^{n+2}
\end{vmatrix} \cdot \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2^2} \cdot \frac{\partial^2 F_3}{\partial z_3^2} \cdots \frac{\partial^2 F_{n+1}}{\partial z_{n+1}^2} \cdot$$

Diese Determinante ist nach S. 29 von 0 verschieden, und die zweiten Ableitungen sind es jedenfalls für $h = 0$ auch.

Aus dem Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante folgt, dass sich alle $2n + 2$ Grössen $p_n p_{n-1} \ldots p_0 L z_2 \ldots z_{n+1}$ nach Potenzen von h entwickeln lassen. Schreiten wir auf der reellen positiven Axe h weiter, so sind bis zu dem nächsten singulären Punkt alle diese Grössen eindeutig als Funktionen von h definiert. Es fragt sich aber, inwieweit durch sie unsere Annäherungsfunktion auch wirklich dargestellt wird. Denn die Gleichungeu (4) und (5) sind ja nur notwendig, aber nicht hinreichend. Wir verfolgen den weiteren Verlauf in den z, weil die p sich unter allen Umständen eindeutig aus den z bestimmen.

Für $h = 0$ haben die beiden Gleichungen

$$F \pm L = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

keine andern Wurzeln als die n: $z_2 z_3 \ldots z_{n+1}$ gemeinsam. Dies sind zugleich alle Wurzeln von $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ für $h = 0$. Alle andern Wurzeln dieser Gleichung werden für $h = 0$ unendlich. Wir grenzen nun auf der reellen positiven Axe von h ein Gebiet so ab: Innerhalb dieses Gebietes soll $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ keine andern reellen Wurzeln zwischen -1 und $+1$ haben als diese n, oder es soll doch $|F|$ an den neu hinzukommenden Wurzeln kleiner sein als $|L|$. An der Grenze des Gebietes liegt dann eine Wurzel von $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, für die $F = \pm L$.

Innerhalb dieses Gebietes in h stellt die durch die Gleichungen (4) und (5) definierte analytische Funktion in der That unsere Annäherungsfunktion dar. Denn erstens wird L $(n+2)$ Mal im Intervall $z = -1 \ldots +1$ angenommen. Denn da für $z = z_1 = -1$ $F = +L$ und für $z = z_2$ $F = -L$, und ebenso an dem positiven Ende des Intervalls, so ist klar, dass für den betrachteten Bereich in h unsere n Wurzeln im Intervall $-1 < z < 1$ bleiben müssen. Sodann kann auch für diesen Bereich $|F|$ im Intervall $-1 \lessgtr z \lessgtr 1$ nicht grösser werden als $|L|$. Denn dann müsste $|F|$ ein Maximum haben, für das es grösser wäre als L, was ja nach Definition ausgeschlossen ist. Hierdurch sind aber

auch die hinreichenden Bedingungen der Annäherungsfunktion erfüllt.

An der Grenze des Gebietes haben wir nun eine neue gemeinsame Wurzel von $F = \pm L$ und $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$; z. B. kann $\frac{\partial F}{\partial z}$ für $z = \pm 1$ verschwinden. Lassen wir h darüber hinaus wachsen, so kann nun für diese Wurzel von $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ $|F|$ grösser werden als L, und dann stellt die so durch (4) und (5) definierte Funktion die Annäherungsfunktion nicht mehr dar. Wir haben nun zwei Systeme von Gleichungen, denen die Annäherungsfunktion genügen kann; das alte, dem sie für kleinere h genügt, und das neue, das dadurch entsteht, dass wir die neue gemeinsame Wurzel von $F = \pm L$ und $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ an Stelle der ihr im alten System benachbarten unter die

$$z_1 z_2 \ldots z_{n+2}$$

einsetzen, was z. B. auch so geschehen kann, dass wir $\frac{\partial F_1}{\partial z_1} = 0$ statt $z_1 = -1$ einsetzen. Nach unsern Existenz- und Eindeutigkeitssätzen muss eines und nur eines dieser Gleichungssysteme die Annäherungsfunktion liefern. Dieses verfolgen wir auf der reellen Axe der h weiter, bis wir wieder an eine derartige ausgezeichnete Stelle gelangen. Die ρ sind auch an solchen Stellen stetige Funktionen von h, von den z aber erleidet dabei eines in der Regel einen Sprung.

Ausser diesen Sprungstellen kommen noch irreguläre Punkte im funktionentheoretischen Sinn in Betracht, bei denen die Konvergenz der Reihen in h aufhört, was bei den eben besprochenen Punkten im Allgemeinen nicht der Fall ist. Betrachten wir die Funktionaldeterminante, so sieht man, dass diese nur dann gleich 0 wird, wenn der Faktor $\frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z_3^2} \cdots \frac{\partial^2 F}{\partial z_{n+1}^2}$, zu dem $\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial z_{n+2}^2}$ noch hinzukommen kann, verschwindet. Die zweite Ableitung an diesen Stellen kann nur verschwinden, wenn zugleich auch die dritte verschwindet, weil diese Stellen ja wirkliche Maxima bezw. Minima sein müssen. Verschwinden aber diese Ableitungen, so hat an dieser Stelle $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ mit $F \pm L = 0$ eine Doppelwurzel

gemeinsam, die betreffende Grösse z also einen Verzweigungspunkt. Alsdann ist wie oben zu untersuchen, welcher der beiden Zweige im weitern Verlauf die Annäherungsfunktion darstellt. Ist die eine der beiden zusammenfallenden gemeinsamen Wurzeln von $F \pm L = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ im Allgemeinen komplex und nur gerade für den Verzweigungspunkt reell, so kann sie für die Annäherungsfunktion nicht in Betracht kommen.

Die Koefficienten der Annäherungsfunktion sind abteilungsweise analytische Funktionen der Intervallgrenze h. Die einzigen hierbei vorkommenden Irregularitäten sind die Sprungstellen, an denen die Koefficienten von einer analytischen Funktion zu einer andern, der ersten im funktionentheoretischen Sinne völlig fremden übergehen, und die Verzweigungspunkte, die dort liegen, wo $F = \pm L$ eine vierfache Wurzel hat.

2. Algorithmus der Ausrechnung.

Bestimmung von V_1.

Wir setzen:

$$V = V_0 + hV_1 + h^2V_2 + h^3V_3 + \cdots$$
$$L = L_0 + hL_1 + h^2L_2 + h^3L_3 + \cdots$$

und ferner:

$$V_1 + hV_2 + h^2V_3 + \cdots = \overline{V}_1$$
$$V_2 + hV_3 + h^2V_4 + \cdots = \overline{V}_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L_1 + hL_2 + h^2L_3 + \cdots = \overline{L}_1$$
$$L_2 + hL_3 + h^2L_4 + \cdots = \overline{L}_2,$$

sodass die V aus den $\overline{V}$ und die L aus den $\overline{L}$ durch Nullsetzung von h erhalten werden.

$$V = V_0 + h\overline{V}_1$$

ist die Annäherungsfunktion von

$$k_{n+1}z^{n+1} + hk_{n+2}z^{n+2} + h^2k_{n+3}z^{n+3} + \cdots,$$

die aber für $h = 0$ in die Annäherungsfunktion von $k_{n+1}z^{n+1}$

übergeht, die uns aus dem vorigen Paragraphen bekannt ist. Es ist nämlich

$$V_0 = k_{n+1}(z^{n+1} - y),$$

wenn wir nach (3) unter y verstehen:

$$y = \left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^{n+1}.$$

Es ist also

$$V = k_{n+1}(z^{n+1} - y) + h\overline{V}_1.$$

Diese Funktion muss den einer Annäherungsfunktion charakteristischen Gleichungen (2) genügen:

$$[k_{n+1}(z^{n+1} - y) + h\overline{V}_1 - (k_{n+1}z^{n+1} + hk_{n+2}z^{n+2} + \cdots)]^2 - L^2 = 0$$

$$(z^2-1)\frac{d}{dz}[k_{n+1}(z^{n+1} - y) + h\overline{V}_1 - (k_{n+1}z^{n+1} + hk_{n+2}z^{n+2} + \cdots)] = 0$$

oder

$$(6) \qquad (hk_{n+2}z^{n+2} + h^2k_{n+3}z^{n+3} + \cdots + k_{n+1}y - h\overline{V}_1)^2 - L^2 = 0$$

$$(7) \qquad (z^2-1)\frac{d}{dz}(hk_{n+2}z^{n+2} + h^2k_{n+3}z^{n+3} + \cdots + k_{n+1}y - h\overline{V}_1) = 0$$

die $(n+2)$ Wurzeln miteinander gemein haben sollen. Statt der Gleichung (7) betrachte ich nun die einfachere:

$$(z^2-1)\frac{d}{dz}(k_{n+1}y) = 0$$

$$(8) \qquad (z^2-1)\frac{dy}{dz} = 0$$

und behaupte: Ist $\overline{z}$ eine Wurzel der Gleichung (8), so existiert eine Wurzel $\overline{z} + \mathfrak{P}(h)$ der Gleichung (7), wo $\mathfrak{P}$, wie stets im Folgenden, eine Potenzreihe ohne absolutes Glied bedeutet. In der That, denken wir uns irgend eine Wurzel von (7), so muss sie sich nach Potenzen von h entwickeln lassen, wenn nicht gerade $h = 0$ ein Verzweigungspunkt ist. Dies ist aber nicht der Fall, weil, wie wir wissen, die durch Nullsetzung von h aus (7) hervorgehende Gleichung (8) keine Doppelwurzeln hat. Das von h freie Glied ist natürlich der Wert der Wurzel für $h = 0$ d. h. $\overline{z}$. Dies Verfahren gilt bei den n Wurzeln von (7), die für $h = 0$

nicht unendlich werden, und ausserdem bei $z = \pm 1$, wo $\mathfrak{P}(h)$ identisch 0 ist, also bei $(n+2)$ Wurzeln. Es soll nun (6) durch $\bar{z} + \mathfrak{P}(h)$ befriedigt werden, und zwar identisch in h. Die Koefficienten von h in (6) müssen also einzeln verschwinden, und ich muss folglich zu einer richtigen Gleichung kommen, wenn ich in (10), nachdem $\bar{z} + \mathfrak{P}(h)$ eingesetzt ist, die Koefficienten von $h^2, h^3 \ldots$ weglasse, und nur das absolute Glied und das mit h multiplicierte beibehalte. Ich kann dann, da alle Wurzeln $\bar{z} + \mathfrak{P}(h)$ nach (7) Doppelwurzeln von (6) sind, statt $\bar{z} + \mathfrak{P}(h)$ auch bloss $\bar{z}$ einsetzen, und erhalte so: Es sollen:

$$(9) \qquad (k_{n+1}^2 y^2 - L_0^2) + [2k_{n+1} y (k_{n+2} z^{n+2} - V_1) - 2L_1]\, h = 0$$

$$(8) \qquad (z^2 - 1)\, \frac{dy}{dz} = 0$$

$(n+2)$ Wurzeln gemein haben. Nun wissen wir, dass für alle Wurzeln von (8) $k_{n+1}^2 y^2 - L_0^2 = 0$, und folglich haben auch folgende Gleichungen $n+2$ Wurzeln gemein:

$$(10) \qquad -2hL_1 + 2k_{n+1} y (k_{n+2} z^{n+2} - V_1)\, h = 0$$

$$(8) \qquad (z^2 - 1)\, \frac{dy}{dz} = 0.$$

Multiplicieren wir (10) mit y und setzen wieder $k_{n+1}^2 y^2 = L_0^2$ ein

$$(11) \qquad -2hL_1 y + 2L_0^2 (k_{n+2} z^{n+2} - V_1)\, h = 0$$

$$(8) \qquad (z^2 - 1)\, \frac{dy}{dz} = 0.$$

Diese Gleichungen sind beide vom Grade $(n+2)$; wenn sie $(n+2)$ Wurzeln gemein haben, so ist dies nur möglich wenn:

$$(12) \qquad -2hL_1 y + 2L_0^2 (k_{n+2} z^{n+2} - V_1) h - C(z^2 - 1)\, \frac{dy}{dz} = 0$$

wo C von z, nicht aber von h unabhängig ist. In (12) kommt ein Glied mit z^{n+1} nur im ersten Term vor, und da (12) identisch in z gilt, folgt

$$L_1 = 0$$

$$(13) \qquad V_1 = k_{n+2} z^{n+2} - \frac{C}{2hL_0^2}\, (z^2 - 1)\, \frac{dy}{dz}.$$

V_1 muss eine Funktion $n$ten Grades in z sein; der Koefficient von z^{n+2} muss verschwinden; daher

$$C = \frac{2hL_0^2 k_{n+2}}{n+1}. \tag{14}$$

Wir erhalten somit als Schlussresultat:

$$V_1 = k_{n+2}\left(z^{n+2} - \frac{z^2-1}{n+1}\,\frac{dy}{dz}\right). \tag{15}$$

Diese Formel gilt, da oben bei Aufstellung von (8) durch k_{n+1} dividiert wurde, nur für $k_{n+1} \neq 0$. Die erhaltene Formel (15) ist nicht identisch mit der Annäherungsfunktion für $k_{n+2}z^{n+2}$. Die Annäherungsfunktion einer Summe ist nicht identisch mit der Summe der Annäherungsfunktionen.

Bestimmung der höheren Koefficienten von V.

Wir erweitern die vorige Methode, sodass sie gestattet, die höheren Koefficienten von

$$V = V_0 + hV_1 + h^2V_2 + \ldots$$

zu berechnen, sobald die niedrigeren, die aber nicht 0 sein dürfen, bekannt sind. Diese Methode wird also auch bei $k_{n+1} = 0$ wenn $k_{n+2} \neq 0$ zum Ziel führen.

Es seien $V_0\ V_1 \cdots V_{l-1}$ gefunden, und wir wollen die folgenden Koefficienten bis V_{2l-1} berechnen. Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
&V_0 + hV_1 + \ldots + h^{l-1} = V_g\\
&k_{n+1}z^{n+1} + hk_{n+2}z^{n+2} + \ldots + k_{n+l}h^{l-1}z^{n+l} - V_g = y_g\\
&V_l + hV_{l+1} + h^2V_{l+2} + \ldots + h^{l-1}V_{2l-1} = V^{(l)}\\
&k_{n+l+1}z^{n+l+1} + hk_{n+l+2}z^{n+l+2} + \ldots + k_{n+2l}h^{l-1}z^{n+2l} = \varphi^{(l)}\\
&k_{n+2l+1}z^{n+2l+1} + hk_{n+2l+2}z^{n+2l+2} + \ldots = \overline{\varphi}_{2l}.
\end{aligned}$$

Die für V charakteristischen Gleichungen lauten alsdann: Es sollen

$$[y_g + h^l\varphi^{(l)} + h^{2l}\overline{\varphi}_{2l} - h^lV^{(l)} - h^{2l}\overline{V}_{2l}]^2 - L^2 = 0$$

$$(z^2-1)\,\frac{d}{dz}\,[y_g + h^l\varphi^{(l)} + h^{2l}\overline{\varphi}_{2l} - h^lV^{(l)} - h^{2l}\overline{V}_{2l}] = 0$$

$n+2$ Wurzeln zwischen $-1 \cdots +1$ gemeinsam haben. Wir sehen jetzt wieder, dass die mit h^{2l} multiplicierten Terme keinen Einfluss auf das von uns gesuchte $V^{(l)}$, das die mittleren Potenzen von V, von V_l bis V_{2l-1} umfasst, haben können. Denken wir uns nämlich eine Wurzel der zweiten Gleichung nach Potenzen von h entwickelt, was ja möglich ist, weil diese Gleichung für $h = 0$ in $(z^2-1)\frac{dy}{dz} = 0$ übergeht, ein Verzweigungspunkt also nicht vorliegen kann, so können die Koefficienten von h^{2l} auch erst auf die $2l$ten Potenzen dieser Wurzelentwickelung einwirken, während die niedrigeren Potenzen mit denen der Wurzeln von

$$(z^2-1)\frac{d}{dz}(y_g + h^l\varphi^{(l)} - h^l V^{(l)}) = 0$$

übereinstimmen. Die Wurzeln der zweiten Gleichung in die erste eingesetzt müssen diese identisch in h befriedigen; wir können also die Potenzen $h^{2l} \ldots$ weglassen. Dies ergiebt, dass auch die beiden folgenden Gleichungen $n+2$ Wurzeln zwischen -1 und $+1$ gemein haben müssen:

$$\begin{aligned} &y_g^2 + 2y_g(\varphi^{(l)} - V^{(l)})h^l - L_g^2 - 2h^l L_g L^{(l)} = 0 \\ &(z^2-1)\frac{d}{dz}(y_g + h^l\varphi^{(l)} - h^l V^{(l)}) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

wo aber, was wir durch unsere Zeichen nicht genau ausdrücken können, in der ersten Gleichung die noch darin enthaltenen Potenzen $h^{2l} \ldots$ wegzulassen sind. Wir werden jedoch sehen, dass es hierauf nicht ankommt.

Wir gehen in der Vereinfachung noch weiter, indem wir die zweite Gleichung (16) durch eine Gleichung

$$(z^2-1)\,W = 0 \tag{17}$$

ersetzen, die folgendermassen definiert ist: Die Wurzeln der zweiten Gleichung (16) sollen, soweit sie für $h = 0$ endlich bleiben, nach Potenzen von h entwickelt, in den ersten l Potenzen (h^l ausschliesslich) mit den Wurzeln von (17) übereinstimmen. (17) soll keine andern Wurzeln haben als diese.

Es ist zunächst zu zeigen, wie ganz allgemein eine solche Funktion W zu finden ist. Es sei etwa die Gleichung

$$u + hv = 0$$

gegeben, wo u und v ganze rationale Funktionen von x, u von h unabhängig und v eine ganze rationale Funktion von h ist. Der Grad in x von v sei höher als der von u, sodass für $h = 0$ mindestens eine Wurzel von $u + hv = 0$ unendlich wird. $u = 0$ habe keine Doppelwurzeln. Es ist die Aufgabe, eine Gleichung zu suchen, deren Wurzeln sich von denen von $u + hv = 0$ nur um Potenzen $h^m, h^{m+1} \ldots$ unterscheiden, und deren Grad in x nicht höher ist als der von u.

Bei der vorausgesetzten Abwesenheit von Doppelwurzeln ist diese Bedingung mit der folgenden identisch: Die für $h = 0$ endlich bleibenden Wurzeln von $u + hv = 0$ sollen, in die linke Seite der gesuchten Gleichung eingesetzt, eine Potenzentwickelung erst mit dem $m$ten Glied beginnen lassen.

Die Wurzeln von $u + hv = 0$ lassen in

$$u \qquad \text{(I)}$$

eingesetzt, die von h unabhängigen Glieder verschwinden. Für $m = 1$ ist $u = 0$ die gesuchte Gleichung; ist $m > 1$, so dividiere ich v durch u

$$v = qu + R.$$

R ist sicher nicht von höherem Grade als u. Die Wurzeln von $u + hv = 0$ lassen nun, in

$$u + hR \qquad \text{(II)}$$

eingesetzt, das absolute und das h proportionale Glied verschwinden; denn $u + hR$ ist gleich

$$u + hv - hqu.$$

Da $u + hR$ von nicht höherem Grade ist als u, so ist es für $m = 2$ die verlangte Funktion. Für $m > 2$ dividiere ich v durch $u + hR$

$$v = q_1(u + hR) + R_1$$

und setze die Wurzeln von $u + hv = 0$ in

$$u + hR_1 \qquad \text{(III)}$$

ein, worauf auch die quadratischen Glieder von h verschwinden, da $u + hR_1$ gleich ist

$$u + hv - hq_1(u + hR).$$

Der Rest der Division von v durch (III) liefert uns (IV), und es ist ersichtlich, dass wir nach $(m-1)$ Divisionen eine Funktion

$$u + hR_{m-2}$$

erhalten, die den verlangten Bedingungen genügt.

Denken wir uns nun aus der zweiten der Gleichungen (16) W bestimmt und beachten wir, dass die zweite Gleichung ausdrückt, dass die in Frage kommenden Wurzeln Doppelwurzeln der ersten Gleichung sind, so kommen wir zu dem Satz: Die Wurzeln von

$$(z^2-1)\ W = 0 \tag{17}$$

ergeben, in die erste der Gleichungen (16)

$$y_g^2 + 2y_g(\varphi^{(i)} - V^{(i)})h^i - L_g^2 - 2h^i L_g L^{(i)}$$

eingesetzt, eine Potenzreihe von h, die mit h^{2i} beginnt. Multiplicieren wir mit y_g:

$$(y_g^2 - L_g^2)\, y_g + 2y_g^2(\varphi^{(i)} - V^{(i)})h^i - 2y_g h^i L_g L^{(i)}. \tag{18}$$

Aus (16) ersehen wir, dass für die Wurzeln der zweiten Gleichung (16) und daher auch für die Wurzeln von (17) die beiden Potenzreihen

$$y_g^2 \qquad \text{und} \qquad L_g^2$$

sich nur um Glieder $l$ter Ordnung unterscheiden, wodurch also in (18) sich nur Glieder $2l$ter Ordnung ändern, wenn wir $h^i y_g^2$ durch $h^i L_g^2$ ersetzen. Wir erhalten: Für die Wurzeln von

$$(z^2-1)\ W = 0$$

darf

$$(y_g^2 - L_g^2)\, y_g + 2L_g^2(\varphi^{(i)} - V^{(i)})\, h^i - 2y_g h^i L_g L^{(i)}$$

oder, da wir durch L_g^2 dividieren dürfen, da dies für $h = 0$ nicht verschwindet,

$$V^{(i)}h^i + \frac{L_g}{L^{(i)}}\, y_g . h^i - \varphi^{(i)}h^i - \frac{(y_g^2 - L_g^2)}{2L_g^2}\, y_g \tag{19}$$

erst mit h^{2l} beginnen. Dividieren wir (19) durch $(z^2-1)\, W$

$$(19) = q(z^2-1)\, W + R,$$

so darf der Rest R gleichfalls erst mit dem Gliede h^{2l} beginnen;

denn für alle Wurzeln von $(z^2-1)\,W = 0$ müssen die niedrigeren Potenzen von h in R verschwinden, d. h., da der Grad in z von $(z^2-1)\,W$ höher ist als der von R, sie müssen identisch in z verschwinden. Führen wir die Division aus und bezeichnen den Rest der Division von

$$y_g h^l \qquad \text{durch} \quad (z^2-1)\,W \quad \text{mit} \quad R_0$$

$$\varphi^{(l)} h^l + \frac{y_g^2 - L_g^2}{2L_g^2}\, y_g \quad \text{„} \qquad \text{„} \qquad \text{„} \quad R_1,$$

so haben wir das Resultat, dass

$$V^{(l)} h^l + \frac{L^{(l)}}{L_g} R_0 - R_1$$

erst mit dem Gliede h^{2l} beginnen darf. Dividieren wir

$$R_1 \qquad \text{durch} \qquad R_0$$

$$R_1 = q_0 R_0 + r,$$

so wird nichts geändert, und wir haben:

$$V^{(l)} h^l - r - R_0\left(q_0 - \frac{L^{(l)}}{L_g}\right) = \mathfrak{P}(h^{2l}). \tag{20}$$

Nun vergleichen wir die Grade in z: $(z^2-1)\,W$ ist vom Grade $n+2$, folglich sind die Reste R_0 und R_1 höchstens vom Grade $n+1$ und r höchstens vom Grade n.

Wir wollen zeigen, dass R_0 wirklich vom Grade $(n+1)$ ist. Dividieren wir nämlich y_g durch $(z^2-1)\,W$, so ergiebt dies für $h = 0$ die Division

$$y \qquad \text{durch} \qquad (z^2-1)\,\frac{dy}{dz}.$$

Da hierbei der Dividend vom Grade $n+1$, der Divisor vom Grade $(n+2)$ ist, so ist y der Rest der Division. R_0 hat also folgende Form:

$$R_0 = h^l y + \mathfrak{P}(h^{l+1})$$

d. h. R_0 hat ein mit h' multipliciertes Glied z^{n+1}. Hieraus folgt, dass (20) nur richtig sein kann, wenn

$$q_0 - \frac{L^{(l)}}{L_g} = \mathfrak{P}(h^l), \tag{21}$$

und dann folgt aus (20)

$$V^{(l)}h^{(l)} = r + \mathfrak{P}(h^{2l}). \tag{22}$$

Da nun

$$V^{(l)} = V_l + hV_{l+1} + \cdots + h^{l-1}V_{2l-1}$$

keine höhern Potenzen von h als h^{l-1}, die linke Seite von (22) also keine höheren Potenzen von h als h^{2l-1} enthält, so ist durch (22) $V^{(l)}$ vollkommen bestimmt, indem wir in der Potenzreihe r bloss die höheren Potenzen von h^{2l} an wegzulassen brauchen, um $V^{(l)}h^l$ zu finden. Man sieht auch leicht, dass, wie wir dies verlangen müssen, r mit dem Gliede h^l beginnt. Denn dies ist sowohl bei R_0 als bei R_1, also auch bei dem Reste ihrer Division, bei r der Fall.

Die Gleichung (21), die wir auch, da L_g ein von h freies Glied enthält

$$L^{(l)} = q_0 L_g + \mathfrak{P}(h^l)$$

schreiben können, liefert uns $L^{(l)}$.

Damit ist unsere Aufgabe, ein konvergentes Verfahren zur Aufstellung der Annäherungsfunktion einer beliebigen analytischen Funktion anzugeben, gelöst. Die Lösung geschieht durch eine Kette von Divisionen. Vom $l$ten zum $2l$ten Grad der Annäherung gelangt man, indem man zunächst die Funktion W bildet, wozu nach unserm S. 45—46 angegebenen Verfahren $(l-1)$ Divisionen erforderlich sind. Zwei weitere Divisionen liefern R_0 und R_1, und schliesslich liefert die Division von R_0 durch R_1 den Rest r, der die gesuchten Potenzen der Annäherungsfunktion, und den Quotienten q_0, der die entsprechenden Potenzen der Abweichung bestimmt.

Nach diesem Verfahren kann auch die Annäherungsfunktion einer beliebigen nichtanalytischen Funktion $\varphi(x)$ bestimmt werden. Denn nach § 5 des vorigen Kapitels erhalten wir mit beliebiger Genauigkeit die Annäherungsfunktion von $\varphi(x)$, wenn wir die Annäherungsfunktion einer im ganzen Intervall hinreichend wenig von $\varphi(x)$ verschiedenen Funktion berechnen. Wir ersetzen also $\varphi(x)$ zunächst durch eine analytische Funktion, was mit jeder beliebigen Genauigkeit geschehen kann, und wenden auf diese unsern Algorithmus an.

Kapitel III. Rand- und Nebenbedingungen.

§ 1. Eine Randbedingung.

Es sei gefordert:
Eine ganze rationale Funktion

$$g_n(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$$

zu finden, die an zwei gegebenen Intervallgrenzen gleich einer gegebenen eindeutigen Funktion $\varphi(x)$ wird, und deren Abweichung von $\varphi(x)$ ein Minimum ist.

Existenzbeweis: Es sei L_1 die Abweichung einer beliebigen ganzen rationalen Funktion $n$ten Grades, die der Randbedingung genügt. Es kommen für das Minimum also nur solche Funktionen in Frage, deren Abweichung kleiner oder gleich L_1 ist. Sehen wir von der Randbedingung ab, so erfüllen diese nach unserm algebraischen Hilfssatz S. 7 ein endliches $(n+1)$-dimensionales Prisma. Aus diesem wird durch die Randbedingung ein $(n-1)$-dimensionaler Bereich herausgeschnitten; denn wenn etwa $p_n p_{n-1} \ldots p_2$ gegeben sind, so folgen durch die Randbedingung p_1 und p_0 stets eindeutig. In diesem endlichen $(n-1)$-dimensionalen Bereich folgt aber die Existenz des Minimums nach dem Weierstrassschen Satz.

Wir nehmen $p_n p_{n-1} \ldots p_2$ als frei veränderlich, p_1 und p_0 als abhängig an und haben, wenn $x_1 \ldots x_2$ das gegebene Intervall, $\varphi(x_1) = a \quad \varphi(x_2) = b$

$$p_n x_1^n + p_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + p_2 x_1^2 + p_1 x_1 + p_0 = a$$

$$p_n x_2^n + p_{n-1} x_2^{n-1} + \cdots + p_2 x_2^2 + p_1 x_2 + p_0 = b$$

oder:

$$p_1 x_1 + p_0 = a - p_n x_1^n - p_{n-1} x_1^{n-1} - \cdots - p_2 x_1^2$$

$$p_1 x_2 + p_0 = b - p_n x_2^n - p_{n-1} x_2^{n-1} - \cdots - p_2 x_2^2$$

$$p_1 = c_n p_n + c_{n-1} p_{n-1} + \cdots + c_2 p_2 + \gamma$$

$$p_2 = c'_n p_n + c'_{n-1} p_{n-1} + \cdots + c'_2 p_2 + \gamma',$$

wobei

$$c_n = -\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \qquad c'_n = -(x_1^n x_2 - x_2^n x_1)$$

$$c_{n-1} = -\frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} \qquad c'_{n-1} = -(x_1^{n-1}x_2 - x_2^{n-1}x)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$c_2 = -\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} \qquad c'_2 = -(x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1)$$

$$\gamma = \frac{a-b}{x_1 - x_2} \qquad \gamma' = ax_2 - bx_1.$$

Wir sehen also: Die Form einer ganzen rationalen Funktion $n$ten Grades, deren Willkürlichkeit nur dadurch beschränkt ist, dass $g_n(x_1) = a$, $g_n(x_2) = b$, ist diese:

$$g_n(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_2 x^2 + (c_n p_n + c_{n-1}p_{n-1} + \cdots + c_2 p_2 + \gamma)x + c'_n p'_n + c'_{n-1}p'_{n-1} + \cdots + \gamma'$$

$$= (x^n + c_n x + c'_n)p_n + (x^{n-1} + c_{n-1}x + c'_{n-1})p_{n-1} + \cdots + (x^2 + c_2 x + c'_2)p_2 + \gamma x + \gamma'$$

wo $p_n p_{n-1} \ldots p_2$ noch willkürlich sind.

Auf $g_n(x) - \varphi(x)$ wenden wir wieder unsern allgemeinen Satz S. 14 an. Die Bedingung (1) S. 12 besagt nun, wenn wir

$$(x^n + c_n x + c'_n)\lambda_n + (x^{n-1} + c_{n-1}x + c'_{n-1})\lambda_{n-1} + \cdots + (x^2 + c_2 x + c'_2)\lambda_2$$

mit $h(x)$ bezeichnen:

Es soll unmöglich sein, durch irgend ein System $\lambda_n \lambda_{n-1} \ldots \lambda_2$ zu erreichen, dass $h(x)$ an ν zwischen x_1 und x_2 liegenden Punkten die Werte $s_1 s_2 \ldots s_\nu$ annimmt.

$h(x)$ hat dieselbe Form wie $g_n(x)$, nur dass für $h(x)$ $\gamma = \gamma' = 0$ zu setzen ist, was dann und nur dann erreicht wird, wenn für $h(x)$ $a = b = 0$. $h(x)$ ist also eine Funktion $n$ten Grades, deren Willkürlichkeit nur dadurch beschränkt ist, dass x_1 und x_2 Wurzeln sind. Den Gleichungen (1) S. 12 kann stets dann genügt werden, wenn $s_1 s_2 \ldots s_\nu$ $(n-2)$ oder weniger Zeichenwechsel enthalten. Es sind mindestens $(n-1)$ Zeichenwechsel dazu erforderlich, dass die Gleichungen unauflösbar sind.

Eine notwendige Bedingung für die Funktion kleinster Abweichung unter der gegebenen Randbedingung ist die, dass die Abweichung mindestens n mal in abwechselndem Sinn angenommen wird.

Der Beweis, dass diese Bedingung eindeutig und hinreichend ist, gestaltet sich dem oben S. 16—17 geführten ganz analog.

Die Abweichung der gefundenen Funktion $g_n(x)$ von $\varphi(x)$ sei L. Wenn wir nun nachweisen können, dass

$$|g_n(x) - \varphi(x)|,$$

nachdem es für die Intervallgrenzen 0 war, ausserhalb wieder den Werth L annehmen muss, und zwar in dem Sinn, dass wir hierdurch mit den im Intervall gelegenen Werten zusammen $(n+1)$ Zeichenwechsel erhalten, so ist in dem so erweiterten Intervall $g_n(x)$ mit der ohne Randbedingung aufgestellten Annäherungsfunktion identisch, und es ist also dann die Hinzunahme der Randbedingung mit einer Erweiterung des Intervalls gleichbedeutend. Dies ist z. B. sicher der Fall, wenn $\varphi(x) = x^{n+1}$.

§ 2. Eine Nebenbedingung.

Die Annäherungsfunktion soll monoton sein, d. h. in dem definierenden Intervall entweder nur wachsen, oder nur abnehmen. Wir betrachten nur den einfachsten Fall, in dem $\varphi(x)$ eine Potenz ist. Es soll diejenige von -1 bis $+1$ monotone ganze rationale Funktion der Form

$$F(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \cdots + p_1 x + p_0$$

gesucht werden, die zwischen -1 und $+1$ die Null möglichst gut annähert.

Existenzbeweis: Wir fassen wieder die Abweichung L als Funktion der Koefficienten $p_0 p_1 \ldots p_{n-1}$ auf, und es handelt sich darum nachzuweisen, dass diese Funktion ein Minimum hat. Wir grenzen in dem n-dimensionalen Raum der p ein Gebiet G so ab, dass ausserhalb G L so gross ist, dass wir uns für die Entscheidung der Frage ob L ein Minimum hat, auf G beschränken können. Ausserhalb G können auch noch Minima oder untere Grenzen liegen, wir beschränken uns aber auf das kleinste Minimum, bezw. die kleinste untere Grenze von L, die in G liegen muss.

Jeder Punkt von G repräsentiert eine Funktion der verlangten Form, aber diese Funktionen genügen nicht alle der Bedingung der Monotonität. Denken wir uns von den durch Punkte innerhalb G repräsentierten Funktionen die monotonen gesondert betrachtet, so werden die sie repräsentierenden Punkte ein Ge-

biet G_1 erfüllen, das einen Teil von G ausmacht. Es handelt sich um die Existenz eines Minimums von L in G_1. Es lässt sich wieder der Weierstrasssche Satz von der Existenz eines Minimums einer stetigen Funktion im endlichen Gebiet anwenden, sobald wir wissen, dass die Grenzen des Gebietes G_1 zu diesem gerechnet werden dürfen.

Wir haben also zu entscheiden, ob die Grenzen von G_1 zu G_1 gerechnet werden dürfen oder nicht. Was bedeuten die Grenzen von G_1? Jeder auf einer solchen Grenze liegende Punkt scheidet Funktionen, die im Intervall $-1 \cdots +1$ monoton sind, von nichtmonotonen Funktionen. Auf welche Weise können nun nichtmonotone Funktionen in monotone übergehen? Nichtmonotone Funktionen sind solche, deren Ableitung im betrachteten Intervall Wurzeln von ungerader Vielfachheit hat. Wenn eine Funktion diese Eigenschaft durch stetige Veränderung der Koefficienten und also auch der Wurzeln der Ableitung verlieren soll, so ist dies offenbar nur entweder dadurch möglich, dass eine Wurzel aus dem betrachteten Intervall herausrückt im Grenzfall also in die Grenzen -1 und $+1$ hineinfällt, oder dadurch, dass zwei Wurzeln ungerader Vielfachheit zusammenfallen und eine Wurzel gerader Vielfachheit bilden. Die Grenzen von G_1 repräsentieren also Funktionen, deren Ableitungen Wurzeln von gerader Vielfachheit oder Wurzeln in den Grenzen -1 und $+1$ haben. Dies stört aber den monotonen Charakter der Funktion im Intervall $-1 \cdots +1$ nicht, d. h. wir dürfen die Grenzen von G_1 zu G_1 rechnen. Die Existenz des Minimums ist damit bewiesen. Wir werden sehen, dass das Minimum in der That auf diesen Grenzen liegt, und zwar gerade da, wo sich möglichst viele Begrenzungsflächen von G_1 schneiden.

Reduktion der Aufgabe. Schreiben wir die gesuchte Funktion in der Form:

$$F(x) = \int_{-1}^{x} F'(x)dx + C,$$

so ergiebt sich leicht die Konstante C; es muss nämlich

$$F(-1) = -F(+1),$$

da sonst, wie man unmittelbar sieht, die Abweichung, die hier nur an den Intervallgrenzen angenommen werden kann, durch Addition einer Konstanten verkleinert werden könnte. Dies liefert:

$$\int_{-1}^{-1} F'(x)\,dx + C = -\int_{-1}^{+1} F'(x)dx - C$$

$$C = -\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)dx$$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} F'(x)dx - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)dx$$

die Abweichung L, absolut genommen, ist gleich $F(1)$

$$L = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)dx.$$

Wenn nun $F(x)$ die gesuchte monotone Funktion ist, so darf es keine andere monotone Funktion $\bar{F}(x)$ von der Form:

$$\bar{F}(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_0$$

geben, für die

$$\int_{-1}^{+1} \bar{F}'(x)dx$$

kleiner wäre als

$$\int_{-1}^{+1} F(x)dx.$$

Mit diesem Satz können wir die Behauptung beweisen:

Die Wurzeln von $F'(x) = 0$ liegen alle im Intervall $-1 \cdots +1$.

Die im Intervall liegenden Wurzeln von $F'(x) = 0$ liegen entweder an den Grenzen oder sie sind von gerader Vielfachheit. Die im Innern des Intervalls liegenden Wurzeln seien

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_m, \qquad \text{und} \qquad 2\lambda_1, 2\lambda_2 \ldots 2\lambda_m$$

sei der Grad ihrer Vielfachheit. 1 und -1 seien eine λ- bezw. λ_0-fache Wurzel von $F'(x)$, wo λ und λ_0 auch 0 sein können. Daher ist

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}}$$

eine ganze Funktion von x, die zwischen -1 und $+1$ nicht verschwindet. Der absolut kleinste Betrag dieser Funktion im Intervall $-1 \cdots +1$ mit dem ihm zukommenden Vorzeichen sei mit L_0 bezeichnet; jetzt ist

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}} - L_0$$

eine Funktion, die ihr Zeichen von -1 bis $+1$ nicht ändert, und die, da Minuend und Subtrahend von gleichem Vorzeichen sind, absolut genommen stets kleiner ist als der Minuend allein. Das gleiche gilt auch von der Funktion, die ich erhalte, wenn ich mit dem Nenner multipliciere, also von der Funktion

$$F'(x) - L_0(x-1)^{\lambda} \ldots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m};$$

hieraus folgt, dass

$$\int_{-1}^{+1} F'(x) - L_0(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0} \ldots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m} dx$$

absolut genommen kleiner ist als

$$\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx,$$

wobei

$$\int_{-1}^{x} F'(x) - L_0(x-1) \ldots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m} dx$$

eine monotone Funktion ist. Ist der Grad von

$$L_0(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0} \ldots$$

kleiner als der von $F'(x)$, so hat sich die Form von $F'(x)$ durch die Subtraktion nicht geändert, und $F(x)$ ist nicht die gesuchte Funktion, da wir

$$\overline{F}'(x) = F'(x) - L_0(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0} \ldots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m}$$

setzen können. Der Grad von $F'(x)$ muss daher gleich dem von $(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0} \ldots (x-\alpha^m)^{2\lambda_m}$ sein, und wir können setzen

$$\begin{aligned} F'(x) &= n(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1} \ldots (x-\alpha_m)^{2\lambda_m} \\ &= n(x-1)^{\varrho}(x+1)^{\varrho_0} U^2, \end{aligned}$$

wo ϱ und ϱ_0 nur 0 oder 1 sein können, da höhere Potenzen in U hineingezogen werden. $\varrho + \varrho_0$ ist gerade oder ungerade, je nach dem vorgeschriebenen Grade n von $F(x)$; $\varrho = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ bestimmt das positive oder negative Vorzeichen von $F'(x)$ d. h. den wachsenden oder abnehmenden Charakter von $F(x)$ im Intervall $-1 \cdots +1$. Daher sind ϱ und ϱ_0 als gegeben zu betrachten. Der Grad u von U ist $u = \frac{n-1-\varrho-\varrho_0}{2}$. Unsere Aufgabe ist somit

reduziert auf die, das Polynom U zu finden, für das

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\varrho_0} (1-x)^{\varrho} U^2 dx$$

ein Minimum wird.

Lösung der Aufgabe: Die Auflösung geschieht durch Funktionen

$$T_0\ T_1\ \ldots\ T_u$$

die mit den gewöhnlichen Kugelfunktionen viel Aehnlichkeit haben und in einem speziellen Fall in sie übergehen. Wir definieren:

$$\varphi(s,x) = \frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{\varrho_0}\,(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{\varrho}}{\sqrt{1-2sx+s^2}} = T_0+T_1 s+T_2 s^2+\cdots$$

Man sieht leicht, dass T_m eine ganze Funktion $m$ten Grades von x ist. Man kann nun zeigen, (vergl. Tchebychef: Ueber die den Legendreschen Funktionen ähnlichen Funktionen) dass

$$\int_{-1}^{1} \varphi(s,x)\ \varphi(t,s)\,(1+x)^{\varrho_0}\,(1-x)^{\varrho} dx\,,$$

gleich ist

$$\int_0^1 \frac{2^{-\varrho-\varrho_0+1}\,(1-stz)^{-\varrho}}{z^{-\varrho_0}(1-z)^{-\varrho}(1-stz^2)}\ dz\,,$$

wo s und t nur noch in der Verbindung st vorkommen. Setzen wir links unsere Funktionen T ein, so wird das Integral:

$$\int_{-1}^{+1} (T_0+T_1 s+T_2 s^2+\cdots)(T_0+T_1 t+T_2 t^2+\cdots)\,(1+x)^{\varrho_0}\,(1-x)^{\varrho} dx.$$

Wenn dies Integral nur von st, nicht von s und t einzeln abhängen soll, so folgt

$$\int_{-1}^{+1} T_n\ T_m\,(1+x)^{\varrho_0}\,(1-)^{\varrho} dx = 0 \qquad \text{für} \qquad n \neq m.$$

Durch diese Integralgleichung ist das System der Funktionen T im Wesentlichen (d. h. jede Funktion bis auf einen konstanten Faktor) eindeutig bestimmt.

Aus der Integralgleichung folgt für $n > m$

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\varrho_0}\,(1-x)^{\varrho}\ T_n(AT_{n-1}+BT_{n-2}+\cdots HT_0)\,dx = 0$$

wo $A, B \ldots H$ beliebige Konstanten sind. Da nun jede Funktion $(n-1)$ten Grades durch $AT_{n-1} + BT_{n-2} \cdots + HT_0$ dargestellt werden kann, so hat T_n die Eigenschaft, mit jeder Funktion f_{n-1}

$$\int_{-1}^{1} (1+x)^{\varrho_0} (1-x)^{\varrho} f_{n-1}\, T_n dx = 0$$

zu liefern. Nehmen wir an, $\overline{T_n}$ habe dieselbe Eigenschaft; der höchste Koefficient von T_n und $\overline{T_n}$ sei als gleich angenommen, sodass $T_n - \overline{T_n}$ vom Grade $n-1$. Die Integraleigenschaft kommt, wenn T_n und $\overline{T_n}$, auch $T_n - \overline{T_n}$ zu, und wählen wir $f_{n-1} = T_n - \overline{T_n}$, so haben wir

$$\int_{-n}^{1} (1+x)^{\varrho_0} (1-x)^{\varrho} (T_n - \overline{T_n})^2 dx = 0.$$

Ist die Funktion $\overline{T_n}$ reell, so hat die Funktion unter dem Integralzeichen stets gleiches Vorzeichen, und es folgt $\overline{T_n} = T_n$. Wird von $\overline{T_n}$ Reellität nicht vorausgesetzt, so kommt die Integraleigenschaft dem reellen und immaginären Teil einzeln zu, und wir können den analogen Schluss ziehen.

Wir kehren jetzt zu der Aufgabe zurück, die Funktion U vom Grade u zu suchen, für die

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\varrho_0} (1-x)^{\varrho} U^2 dx$$

ein Minimum wird. Es lässt sich U in der Form schreiben

$$U = \overline{A}\, T_0 + \overline{B}\, T_1 + \cdots H T_u;$$

dividieren wir durch H: $\quad (H \neq 0)$

$U = H(AT_0 + BT_1 + \cdots GT_{u-1} + T_u)$. Es soll

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\varrho_0} (1-x)^{\varrho} (A\, T_0 + B\, T_1 + \cdots G\, T_{u-1} + T_u)^2 = \text{minim.},$$

wobei $A, B \ldots G$ zu bestimmen sind. Setzen wir nach der gewöhnlichen Regel die Ableitungen nach diesen Parametern gleich Null:

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\varrho_0} (1-x)^{\varrho} . 2 . (AT_0 + BT_1 + \cdots + GT_{u-1} + T_u)\, T_0 . dx = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\varrho_0} (1-x)^{\varrho} . 2 . (AT_0 + BT_1 + \cdots + GT_{u-1} + T_u)\, T_1 . dx = 0$$

. . . . . .

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\varrho_0} (1-x)^{\varrho} . 2 . (AT_0 + BT_1 + \cdots + GT_{u-1} + T_u) T_{u-1} . dx = 0.$$

Benutzen wir die Integralgleichung der T, so folgt:

$$\int_{-1}^{1} (1+x)^{\varrho_0}(1-x)^{\varrho}.2.A.T_0^2\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\varrho_0}(1-x)^{\varrho}.2.B.T_1^2\,dx = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Da wieder eine monotone Funktion unter dem Integralzeichen steht, folgt

$$A = 0 \qquad B = 0 \ldots G = 0.$$

Die Existenz des Minimums folgt aus unserm Existenzbeweis in Verbindung mit der Eindeutigkeit der ganzen Entwicklung. Wir sehen dies aber auch direkt, wenn wir das zweite Glied der Taylorschen Entwicklung von

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\varrho_0}(1-x)^{\varrho}(AT_0 + BT_1 + \cdots + T_u)^2\,dx$$

nach $A, B, C \ldots$ untersuchen. Dies Glied ist eine quadratische Form der Inkremente von $A, B \ldots$, die hier direkt in der Normalform als Summe von Quadraten auftritt, da die gemischten Terme, die mit $\frac{\partial^2}{\partial A \partial B} \cdots$ multipliciert sind, verschwinden. Die Koefficienten dieser quadratischen Form

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\varrho_0}(1-x)^{\varrho}\,T_0^2\,dx$$

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\varrho_0}(1-x)^{\varrho}\,T_1^2\,dx$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

haben offenbar alle gleiches Vorzeichen. Ein Minimum-Maximum ist demnach ausgeschlossen.

Die gesuchte Funktion U ist bis auf einen konstanten Faktor gleich T_u. Da U als höchsten Koefficienten die Einheit hat, so ist es hierdurch eindeutig bestimmt.

Berechnung der Abweichung. Bezeichnen wir den höchsten Koefficienten von T_u mit K_u, so ist

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{n}{K_u^2}(1+x)^{\varrho_0}(1-x)^{\varrho}\,T_u^2\,dx - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{n}{K_u^2}(1+x)^{\varrho_0}(1-x)^{\varrho}\,T_u^2\,dx$$

$$L = \frac{n}{2K_u^2} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\varrho_0}(1-x)^{\varrho}\, T_u^2\, dx.$$

Bei der numerischen Ausrechnung dieses Integrals wollen wir uns auf Angabe der Resultate beschränken. Aus dem oben Gesagten folgt, dass

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^{\varrho}(1+x)^{\varrho_0}\, T_u^2\, dx$$

gleich ist dem Koefficienten von $(st)^u$ in der Entwicklung des Integrals

$$\int_0^1 \frac{2^{-\varrho-\varrho_0+1}(1-stz)^{-\varrho}}{z^{-\varrho_0}(1-z)^{\varrho}(1-stz^2)}\, dz,$$

das für die hier in Frage kommenden Werte von ϱ und ϱ_0 sich auswerten lässt und für

$\varrho + \varrho_0 = 0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{st}} \log \frac{1+\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}}$

$\varrho + \varrho_0 = 2$ $\quad \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(st)^{\frac{2}{3}}} \log \frac{1-\sqrt{st}}{1+\sqrt{st}} - \frac{\log(1-st)}{s^2 t^2}\right]$

$\varrho + \varrho_0 = 1$ $\quad \frac{1}{2st} \log (1-st)$ ergiebt.

Die Reihenentwicklung liefert:

$$2 + \tfrac{1}{2} st + \tfrac{2}{5}(st)^2 + \cdots \frac{2}{2u+1} (st)^u$$

$$\frac{1}{2.2.3} + \frac{2}{2.3.5} st + \frac{3}{2.4.7} (st)^2 + \cdots \frac{u+1}{2(u+2).(2u+3)} (st)^u.$$

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} st + \tfrac{1}{6}(st)^2 + \cdots \tfrac{1}{2(u+1)}(st)^u.$$

Also ist

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\varrho_0}(1-x)^{\varrho}\, T_u^2\, dx$$

gleich

$$\frac{2}{2u+1} \quad \text{für} \quad \varrho + \varrho_0 = 0$$

$$\frac{u+1}{2(u+2)(2u+3)} \quad \text{„} \quad \varrho + \varrho_0 = 2$$

$$\frac{2}{2u+1} \quad \text{„} \quad \varrho + \varrho_0 = 1$$

K_u ist der höchste Koefficient von T_u; T_u ist der Koefficient von s_u in

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{\varrho_0}\,(1-s+\sqrt{1-sx+s^2})^{\varrho}}{\sqrt{1-2sx+s^2}}$$

K_u ist also der von s unabhängige Koefficient von $(sx)^u$, wenn ich diesen Quotienten als Funktion von sx und s auffasse, also der Koefficient von α^u in

$$\frac{(1+\sqrt{1-\alpha})^{\varrho+\varrho_0}}{\sqrt{1-\alpha}}.$$

Das allgemeine Glied einer Reihenentwicklung wird:

$$K_u = \begin{cases} \dfrac{1.3.5\ \ldots\ (2u-1)}{1.3.2\ \ldots\ u} & \varrho+\varrho_0 = 0 \\ \dfrac{1.3.5\ \ldots\ (2u+1)\,(u+1)}{2.1.2.3\ \ldots\ (u+1)\,(u+2)} & \varrho+\varrho_0 = 2 \\ \dfrac{1.3.5\ \ldots\ 2u+1}{2.1.2.3\ \ldots\ u+1} & \varrho+\varrho_0 = 1 \end{cases}$$

Nun ergiebt sich der Wert von L

$$L = \begin{cases} \left(\dfrac{1.2.3\ \cdots\ \frac{n-1}{2}}{1.3.5\ \cdots\ n-2}\right)^2 & \varrho+\varrho_0 = 0 \\ \left(\dfrac{1.2.3\ \cdots\ \frac{n-1}{2}}{1.3.5\ \cdots\ n-2}\right)^2 \dfrac{n+1}{n-1} & \varrho+\varrho_0 = 2 \\ 2\left(\dfrac{1.2.3\ \cdots\ \frac{n}{2}}{1.3.5\ \cdots\ n-1}\right)^2, & \varrho+\varrho_0 = 1 \end{cases}$$

wenn wir $u = \dfrac{n-1-\varrho-\varrho_0}{2}$ benutzen.

Diese Werte gestalten sich besonders einfach bei Benutzung der Wallisschen Formel für π. In allen Fällen ergiebt sich als untere Grenze der Abweichung, der sie mit wachsendem n asymptotisch zustrebt,

$$\frac{n-1}{2^n}\,\pi.$$

Hieraus können wir z. B. schliessen: Beträgt die Differenz

der Werte einer ganzen rationalen Funktion für -1 und $+1$ weniger als $2 \cdot \frac{n-1}{2^n} \pi$, so ist die Funktion nicht monoton, die Ableitung hat in dem betrachteten Intervall eine Wurzel von ungerader Vielfachheit. (Vergl. Tchebychef: Sur les fonctions, qui se diffèrent le moins possible de zéro).

Kapitel IV. Von den konvexen Polyedern.

Aufgabe dieses Kapitels ist es, einen Satz zu beweisen, der im folgenden gebraucht werden wird. Es seien

$$x^{(1)}\ x^{(2)}\ \ldots\ x^{(n)}$$

unabhängige reelle Variable; ein System von speziellen Werten

$$x_1^{(1)}\ x_1^{(2)}\ \ldots\ x_1^{(n)}$$

nenne ich einen Punkt. Es seien eine Anzahl Punkte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ und hiervon verschiedene Punkte $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3 \ldots$ gegeben. Es handelt sich darum, ob es möglich sei, eine lineare Funktion

$$a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + \ldots a_n x^{(n)} + a_{n+}$$

anzugeben, die an allen Punkten p positive und an allen Punkten $\overline{p}$ negative Werte annimmt. Unser Satz lautet nun:

Entweder ist es möglich eine solche lineare Funktion anzugeben,

Oder man kann aus den gegebenen Punkten $n+2$ Punkte von der Art auswählen, dass schon sie allein die Existenz einer solchen linearen Funktion unmöglich machen.

§ 1. Polyeder.

Aus $n+1$ Punkten, d. h. speziellen Wertsystemen der Variabeln $x^{(1)}\ x^{(2)} \ldots x^{(n)}$ können wir eine Determinante der Form bilden:

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & \ldots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & \ldots & x_2^{(n)} & 1 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & x_{n+1}^{(3)} & \ldots & x_{n+1}^{(n)} & 1. \end{vmatrix}$$

Sie sei kurz mit dem Symbol

$$| 1, 2, 3 \ldots n, n+1 |$$

bezeichnet. Ein System von n Punkten

$$(1, 2, 3 \ldots n)$$

d. h. die Matrix von $n+1$ Spalten und n Zeilen sei eine „Wandung", ein System von $(n-1)$ Punkten

$$\{ 1, 2, 3 \ldots n-1 \}$$

ein „Rand" genannt. Die Anordnung der Elemente dieser Symbole ist nur insoweit bestimmt, dass ich Symbole, die durch eine gerade Zahl von Transpositionen ineinander übergeführt werden können, als identisch betrachten will.

Sind zwei Punkte a und b gegeben,

$$x_a^{(1)}\ x_a^{(2)} \ldots x_a^{(n)}$$

und

$$x_b^{(1)}\ x_b^{(2)} \ldots x_b^{(n)},$$

so spreche ich von der Linie (ab) und verstehe darunter die Gesamtheit der Punkte, die $(n-1)$ unabhängigen linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
p_1^{(1)}x^{(1)} &+ p_1^{(2)}x^{(2)} + \ldots + p_1^{(n)}x^{(n)} + p_1^{(n+1)} = 0\\
p_2^{(1)}x^{(1)} &+ p_2^{(2)}x^{(2)} + \ldots + p_2^{(n)}x^{(n)} + p_2^{(n+1)} = 0\\
&\vdots\\
p_{n-1}^{(1)}x^{(1)} &+ p_{n-1}^{(2)}x^{(2)} + \ldots + p_{n-1}^{(n)}x^{(n)} + p_{n-1}^{(n+1)} = 0
\end{aligned}$$

genügen, wo diese Gleichungen nur der Bedingung unterworfen sind, dass sie von a und b befriedigt werden. Man sieht, dass es auf die Wahl der p dabei nicht ankommt. Denn die $n-1$ Gleichungen definieren die Unbekannten als lineare Funktionen eines Parameters t

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= L_1^{(1)}t + L_0^{(1)}\\
x^{(2)} &= L_1^{(2)}t + L_0^{(2)}\\
&\vdots\\
x^{(n)} &= L_1^{(n)}t + L_0^{(n)},
\end{aligned}$$

wo t eine der Variabeln x oder eine lineare Funktion derselben bedeuten kann. Nach Definition von t bestimmen sich die L durch

$$x_a^{(1)} = L_1^{(1)} t(a) + L_0^{(1)}$$
$$x_b^{(1)} = L_1^{(1)} t(b) + L_0^{(1)}$$

unabhängig von den Werten der p.

Man sieht nun sofort: Habe ich eine Wandung $(1, 2 \ldots n)$ und einen Punkt p, der der Bedingung genügt, auf einer gegebenen Linie (ab) zu liegen, so ist die Determinante $|\, 1, 2 \ldots n, p \,|$ eine lineare Funktion des Parameters der Linie (ab). Hiervon werden wir öfters Gebrauch zu machen haben.

Wenn $n+1$ Punkte $1, 2, 3 \ldots n+1$ gegeben sind, die

$$|\, 1, 2, 3 \ldots n+1 \,| > 0$$

genügen, so nenne ich das System der Wandungen

$$(1, 2 \ldots n-1, n), \quad (-1) \quad (1, 2 \ldots n-1, n+1)$$
$$(1, 2 \ldots n-2, n+1) \ldots\ldots (-1)^n (2, 3 \ldots n, n+1)$$

ein Elementarpolyeder. Das System dieser Wandungen hat die Eigenschaft, dass, wenn ich jede Wandung mit einem Punkte p zur Bildung einer Determinante zusammennehme, die Summe dieser Determinanten von der Wahl des Punktes p unabhängig ist.

$$(1) \qquad |\, wp \,| + |\, w'p \,| + |\, w''p \,| + \ldots = \text{const.},$$

wo p einen beliebigen Punkt bedeutet. Diese Summe ist nämlich gleich $|\, 1, 2, 3 \ldots n+1 \,|$, sodass die Gleichung besteht:

$$|\, 1,2,3 \ldots n+1 \,| + (-1) |\, 1,2 \ldots n,p \,| + (-1)^2 |\, 1,2 \ldots n-1,n+1,p \,|$$
$$(2) \qquad + \ldots + (-1)^{n+1} |\, 2, 3 \ldots n+1,p \,| = 0.$$

Für alle kleineren Werte von n sei die Gleichung bewiesen. Ich nehme nun auf der linken Seite von (2) den Koefficienten einer Variabeln, etwa den von $x^{(n)}$. In $|\, 1, 2 \ldots n+1 \,|$ kommt $x^{(n)}$ nicht vor; in $(-1) |\, 1, 2 \ldots n,p \,|$ d. h. in

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} & 1 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} & 1 \\ x^{(1)} & x^{(2)} & \dots & x^{(n)} & 1 \end{vmatrix}$$

ist der Koefficient gleich:

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n-1)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n-1)} & 1 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n-1)} & 1 \end{vmatrix}$$

welche Determinante wir mit $| \overline{1}, \overline{2} \dots \overline{n} |$ bezeichnen wollen, um anzudeuten, dass der Punkt $\overline{1}$ eine Koordinate, nämlich $x^{(n)}$ weniger enthält als 1, also in einem niedriger dimensionalen Raume liegt. Auf diese Weise bestimmt sich der Koefficient von $x^{(n)}$:

$$| \overline{1}, \overline{2} \dots \overline{n} | + (-1) | \overline{1}, \overline{2} \dots \overline{n-1}, \overline{n+1} | + \dots (-1)^{n-1} | \overline{2}, \overline{3} \dots \overline{n+1} |$$

dies ist die linke Seite der Gleichung (2) für den niedriger dimensionalen Raum; p hat hier den Wert $\overline{n+1}$. Der Koefficient von $x^{(n)}$ in (2) verschwindet, und dasselbe können wir von den andern Variabeln nachweisen. Zur Betrachtung des absoluten Gliedes setzen wir alle Variabeln in (2) gleich Null. Der zweite Term von (2) $(-1) | 1, 2 \dots n, p |$ hat dann den Wert

$$(-1) \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} & 1 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)}. \end{vmatrix}$$

Das erste Glied von (2) lautet:

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} & 1 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & \dots & x_{n+1}^{(n)} & 1 \end{vmatrix}$$

Entwickeln wir nach den Elementen der letzten Spalte, so liefert das letzte Element eine Determinante, die sich gegen die vorige gerade weghebt, und ebenso heben sich die übrigen Determinanten der Entwicklung von $| 1, 2 \dots n+1 |$ gegen die folgenden Terme der linken Seite von (2). Da (2) für $n = 1$ gilt, ist sie hierdurch allgemein bewiesen.

Die Bildung der Elementarpolyeder aus $n+1$ Punkten können wir folgendermassen vornehmen: Wir wollen die n Punkte $1, 2 \dots n$ als Wandung auffassen und mit w bezeichnen. $n-1$ Punkte in solcher Anordnung, dass der $n$te Punkt, hinter sie gesetzt, w ergiebt, wollen wir einen Rand nennen, der in w enthalten ist, z. B.

$$\{ 1, 2 \dots n-1 \} = r'.$$

Dagegen $n-1$ Punkte, die, wenn wir den $n$ten Punkt hinter sie setzen, $-w$ ergeben, wollen wir mit (-1) multiplicieren und alsdann einen Rand nennen, der in w enthalten ist, z. B.

$$-\{ 1, 2 \dots n-2, n \} = r''.$$

Wir können jetzt, wenn wir p statt $(n+1)$ einsetzen, sagen: Ein Elementarpolyeder wird gebildet von den Wandungen

$$w \quad \text{und} \quad -(rp)$$

wo r alle Ränder von w durchlaufen muss, oder von

$$-w \quad \text{und} \quad (rp)$$

je nachdem

$$| wp | > 0 \quad \text{oder} \quad -| wp | > 0.$$

Nehmen wir den ersten Fall an, es sei jetzt q ein Punkt, der $-| wq | > 0$ genügt. Ich bilde das Elementarpolyeder

$-w$, (rq), nehme das System dieser Wandungen mit dem früheren zusammen und lasse w gegen $-w$ weg. Man sieht, dass dabei die Gleichung (1) erhalten bleibt. Das neue System von Wandungen nennen wir ein Polyeder. Allgemein verstehen wir unter einem Polyeder ein System von Wandungen, das gebildet wird aus den Wandungen einer endlichen Anzahl von Elementarpolyedern unter Weglassung gleicher und entgegengesetzter Wandungen. Ein in den Wandungen vorkommender Punkt 1, 2, 3 . . . heisse ein Eckpunkt.

Für die Polyeder gilt demnach Gleichung (1)

$$| wt | + | w't | + | w''t | + \ldots = \text{const.},$$

wo t irgend einen Punkt bedeutet. Die linke Seite heisse der Inhalt des Polyeders; man sieht, dass sich bei dem Aufbau der Polyeder aus Elementarpolyedern der Inhalt additiv zusammensetzt; danach haben alle Polyeder positiven Inhalt.

In jedem Polyeder kommt jeder Rand, der vorkommt, eine gerade Anzahl Male vor, und zwar gleich oft in dem einen und dem entgegengesetzten Sinne. Man sieht zunächst, dass dieser Satz für Elementarpolyeder gilt; gilt er nun für irgend ein Polyeder, so gilt er auch für jedes Polyeder, das aus dem ersten durch Zufügung eines Elementarpolyeders entsteht, sowie für jedes das durch Weglassung zweier gleichen und entgegengesetzten Wandungen entsteht. Somit gilt er allgemein.

§ 2. Konvexe Polyeder.

Unter konvexen Polyedern verstehen wir Polyeder, die der folgenden Bedingung genügen:

Irgend eine Wandung w des Polyeders muss mit jedem in ihr nicht enthaltenen Eckpunkt p zusammengesetzt, eine nicht negative Determinante ergeben.

$$| wp | \geqq 0.$$

Unsere Elementarpolyeder mit den Wandungen w und $-(rp)$ genügen der Bedingung, da $| wp | > 0$. Denn sei etwa a der nicht in r vorkommende Punkt von w, so kann die Wandung $-(rp)$ nur noch mit a zusammengesetzt werden, und es ist

$$-| rpa | > 0, \qquad \text{da} \qquad | rap | = | wp | > 0.$$

Wir führen einen neuen Begriff ein: Wir wollen von einem Punkte i sagen, er liege „innerhalb“ des von den Wandungen $w, w', w'' \ldots$ gebildeten konvexen Polyeders wenn

$$|wi| \geqq 0 \qquad |w'i| \geqq 0 \qquad |w''i| \geqq 0 \ldots$$

Wenn nicht immer das Ungleichheitszeichen, sondern ein oder mehrere Male das Gleichheitszeichen gilt, so wollen wir sagen, der Punkt liege auf der Begrenzung des konvexen Polyeders. Ebenso wollen wir sagen, er liege innerhalb der Wandung w, wenn $|wi| = 0$ und $|w'i| \geqq 0 \ldots$ und auf der Begrenzung der Wandung w, wenn auch ausser $|wi| = 0$ noch Gleichheitszeichen gelten.

Wir wollen zeigen, dass ein Punkt, der innerhalb der Wandung w liegt, dies unabhängig davon thut, zu welchem Elementarpolyeder w gehört. Es sei wp ein Elementarpolyeder, $|wp| > 0$ und p' irgend ein Punkt, der $|wp'| > 0$ genügen soll. Der Punkt i liege in Bezug auf wp innerhalb w, sodass $|wi| = 0$, die übrigen Determinanten positiv sind. Wir wollen zeigen, dass er auch in Bezug auf das Elementarpolyeder wp' innerhalb w liegt. Sei $-r$ ein in w enthaltener Rand, a der nicht zu r gehörende Eckpunkt von w, $w = -(ra)$, so ist (rp) eine von den andern Wandungen des Polyeders wp; es sei also $|rpi| > 0$ und es genügt nachzuweisen, dass $|rp'i| > 0$.

Wir verfolgen $|rat|$, während der Punkt t auf der Linie (pp') läuft. Den Grenzfall, wo diese lineare Funktion sich auf eine Konstante reduziert, behandeln wir später, und wir bestimmen p'' durch $|rap''| = 0$, wo p'' auf der geraden Linie (pp'). Da $|rap| < 0$ und $|rap'| < 0$, so ist die Reihenfolge der p

$$p\,p'\,p'' \qquad \text{oder} \qquad p'\,p\,p'',$$

p'' kann nicht zwischen p und p' liegen; denn eine lineare Funktion kann nicht zwischen zwei negativen Werten verschwinden.

Wir wollen nun nachweisen:

$$|rp''i| = 0.$$

Wir haben:

$$|rap''| = 0 \qquad |rai| = 0.$$

Ich behaupte, die beiden linearen Gleichungen

$$| rat | = 0 \qquad \text{und} \qquad | rti | = 0,$$

wo

$$t = t\,(x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(n)})$$

irgend einen Punkt bedeutet, sind identisch. Sie mögen aufgelöst etwa lauten

$$L^{(1)}x^{(1)} + L^{(2)}x^{(2)} + \ldots L^{(n)}x^{(n)} + L^{(0)} = 0$$

und

$$\overline{L}^{(1)}x^{(1)} + \overline{L}^{(2)}x^{(2)} + \ldots \overline{L}^{(n)}x^{(n)} + \overline{L}^{(0)} = 0.$$

In keiner dieser Gleichungen sind alle Koefficienten Null. Denn das würde bedeuten, dass alle n reihigen Determinanten der Matrix ra bezw. ri verschwänden, was aber nicht der Fall ist, weil $| rap | < 0$ und $| rip | < 0$. Die Gleichungen haben $(n+1)$ Wurzeln gemein, nämlich die $(n-1)$ Punkte von r sowie a und i;

$$(L^{(1)} - \overline{L}^{(1)})x^{(1)} + (L^{(2)} - \overline{L}^{(2)})x^{(2)} + \ldots + (L^{(0)} - \overline{L}^{(0)})$$

verschwindet also an $n+1$ Stellen. Die Determinante dieses Systems von $n+1$ homogenen linearen Gleichungen mit $(n+1)$ Unbekannten $| rai |$ verschwindet zwar, es können aber nicht alle Unterdeterminanten $n$ten Grades verschwinden, weil sonst nicht

$$| rap | < 0 \qquad \text{sondern} \qquad | rap | = 0$$

sein müsste.

Hieraus folgt, dass der Quotient zweier der Unbekannten nicht unendlich sein kann, und setze ich, was erlaubt ist, eine der Differenzen gleich 0, so verschwinden auch alle andern. Damit ist die Identität der Gleichungen

$$| rat | = 0 \qquad \text{und} \qquad | rti | = 0$$

nachgewiesen, und da $| rap'' | = 0$, so folgt

$$| rp''i | = 0.$$

Wir werden von dem Schluss, dass aus

$$| rap'' | = 0 \qquad \text{und} \qquad | rai | = 0$$

entweder $| rp''i | = 0$ oder das Verschwinden der n reihigen Determinanten von ra folgt, noch öfters Gebrauch machen.

Da nun p'' nicht zwischen p und p' liegen kann und

$$| rpi | > 0,$$

so folgt

$$| rp'i | > 0.$$

Ist, was wir eben ausschlossen, $| rat |$ konstant, wenn sich t auf (pp') bewegt, so behaupte ich, auch $| rit |$ ist auf dieser Linie konstant. Ist dies nämlich nicht der Fall, so giebt es auf (pp') einen Punkt p'', für den $| rip'' | = 0$, und ich beweise analog wie oben, dass nun auch $| rap'' | = 0$, was der Annahme, dass $| rat |$ auf (pp') konstant sei, widerspricht.

Ist

$$| wp' | < 0, \qquad \text{während} \qquad | wp | > 0,$$

sodass sich $p \ldots p'' \ldots p'$ folgen, so ist zunächst $| rp'i | < 0$. Wir kehren aber für das Polyeder wp' das Zeichen von w und demnach auch von r um, sodass der Satz bestehen bleibt.

Ein Punkt i, der innerhalb der Wandung w liegt, thut dies unabhängig davon, in welchem Elementarpolyeder w vorkommt.

Es stelle (ab) eine gerade Linie dar, und b liege im Innern eines konvexen Polyeders. Ich behaupte: Wenn ich mit einem variabeln Punkte t auf der geraden Linie (ab) von a kommend über b hinaus fortschreite, so komme ich an einen Punkt c, der der Begrenzung des konvexen Polyeders angehört. Bilde ich nämlich die Determinanten $| wt |$, $| w't |$, $| w''t |$ . . . und lasse t längs (ab) laufen, so können diese Determinanten, da ihre Summe konstant bleiben muss, nicht alle wachsen; falls sie nicht alle konstant bleiben — und dass dieses nicht der Fall sein kann, werden wir gleich nachweisen — muss mindestens eine von ihnen abnehmen. Da diese Determinante eine lineare Funktion von t ist, so muss sie, während ich mit t auf (ab) fortschreite, einmal 0 und sodann negativ werden; sie bleibt dann negativ, soweit ich auch über c hinaus fortschreite. Da dasselbe auch gilt, wenn ich von b nach a zu gehe, so erhalten wir sofort die Sätze:

1) Eine gerade Linie kann nur innerhalb eines endlichen Stückes innerhalb eines konvexen Polyeders verlaufen.

2) Enthält eine gerade Linie einen Punkt, der dem Innern, aber nicht der Begrenzung eines konvexen Polyeders angehört, so hat sie mit der Begrenzung dieses Polyeders zwei und nur zwei Punkte gemein.

3) Eine Gerade, die mit dem Innern eines konvexen Polyeders zwei Punkte gemein hat, hat

mit ihm alle Punkte gemein, die auf ihr zwischen diesen beiden liegen.

Wir haben nun nachzuweisen, dass die Determinanten

$$| wt |, \quad | w't |, \quad | w''t | \ldots$$

nicht alle konstant bleiben können, wenn sich t auf einer geraden Linie bewegt. Wir weisen dies zunächst für ein Elementarpolyeder mit den Eckpunkten $1, 2, 3 \ldots n, n+1$ nach. Was bedeutet es, wenn $| 1, 2, \ldots n, t |$ von t unabhängig ist, wenn t sich auf einer geraden Linie bewegt? Die Gerade sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= L_1^{(1)} t + L_0^{(1)} \\ x^{(2)} &= L_1^{(2)} t + L_0^{(2)} \\ &\vdots \\ x^{(n)} &= L_1^{(n)} + L_0^{(n)}. \end{aligned}$$

Es muss dann

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(n)} & 1 \\ L_1^{(1)} t + L_0^{(1)} & L_1^{(2)} t + L_0^{(2)} & \ldots & L_1^{(n)} t + L_0^{(n)} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_2^{(n)} & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(n)} & 1 \\ L_1^{(1)} & L_1^{(2)} & \ldots & L_1^{(n)} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dies ist eine homogene lineare Gleichung der L_1, und wir haben gemäss den $n+1$ Wandungen $n+1$ solcher Gleichungen für die n Grössen L_1. Nun ist in der hingeschriebenen Gleichung der Koefficient von $L_1^{(1)}$ gleich der dem Element $x_{n+1}^{(1)}$ zugeordneten Un-

terdeterminante in $|1, 2, \ldots n+1|$, die wir mit $X^{(1)}_{n+1}$ bezeichnen wollen. Die Matrix der Gleichungen für die L_1 ist demnach

$$\begin{matrix} X^{(1)}_1 & X^{(2)}_1 & \ldots & X^{(n)}_1 \\ X^{(1)}_2 & X^{(2)}_2 & \ldots & X^{(n)}_2 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ X^{(1)}_{n+1} & X^{(2)}_{n+1} & \ldots & X^{(n)}_{n+1} \end{matrix}$$

Nun müssen entweder die L_1 oder alle n reihigen Determinanten dieser Matrix verschwinden. Wäre Letzteres der Fall, so müsste auch die aus den Unterdeterminanten von $|1, 2, 3 \ldots n, n+1|$ gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} X^{(1)}_1 & X^{(2)}_1 & \ldots & X^{(n)}_1 & X^{(n+1)}_1 \\ X^{(1)}_2 & X^{(2)}_2 & \ldots & X^{(n)}_2 & X^{(n+1)}_2 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ X^{(1)}_{n+1} & X^{(2)}_{n+1} & \ldots & X^{(n)}_{n+1} & X^{(n+1)}_{n+1} \end{vmatrix}$$

verschwinden; diese ist aber nach einem bekannten Determinantensatz gleich $(|1, 2, 3 \ldots n, n+1)^n$, also sicher von 0 verschieden.

Es können also nicht alle Determinanten $|wt|$, $|w't| \ldots$ auf der geraden Linie konstant bleiben; wegen der Bedingung (1) kann nicht eine allein variabel sein, es sind also mindestens 2 Determinanten variabel.

Wir wollen diesen für Elementarpolyeder geführten Beweis auf allgemeine Polyeder ausdehnen. Wir haben dabei nur nachzuweisen, dass nicht alle Wandungen der Elementarpolyeder, die variable Determinanten liefern, bei der Zusammensetzung weggefallen sein können. Es sei eine Linie gegeben, und wir nehmen eine Wandung, die eine auf ihr nicht konstante Determinante liefert. Da es, wie wir sahen, auf die Konstanten L_0 der Linie nicht ankommt, sondern nur auf die L_1, so können wir uns die L_0 so bestimmt denken, dass die Linie die Wandung in ihrem Innern schneidet und demnach an der Schnittstelle in das Innere eines Elementarpolyeders tritt; wir gehen nun auf ihr stets in derselben Richtung weiter, sie muss an irgend einer Stelle aus dem Elementarpolyeder wieder austreten, sagen wir bei α_1 durch

die Wandung w_1; wenn die Wandung w_1 wegfallen soll, so muss ein Elementarpolyeder mit der Wandung $-w_1$ existieren, und in dieses tritt, da α_1 auch im Innern von $-w_1$ liegt, die Linie nun ein; sie muss auch aus diesem wieder austreten, etwa bei α_2 durch w_2; dann muss auch wieder $-w_2$ existieren, u. s. w. Da wir auf der Linie stets in demselben Sinn fortschreiten, so kommen wir stets zu wirklich voneinander verschiedenen Elementarpolyedern, und wir sehen, dass es bei einer endlichen Anzahl von Elementarpolyedern keine gerade Linie geben kann, auf der die Determinanten aller Wandungen konstant sind.

§ 3. Anordnung zu konvexen Polyedern.

Wir wollen zeigen, dass, wenn eine Anzahl Punkte gegeben ist, die mindestens eine nichtverschwindende $(n+1)$reihige Determinante liefern, man stets ein konvexes Polyeder konstruieren kann, dessen Eckpunkte sämtlich zu diesen gegebenen Punkten gehören, und in dessen Innern alle gegebenen Punkte liegen.

Wir nehmen an, wir hätten ein konvexes Polyeder konstruiert, dessen Eckpunkte sämtlich zu den gegebenen Punkten gehören, und in dessen Innern sich möglicherweise noch gegebene Punkte befinden. Wir wollen zeigen, wie dies Polyeder zu erweitern ist, falls noch Punkte sich ausserhalb befinden. Das Polyeder habe die Wandungen $w, w_1, w_2 \ldots$, und p sei ein ausserhalb befindlicher Punkt. Es können dann die Determinanten $|wp|$, $|w_1p|$, $|w_2p| \ldots$ weder alle positiv (einschliesslich der Null), noch alle negativ sein. Denn im ersten Fall läge der Punkt p innerhalb, im zweiten hätte das Polyeder einen negativen Inhalt (S. 65). Ich teile die Wandungen des Polyeders ein in

$$w_1', w_2', w_3' \ldots \quad \text{und} \quad w_1'', w_2'', w_3'' \ldots$$

sodass

$$|w_1'p| \geqq 0 \qquad |w_2'p| \geqq 0 \qquad |w_3'p| \geqq 0 \ldots$$
$$|w_1''p| < 0 \qquad |w_2''p| < 0 \qquad |w_3''p| < 0.$$

Die Wandungen w' können in das neu zu bildende konvexe Polyeder mit herüber genommenen werden, die Wandungen w'' nicht. Wir bilden demgemäss die Elementarpolyeder $-w''p$, und ich behaupte, dass das neue Polyeder allen Bedingungen genügt.

Wir teilen zum Beweis die in dem ursprünglicher Polyeder vorkommenden Ränder in drei Arten.

Die Ränder

$$r_1', r_2', r_3' \ldots$$

sollen nur in den Wandungen

$$w_1', w_2', w_3' \ldots .$$

Die Ränder

$$r_1'', r_2'', r_3'' \ldots$$

sollen nur in den Wandungen

$$w_1'', w_2'', w_3'' \ldots .$$

Die Ränder

$$r_1, r_2, r_3 \ldots$$

sollen sowohl in den Wandungen w' als auch in w'' enthalten sein.

Hierbei haben wir der Kürze halber „Rand“ im absoluten Sinn, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen gebraucht. Wir denken uns nun alle Ränder, die im Polyeder vorkommen, hingeschrieben, und zwar jeden so oft als er vorkommt, unter Beachtung des ihm zukommenden Zeichens. Teilen wir die Ränder in die drei Arten ein, so ist klar, dass auch innerhalb jeder dieser Arten jeder Rand gleich oft mit dem einen und dem entgegengesetzten Zeichen vorkommen muss (S. 65). Für die Richtigkeit unserer Schlussfolgerungen ist es dabei belanglos, ob von jeder Art Ränder existieren oder nicht.

Bilden wir nun sämtliche Elementarpolyeder

$$-w''p,$$

wobei ja $-|w''p| > 0$, so haben diese die Wandungen

$$-w'' \quad \text{und} \quad (\varrho p),$$

wenn ϱ irgend ein Rand von w'' ist. Die ϱ zerfallen in r und r'', und zwar sind in den ϱ sämtliche r'', nicht aber sämtliche r enthalten; denn die r kommen, sofern sie Ränder der w' sind, in den ϱ nicht vor. Danach heben sich wohl die Wandungen $(r''p)$, nicht aber alle Wandungen (rp) gegeneinander auf. w'' hebt sich gegen $-w''$ und unser neues Polyeder hat nur Wandungen

$$w' \quad \text{und} \quad (rp).$$

Es ist nun nur noch zu zeigen, dass die Wandungen (rp) mit

jedem der Eckpunkte des alten Polyeders zusammengesetzt, eine positive Determinante ergeben. Zu diesem Zweck verbinde ich p mit irgend einem Punkte a, der auf dem Rande r liegt, d. h. $|w'a| = 0$ und $|w''a| = 0$ genügt, und zu der Begrenzung des ursprünglichen Polyeders gehört, durch eine Gerade (pa). Schliessen wir dabei den Grenzfall, dass in $|w'p| \geqq 0$ das Gleichheitszeichen gelten soll, zunächst aus.

Es ist nun die Determinante $|w''t|$, wo t einen Punkt der Geraden (pa) bedeutet, für $t = a$ gleich Null, und für $t = p$ negativ; sie bleibt also negativ, soweit ich mich auch von a in der Richtung nach p oder über p hinaus entferne. Dagegen ist $|w't|$ für $t = p$ positiv, für $t = a$ Null, und demnach negativ für alle Punkte von (pa), die von p aus gesehen, jenseits a liegen. Demnach ist für alle Punkte der Geraden ausser a eine der Determinanten des ursprünglichen Polyeders negativ; wir können also sagen, die Gerade (pa) hat mit dem ursprünglichen Polyeder keinen Punkt ausser a gemeinsam. Ist a irgend eine gemeinsame Lösung von $|w't| = 0$ und $|w''t| = 0$, ohne zu der Begrenzung des ursprünglichen Polyeders zu gehören, so hat die Gerade (pa) mit dem Innern des Polyeders überhaupt keinen Punkt gemeinsam.

Ich behaupte nun $|rpt|$ verschwindet für keinen Innenpunkt des Polyeders, abgesehen von den auf dem Rand r liegenden Punkten. Nehmen wir also an, es bestände die Gleichung $|rpi| = 0$, wo i einen Innenpunkt bedeutet. Wir legen eine Gerade durch die Punkte p und i durch $(n-1)$ lineare Gleichungen. Als eine dieser Gleichungen können wir $|rpt| = 0$ wählen, die übrigen Gleichungen seien

$$f_1(t) = 0 \qquad f_2(t) = 0 \ldots f_{n-2}(t) = 0.$$

Wir schreiben diese Gleichungen zusammen mit $|w't| = 0$. Es sei $w' = (r1)$, so haben wir das System:

$$\begin{aligned} |r1t| &= 0 \\ |rpt| &= 0 \\ f_1(t) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{n-2}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Systems von n Gleichungen mit n Unbekannten stellt den Schnittpunkt der Geraden (pi) mit $|w't| = 0$ dar.

Es sei nun D die Determinante dieser Gleichungen; ist $D \neq 0$, so haben die Gleichungen eine Lösung, etwa a, und es ist

$$| rpa | = 0 \quad \text{und} \quad | r1a | = 0.$$

Nun folgt nach unserm Beweis S. 67 aus diesen Gleichungen, dass entweder $| rp1 | = 0$ oder alle n reihigen Determinanten von ra verschwinden. Da wir die erste Eventualität $| rp1 | = | w'p | = 0$ ausgeschlossen haben, so folgt, das Verschwinden der n reihigen Determinanten von ra, und hieraus folgt $| w''a | = 0$. D. h. der Punkt a genügt $| w'a | = 0$ und $| w''a | = 0$, er liegt auf dem Rande r.

(pi) ist dann eine gerade Linie, die von p zu einem Randpunkt a geht, und einen Punkt i des Innern enthält, was wir aber als unmöglich nachgewiesen haben.

Wir haben $D \neq 0$ angenommen. Es sei jetzt $D = 0$. Wir beachten nun: Vom Punkt i war nur $| rpi | = 0$ vorausgesetzt. Wir ziehen nun von i eine Gerade zu einem beliebigen Punkte von r, etwa b, und es sei i' ein beliebiger Punkt der Geraden (ib) zwischen i und b; i' liegt dann im Innern des Polyeders, und es ist auch $| rpi' | = 0$, weil beide Eigenschaften von den beiden Punkten, i und b gelten. Wir können also in unserer Betrachtung i' statt i benutzen. Wir lassen jetzt i' auf der Geraden (ib) wandern, dadurch werden alle n Koordinaten von i' lineare Funktionen eines Parameters t. Es kann aber D nicht identisch in t verschwinden, weil D für $i' = b$ nicht verschwindet; denn die Gerade (pb) hat mit $| w't | = 0$ sicher einen und nur einen Punkt nämlich b gemeinsam; d. h. die Gleichungen (3) haben eine und nur eine Lösung, und dann kann ihre Determinante nicht verschwinden. Verschwindet aber D nicht identisch in t, so muss es auch ausser $i' = b$ noch Punkte i' geben, für die $D \neq 0$.

Die Annahme $| rpi | = 0$ ist also unzulässig: $| rpt |$ kann für keinen Punkt, der im Innern des ursprünglichen Polyeders liegt, verschwinden. Wir haben aber noch die einschränkende Voraussetzung, dass in $| w'p | \geqq 0$ nicht das Gleichheitszeichen gelte; nehmen wir also jetzt $| w'p | = 0$ an. $| r1p | = 0$. Dann verschwindet $| rpt |$ für dieselben Punkte, für die $| r1t |$ verschwindet, und umgekehrt. Denn nach S. 67 bedingt von den beiden Gleichungen

$$| r1t | = 0 \quad \text{und} \quad | rpt | = 0$$

wegen $| r1p | = 0$ die eine die andere. Die n reihigen Deter-

minanten von rp können nicht alle verschwinden, denn r kommt noch in einer Wandung w'' vor, und es müsste $|w''p| = 0$, während $|w''p| < 0$; auch die Determinanten von $r1$ d. h. von w' können nicht verschwinden, wie sich aus der Betrachtung des Elementarpolyeders, in dem w' vorkommt — und in mindestens einem muss es vorkommen —, ergiebt.

$|rpt|$ verschwindet also für keinen Punkt des Innern, wo die zur Begrenzung gehörenden Punkte, die $|w't| = 0$ genügen, eventuell auszuschliessen sind. Hieraus folgt aber sofort, dass $|rpt|$ für alle Punkte im Innern dasselbe Vorzeichen haben muss. Wir wissen nun, dass das Vorzeichen für einen Punkt positiv ist, nämlich für den letzten Eckpunkt des Elementarpolyeders, dem die Wandung (rp) angehört.

Hiermit ist alles, was zu beweisen war, bewiesen; wir haben aus einem gegebenen konvexen Polyeder ein neues konstruiert, das einen Punkt p, der ausserhalb des ursprünglichen lag, als Eckpunkt enthält und die Eckpunkte des früheren entweder auch als Eckpunkte, oder im Innern. Damit ist der Eingangs dieses Paragraphen angekündigte Satz bewiesen.

§ 4. Trennung zweier konvexer Polyeder.

Es seien P und $\overline{P}$ zwei konvexe Polyeder, die der Bedingung genügen, dass kein Punkt zugleich im Innern von P und im Innern von $\overline{P}$ liegt. Ich behaupte dann:

Es giebt eine lineare Funktion

$$p^{(1)}x^{(1)} + p^{(2)}x^{(2)} + \cdots + p^{(n)}x^{(n)} + p^{(n+1)},$$

die an allen im Innern von P liegenden Punkten positive, und an allen im Innern von $\overline{P}$ liegenden Punkten negative Werte annimmt.

Es sei eine Funktion zweier Punkte

$$p = p(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)})$$

und

$$\overline{p} = \overline{p}(\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, \ldots \overline{x}^{(n)})$$

definiert durch

$$f = +\sqrt{(x^{(1)} - \overline{x}^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \overline{x}^{(2)})^2 + \cdots + (x^{(n)} - \overline{x}^{(n)})^2}.$$

Wir suchen das Minimum von f unter der Bedingung, dass p im Polyeder P und $\overline{p}$ im Polyeder $\overline{P}$ liege. Dieses Minimum muss existieren und von 0 verschieden sein, weil nicht alle Quadrate verschwinden können. Es werde etwa an den Punkten p^* und $\overline{p^*}$ angenommen. Wir legen durch diese beiden Punkte eine gerade Linie, d. h. wir stellen $(n-1)$ Gleichungen auf, denen die Koordinaten von p^* und $\overline{p^*}$ genügen. Diese Gleichungen seien die folgenden:

$$\begin{aligned}
&a_1^{(1)}\ x^{(1)} + a_1^{(2)}\ x^{(2)} + \ldots + a_1^{(n)}\ x^{(n)} + a_1^{(n+1)} = 0\\
&a_2^{(1)}\ x^{(1)} + a_2^{(2)}\ x^{(2)} + \ldots + a_2^{(n)}\ x^{(n)} + a_2^{(n+1)} = 0\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&a_{n-1}^{(1)} x^{(1)} + a_{n-1}^{(2)} x^{(2)} + \ldots + a_{n-1}^{(n)} x^{(n)} + a_{n-1}^{(n+1)} = 0.
\end{aligned}$$

Zu diesen Gleichungen nehmen wir noch eine, die für p^* und $\overline{p^*}$ nicht erfüllt ist:

$$a_n^{(1)} x^{(1)} + a_n^{(2)} x^{(2)} + \cdots + a_n^{(n)} x^{(n)} + a_n^{(n+1)} = 0,$$

und unterwerfen die Koefficienten a den Bedingungen:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_\mu^{(\nu)})^2 = 1$$

für alle μ und

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_\mu^{(\nu)} a_{\mu'}^{(\nu)}) = 0$$

für $\mu \neq \mu'$.

Man überzeugt sich leicht, dass dies stets auf unendliche vielfache Weise möglich ist, und es ist bekannt, dass alsdann auch

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} (a_\mu^{(\nu)})^2 = 1$$

für alle ν und

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} (a_\mu^{(\nu)} a_\mu^{(\nu')}) = 0$$

für $\nu \neq \nu'$.

Wir gehen jetzt zu folgendem Koordinatensystem über:

$$a_1^{(1)}x^{(1)} + a_1^{(2)}x^{(2)} + \cdots + a_1^{(n)}x^{(n)} + a_1^{(n+1)} = \xi_1$$
$$a_2^{(1)}x^{(1)} + a_2^{(2)}x^{(2)} + \cdots + a_2^{(n)}x^{(n)} + a_2^{(n+1)} = \xi_2$$
$$\vdots$$
$$a_n^{(1)}x^{(1)} + a_n^{(2)}x^{(2)} + \cdots + a_n^{(n)}x^{(n)} + a_n^{(n+1)} = \xi_n.$$

Man sieht sofort, dass bei dieser Transformation die Form der Funktion f erhalten bleibt, sodass

$$f = \sqrt{(x^{(1)} - \bar{x}^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \bar{x}^{(2)})^2 + \cdots + (x^{(n)} - \bar{x}^{(n)})^2}$$
$$= \sqrt{(\xi^{(1)} - \bar{\xi}^{(1)})^2 + (\xi^{(2)} - \bar{\xi}^{(2)})^2 + \cdots + (\xi^{(n)} - \bar{\xi}^{(n)})^2}.$$

Es hat also auch

$$\sqrt{(\xi^{(1)} - \bar{\xi}^{(1)})^2 + (\xi^{(2)} - \bar{\xi}^{(2)})^2 + \cdots (\xi^{(n)} - \bar{\xi}^{(n)})^2},$$

wenn p in P und $\bar{p}$ in $\bar{P}$ liegen soll, bei $p = p^*$ und $\bar{p} = \bar{p}^*$ ein Minimum. Die neuen Koordinaten von p^* und $\bar{p}^*$ sind alle gleich Null mit Ausnahme von $\xi^{(n)*}$ und $\bar{\xi}^{(n)*}$. Es sei etwa $\xi^{(n)*} > \bar{\xi}^{(n)*}$. Ich behaupte: Kein Punkt im Innern von P kann ein $\xi^{(n)}$ haben, das kleiner ist als $\xi^{(n)*}$. Nehmen wir an, dies sei bei einem Punkte p^{**} der Fall. Wir ziehen eine gerade Linie von p^* nach p^{**}, und zwar denken wir uns die Koordinaten der Punkte dieser Linie dargestellt durch einen Parameter t, der zunimmt, wenn ich von p^* nach p^{**} gehe. Dann ist $\frac{d\xi^{(n)}}{dt}$ für $\xi^{(n)} = \xi^{(n)*}$ negativ. Ich bilde $\frac{df}{dt}$ bei festgehaltenem $\bar{p} = \bar{p}^*$ für $p = p^*$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\xi^{(n)*} - \bar{\xi}^{(n)*}}{\sqrt{(\xi^{(n)*} - \bar{\xi}^{(n)*})^2}} \cdot \frac{d\xi^{(n)}}{dt}.$$

Diese Grösse ist negativ, wenn $\frac{d\xi^{(n)}}{dt} < 0$. Da nun jeder Punkt der Geraden von p^* nach p^{**} im Innern von P liegt, so widerspricht dies der Minimalbedingung der Punkte p^* und $\bar{p}^*$. Ebenso weisen wir nach, dass kein Punkt von $\bar{P}$ ein grösseres $\bar{\xi}^{(n)}$ haben kann als $\bar{\xi}^{(n)*}$. Nehmen wir daher eine Konstante c an, sodass

$$\xi^{(n)*} > c > \bar{\xi}^{(n)*},$$

so haben wir die verlangte lineare Funktion, die für alle Punkte von P positive und für alle Punkte von $\bar{P}$ negative Werte annimmt, dargestellt in:

$$\xi^{(n)} - c = a_n^{(1)} x^{(1)} + a_n^{(2)} x^{(2)} + \ldots + a_n^{(n)} x^{(n)} + a_n^{(n+1)} - c.$$

§ 5. Zerlegung in Elementarpolyeder.

Wir wollen den Satz beweisen: Wenn ein Punkt i in einem konvexen Polyeder $\mathfrak{P}$ liegt, so kann man stets ein Elementarpolyeder P, dessen Eckpunkte zu den Eckpunkten von $\mathfrak{P}$ gehören, angeben, in dem i liegt.

Der Satz gelte bei niedriger dimensionalen Räumen für bewiesen. Für $n = 1$ ist er trivial, da in diesem Fall jedes konvexe Polyeder ein Elementarpolyeder ist.

Von einem Eckpunkt a von $\mathfrak{P}$ ziehe ich eine gerade Linie nach i, die bei α aus dem Innern von $\mathfrak{P}$ austreten möge. Wenn ich ein Elementarpolyeder angeben kann, das a und α als Innenpunkte (wobei a speziell Eckpunkt sein möge, und nur Eckpunkte von $\mathfrak{P}$ als Eckpunkte enthält, so ist der Satz bewiesen.

Der Punkt α muss mindestens einer Determinantengleichung $|w't| = 0$ genügen. Wir nehmen eine lineare Transformation vor, die die Koordinaten $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)} \ldots x^{(n)}$ in $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \ldots \xi^{(n)}$ überführt, und zwar sei

$$|w't| = \pm \xi^{(n)}.$$

Die Substitutionsdeterminante sei positiv; es bleiben dann alle Eigenschaften der Polyeder, da sich alle Determinanten nur mit der Substitutionsdeterminante multiplicieren, in dem neuen Raum erhalten.

Es können ausser w' noch andere Wandungen von $\mathfrak{P}$ Determinantengleichungen liefern, die mit $\xi^{(n)} = 0$ identisch sind. Es seien dies

$$w', w_1', w_2' \ldots,$$

sodass in allen Eckpunkten dieser Wandungen die $\xi^{(n)}$-Koordinate verschwindet.

Dagegen sollen

$$w'', w_1'', w_2'' \ldots,$$

hiervon verschiedene Determinantengleichungen liefern, sodass keine dieser Wandungen nur Eckpunkte mit verschwindender $\xi^{(n)}$-Koordinate enthält.

Es sei das Vorzeichen von $|\, w't \,| = \pm \xi^{(n)}$ so bestimmt, dass ein Eckpunkt von $\mathfrak{P}$, etwa b ein negatives $\xi^{(n)}$ habe. Da $\mathfrak{P}$ konvex, muss $|\, w'b \,| \geqq 0$ d. h. wenn etwa $w' = (1, 2 \ldots n)$

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \ldots & \xi_1^{(n-1)} & 0 & 1 \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \ldots & \xi_2^{(n-1)} & 0 & 1 \\ & & & & & \\ \xi_n^{(1)} & \xi_n^{(2)} & \ldots & \xi_n^{(n-1)} & 0 & 1 \\ \xi_b^{(1)} & \xi_b^{(2)} & \ldots & \xi_b^{(n-1)} & \xi_b^{(n)} & 1 \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Vertauschen wir die letzten Spalten und berücksichtigen, dass $\xi_b^{(n)} < 0$, so folgt

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \ldots & \xi_1^{(n-1)} & 1 \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \ldots & \xi_2^{(n-1)} & 1 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \xi_n^{(1)} & \xi_n^{(2)} & \ldots & \xi_n^{(n-1)} & 1 \end{vmatrix} \leqq 0.$$

Das Gleichheitszeichen kann nicht gelten, weil sonst w' mit jedem Punkt eine verschwindende Determinante liefern müsste. Lassen wir die $\xi^{(n)}$-Koordinate weg, was wir durch $\overline{w}, \overline{r} \ldots$ statt $w, r \ldots$ ausdrücken wollen, so kann in dem $(n-1)$-dimensionalen Raum $\overline{w'}$ als Elementarpolyeder betrachtet werden. Dasselbe gilt von $\overline{w_1'}\,\overline{w_2'} \ldots$, da ja alle mit b positive Determinanten liefern müssen. Ebenso sehen wir, dass jeder Punkt von $\mathfrak{P}$ ein negatives oder verschwindendes $\xi^{(n)}$ haben muss; denn ein Punkt mit positivem $\xi^{(n)}$ würde mit w' eine negative Determinante liefern.

Wir teilen die Ränder der Wandungen $w', w_1', w_2' \ldots$ in zwei Teile:

$r, r_1, r_2 \ldots$ mögen ausser in $w', w_1', w_2' \ldots$

noch in Wandungen w'' vorkommen,

$r', r_1', r_2' \ldots$ mögen nur in $w', w_1', w_2' \ldots$

vorkommen. (Vergl. S. 72).

Die Ränder

$r, r_1, r_2 \ldots$ können in den Wandungen $w', w_1', w_2' \ldots$

nicht mit demselben Vorzeichen vorkommen, wie in $w'', w_1'' \ldots$. Denn wäre etwa

$$(rb) = w'' \qquad (rc) = w',$$

so müsste

$$|\, w'b \,| \gtreqless 0 \qquad |\, w''c \,| \gtreqless 0$$
$$|\, rcb \,| \gtreqless 0 \qquad |\, rbc \,| \gtreqless 0$$

woraus $|\, rbc \,| = 0$ folgen würde, was aber nicht möglich ist, weil sonst die Gleichungen

$$|\, rbt \,| = 0 \qquad \text{und} \qquad |\, rct \,| = 0$$

nach S. 67 identisch wären. Denn alle $n$reihigen Determinanten von rb oder rc d. h. von w'' und w' können nicht verschwinden. Die Ränder $r, r_1, r_2 \ldots$ mögen als $r, r_1, r_2 \ldots$ in $w', w_1', w_2' \ldots$ und als $-r, -r_1, -r_2 \ldots$ in $w'', w_1'', w_2'' \ldots$ enthalten sein.

Fassen wir $\bar{w}', \bar{w}_1', \bar{w}_2' \ldots$ als Elementarpolyeder, die

$$\bar{r}, \bar{r}_1, \bar{r}_2 \ldots \bar{r}', \bar{r}_1', \bar{r}_2' \ldots$$

als ihre Wandungen auf, so heben sich die $\bar{r}', \bar{r}_1', \bar{r}_2' \ldots$ gegenseitig heraus. (Vergl. S. 72). Ich behaupte, die Wandungen $\bar{r}, \bar{r}_1, \bar{r}_2 \ldots$ bilden ein konvexes Polyeder. Sei c ein nicht in $\bar{r}$ vorkommender Eckpunkt, so ist $|\, \bar{r}c \,| \gtreqless 0$ nachzuweisen. Es sei etwa $\bar{r} = (1, 2 \ldots n-1)$, so soll

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \ldots & \xi_1^{(n-1)} & 1 \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \ldots & \xi_2^{(n-1)} & 1 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \xi_{n-1}^{(1)} & \xi_{n-1}^{(2)} & \ldots & \xi_{n-1}^{(n-1)} & 1 \\ \xi_c^{(1)} & \xi_c^{(2)} & \ldots & \xi_c^{(n-1)} & 1 \end{vmatrix} \gtreqless 0.$$

$-r$ kommt in einer Wandung $w'', w_1'' \ldots$ vor, und zwar etwa als $-(rb)$; b muss dann ein negatives $\xi^{(n)}$ haben. Da $\mathfrak{P}$ konvex ist, muss $-|\, rbc \,| \gtreqless 0$; d. h. es muss

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \dots & \xi_1^{(n-1)} & 0 & 1 \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \dots & \xi_2^{(n-1)} & 0 & 1 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \xi_b^{(1)} & \xi_b^{(2)} & \dots & \xi_b^{(n-1)} & \xi_b^{(n)} & 1 \\ \xi_c^{(1)} & \xi_c^{(2)} & \dots & \xi_c^{(n-1)} & 0 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0,$$

woraus nach Vertauschung der letzten Zeilen und Spalten unter Beachtung von $\xi_b^{(n)} < 0$ die obige Ungleichung folgt. Die $\bar{r}$ bilden also ein konvexes Polyeder.

Der Punkt α muss innerhalb dieses konvexen Polyeders liegen. Gäbe es nämlich eine Wandung r, für die $|\bar{r}\alpha| < 0$, so ist analog wie oben zu sehen, dass im n dimensionalen Raum diejenige Wandung w'', die $-r$ enthält, auch $|w''\alpha| < 0$ liefern müsste, d. h. es läge α nicht in $\mathfrak{P}$.

In dem $(n-1)$ dimensionalen Polyeder $\bar{r}, \bar{r}_1, \bar{r}_2 \dots$ giebt es nach Voraussetzung ein Elementarpolyeder, in dessen Innern α liegt. Sind $\bar{r}, r_1 \dots r_{n-1}$ seine Wandungen, so liegt, wie nunmehr leicht zu sehen, α auch innerhalb des n dimensionalen Elementarpolyeders mit den Wandungen

$$-(ra), \quad -(r_1 a) \dots -(r_{n-1} a),$$

die $(n+1)$ te Wandung wird von den n Eckpunkten von $r, r_1 \dots r_{n-1}$ gebildet. Sie liefert, da alle $\xi^{(n)} = 0$ für α eine verschwindende Determinante.

Damit ist der angekündigte Satz bewiesen. Sind nun $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}$ zwei konvexe Polyeder, und tritt der Fall des vorigen Paragraphen, dass es keinen gemeinsamen Innenpunkt geben möge, nicht ein, so können wir zwei Elementarpolyeder P und $\overline{\mathrm{P}}$, wo P nur Eckpunkte von $\mathfrak{P}$, $\overline{\mathrm{P}}$ nur Eckpunkte von $\overline{\mathfrak{P}}$ enthält, in solcher Weise angeben, dass auch P und $\overline{\mathrm{P}}$ einen gemeinsamen Innenpunkt haben.

§ 6. Auswahl der $(n+2)$ Punkte bei Unmöglichkeit der Trennung.

Unter einem Begrenzungselement eines konvexen Polyeders verstehen wir die Gesamteinheit der Punkte p, bei denen von

den Bedingungen $|wp| \gtreqless 0$, $|w'p| \gtreqless 0$, $|w''p| \gtreqless 0 \ldots$ eine bestimmte Anzahl Male das Gleichheitszeichen gilt. Ist das gegebene konvexe Polyeder ein Elementarpolyeder, so unterscheiden wir nach dieser Anzahl die Ordnung des Begrenzungselementes. Es mögen die Punkte

$$1, 2, 3 \ldots n+1$$

ein Elementarpolyeder bilden. Es sei dann das Begrenzungselement

$$(1, 2 \ldots \nu)$$

die Gesamtheit der Punkte, bei denen diejenigen Determinanten verschwinden, in denen die Punkte $1, 2 \ldots \nu$ alle vorkommen. Dies sind, da wir unter den $n+1-\nu$ nicht in $(1, 2 \ldots \nu)$ enthaltenen Punkten jeden zur Bildung einer Determinante weglassen können, $n+1-\nu$ Gleichungen. Ist μ die Ordnung eines Begrenzungselementes und ν die Anzahl seiner Eckpunkte, so gilt

$$\mu = n+1-\nu.$$

Verbinden wir zwei in einem Begrenzungselement liegende Punkte durch eine Gerade, so ist klar, dass für dieses Begrenzungselement dieselben Sätze gelten, die wir S. 68 für das ganze Polyeder ableiteten. Lassen wir den Punkt t auf dieser Geraden wandern, so muss nach einem endlichen Stück eine der noch positiven Determinanten des Elementarpolyeders verschwinden. Jede dieser Determinanten enthält die übrigen $n+1-\nu$ Punkte und $\nu-1$ aus der Zahl der $1, 2, \ldots \nu$. Möge etwa die den Punkt ν nicht enthaltende verschwinden, so heisst dies, wir gelangen in das Begrenzungselement $(\mu+1)$ter Ordnung $(1, 2, 3 \ldots \nu-1)$. Wir können daher sagen: Ein Begrenzungselement $n$ter Ordnung wird von lauter Begrenzungselementen $(\mu+1)$ter Ordnung begrenzt.

Wir beweisen nun den Satz: Eine lineare Funktion

$$p^{(1)}x^{(1)} + p^{(2)}x^2 + \cdots + p^{(n)}x^{(n)} + p^{(n+1)},$$

die an den Eckpunkten $1, 2, \ldots \nu$ positiv ist, ist dies auch überall im Innern des Begrenzungselementes. Wir betrachten zunächst die Begrenzungselemente mit 2 Eckpunkten

$$(1, 2) \quad (1, 3) \quad (1, 4) \ldots (\nu-1, \nu).$$

Eine lineare Funktion, die bei 1 und 2 positiv ist, kann im Innern von $(1, 2)$ weder negativ noch 0 sein, weil lineare Funktionen

kein Minimum haben. Wir gehen nun zu den Begrenzungselementen der nächst niedrigeren Ordnung d. h. zu

$$(1, 2, 3) \qquad (1, 2, 4) \ldots \ldots \qquad (\nu-2, \nu-1, \nu).$$

Es liege p im Innern von $(1, 2, 3)$. Ich ziehe von 1 eine Linie nach p. Diese muss nach dem, was wir eben sahen, ein Begrenzungselement höherer Ordnung schneiden, und daher sowohl an dem Schnittpunkt als auch bei 1 positiv sein, sie kann demnach bei p, das zwischen 1 und dem Schnittpunkt liegt, nicht anders als gleichfalls positiv sein. Und in dieser Weise fahren wir fort.

Es seien nun P und $\overline{\text{P}}$ zwei Elementar-Polyeder, und wir wollen annehmen, es gäbe einen Punkt i, der sowohl im Innern von P als auch im Innern von $\overline{\text{P}}$ liege. Ich behaupte, es lassen sich von den Eckpunkten von P und $\overline{\text{P}}$ $(n+2)$ von der Art auslesen, dass es unmöglich ist, eine lineare Funktion

$$p^{(1)}x^{(1)} + p^{(2)}x^{(2)} + \ldots\ldots p^{(n)}x^{(n)} + p^{(n+1)}$$

anzugeben, die bei denjenigen der ausgewählten Punkte, die Eckpunkte von P sind, positiv, und bei denjenigen, die Eckpunkte von $\overline{\text{P}}$ sind, negativ ist.

Wir ziehen durch i irgend eine Gerade und verfolgen sie von i aus in einer beliebigen Richtung. Die Gerade kann nicht immer im Innern der beiden Polyeder verlaufen. Sie möge etwa aus P zuerst austreten und zwar bei dem Punkte i'; i' liegt dann auf einem Begrenzungselement erster Ordnung. Zu der Gleichung dieses Begrenzungselementes nehmen wir noch $n-2$ beliebige Gleichungen, die durch i' befriedigt werden, hinzu und erhalten hierdurch eine Gerade. Verfolgen wir wieder diese von i' an, so sei i'' der erste Punkt, bei dem sie aus einem der Polyeder austritt. i'' kann entweder auf einem Begrenzungselement zweiter Ordnung von P oder auf einem Begrenzungselement erster Ordnung von $\overline{\text{P}}$ liegen. Jedenfalls genügt i'' zwei Gleichungen, zu denen wir nun noch $(n-3)$ hinzunehmen, um so wieder eine Gerade zu bilden und zu einem Punkt i''' zu gelangen. Das Weitergehen auf einer Geraden ist erst dann unmöglich, wenn der Punkt n Gleichungen genügt.

Wir können also einen Punkt i^* bestimmen, der auf zwei Begrenzungselementen der Ordnung μ und $\bar{\mu}$ liegt, wo

$$\mu + \bar{\mu} = n$$

und da

$$\mu = n+1-\nu \qquad \overline{\mu} = n+1-\overline{\nu},$$

so ist $$n+1-\nu+n+1-\overline{\nu} = n$$

$$\nu+\overline{\nu} = n+2.$$

Eine lineare Funktion, die an diesen ν Punkten positiv und an diesen $\overline{\nu}$ negativ wäre, müsste bei i^* zugleich positiv und negativ sein, sie kann also nicht existieren.

Wir haben bisher stets vorausgesetzt, dass sich sowohl unter den gegebenen Punkten $p_1, p_2, p_3 \ldots$ als auch unter $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3 \ldots$ $(n+1)$ finden mögen, die eine nichtverschwindende $(n+1)$ reihige Determinante liefern. Dies braucht aber nicht immer der Fall zu sein. Es können etwa alle $(\nu+1)$ reihigen und höheren Determinanten der p verschwinden. Wir nehmen dann eine Koordinaten-Transformation vor und ordnen die Punkte p in dem ν dimensionalen Raum zu einem convexen Polyeder. Dieses ergänzen wir nach der Methode des § 5 durch successive Hinzunahme von Punkten aus den übrigen Dimensionen zu einem n dimensionalen konvexen Polyeder. In diesem giebt es dann Begrenzungselemente, deren Eckpunkte nur aus gegebenen Punkten bestehen, und in deren Innern alle gegebenen Punkte liegen. Mit den Punkten $\overline{p}$ verfahren wir ebenso. Nun stellen wir die Alternative der Existenz oder Nichtexistenz eines gemeinsamen Innenpunktes nicht bezüglich der ganzen Polyeder, sondern bezüglich der ausgezeichneten Begrenzungselemente. Man sieht sofort, dass man auch auf diese die Methoden von § 4 und § 6 anwenden kann.

Kapitel V. Das Interpolationsproblem bei zwei Variabeln.

§ 1. Die allgemeinen Bedingungen.

Unsere Bemerkung S. 30, dass bei der annäherungsweisen Darstellung der Funktionen einer Variabeln sich die wesentlichsten Resultate schon bei dem einfacheren Fall des Interpolationsproblemes ergeben, lässt es gerechtfertigt erscheinen, dass wir uns bei dem Fall zweier Variabeln auf dieses beschränken.

Es sei eine Anzahl Punkte

$$p_1 = (x_1 y_1 z_1), \qquad p_2 = (x_2 y_2 z_2) \ldots\ldots p_\nu = (x_\nu y_\nu z_\nu)$$

gegeben und eine ganze rationale Funktion

$$z = f(x,y) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} y + \cdots a_{n+1} y^n + a_{n+2} x^{n-1} + a_{n+3} x^{n-2} y + \cdots \cdots + a_{m-2} x + a_{m-1} y + a_m$$

gesucht, von der Art, dass wenn $p_\mu = (x_\mu y_\mu z_\mu)$ einer der gegebenen Punkte ist, die grösste der Differenzen

$$| f(x_\mu y_\mu) - z_\mu |$$

möglichst klein sei. Den Existenzbeweis für $f(x,y)$ haben wir bereits S. 10—11 geführt. Wir wollen vorläufig, um eine einfachere Schreibweise zu haben,

$$n = 2$$

und

$$f(x,y) = a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x + a_5 y + a_6$$

annehmen. Es bezeichne L wieder die Abweichung, d. h. die grösste der Differenzen $| f(x_\mu y_\mu) - z_\mu |$; sie werde an den Punkten

$$(x_1 y_1), \quad (x_2 y_2) \ldots (x_\nu y_\nu)$$

angenommen; wir haben dann, wenn

$$\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_\nu$$

gleich ± 1 sind, nach Fixierung des Vorzeichens von L die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + a_2 x_1 y_1 + a_3 y_1^2 + a_4 x_1 + a_5 y_1 + a_6 - z_1 &= L \\ a_1 x_2^2 + a_2 x_2 y_2 + a_3 y_2^2 + a_4 x_2 + a_5 y_2 + a_6 - z_2 &= \varepsilon_2 L \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_1 x_\nu^2 + a_2 x_\nu y_\nu + a_3 y_\nu^2 + a_4 x_\nu + a_5 y_\nu + a_6 - z_\nu &= \varepsilon_\nu L . \end{aligned} \tag{1}$$

Es habe nun

s_1 das Vorzeichen von L und sei $\neq 0$
s_2 „ „ „ $\varepsilon_2 L$ „ „ $\neq 0$
.
.
.
s_ν „ „ „ $\varepsilon_\nu L$ „ „ $\neq 0$.

Im Uebrigen seien diese Grössen s unbestimmt. Wenn es eine Funktion $g(x,y)$ von kleinerer Abweichung als $f(x,y)$ giebt, so muss $|g(x,y)-z|$ an allen Punkten x_1y_1, x_2y_2 . . . $x_\nu y_\nu$ kleiner sein als $|f(x,y)-z|$ d. h. es muss

$$\begin{aligned} f(x_1,y_1) - g(x_1,y_1) &= s_1 \\ f(x_2,y_2) - g(x_2,y_2) &= s_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ f(x_\nu,y_\nu) - g(x_\nu,y_\nu) &= s_\nu . \end{aligned}$$

Und umgekehrt: Nehmen wir an, es gäbe eine Funktion $g(x,y)$, die diese Gleichungen für irgend ein Wertsystem s befriedigte, so giebt es auch eine Funktion von kleinerer Abweichung als $f(x,y)$. Denn

$$f(x,y) - \varepsilon(f(x,y) - g(x,y))$$

erfüllt offenbar für genügend kleines ε diese Bedingung, wobei natürlich L von 0 verschieden vorausgesetzt wird. Sei

$$f(x,y) - g(x,y) = b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x + b_5y + b_6 ,$$

so haben wir den Satz:

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass es keine Funktion kleinerer Abweichung giebt als $f(x,y)$, ist die Unauflösbarkeit der Gleichungen

$$\begin{aligned} b_1x_1^2 + b_2x_1y_1 + b_3y_1^2 + b_4x_1 + b_5y_1 + b_6 &= s_1 \\ b_1x_2^2 + b_2x_2y_2 + b_3y_2^2 + b_4x_2 + b_5y_2 + b_6 &= s_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ b_1x_\nu^2 + b_2x_\nu y_\nu + b_3y_\nu^2 + b_4x_\nu + b_5y_\nu + b_6 &= s_\nu \end{aligned} \qquad (2)$$

für jedes mögliche Wertsystem s.

Die Zahl der Unbekannten ist 6, die Zahl der Gleichungen ν. Im allgemeinen Fall können diese Gleichungen nur dann unauflösbar sein, wenn $\nu > 6$. Die speziellen Fälle, wo $\nu \leqq 6$ werden wir später untersuchen und nehmen nun $\nu = 7$. Es wird alsdann Unauflösbarkeit gefordert von dem System:

$$b_1x_1^2 + b_2x_1y_1 + b_3y_1^2 + b_4x_1 + b_5y_1 + b_6 = s_1$$
$$b_1x_2^2 + b_2x_2y_2 + b_3y_2^2 + b_4x_2 + b_5y_2 + b_6 = s_2$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$b_1x_7^2 + b_2x_7y_7 + b_3y_7^2 + b_4x_7 + b_5y_7 + b_6 = s_7.$$

Die Bedingung der Unauflösbarkeit für dieses System lautet aber:

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 & s_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 & s_2 \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ x_7^2 & x_7y_7 & y_7^2 & x_7 & y_7 & 1 & s_7 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entwickeln wir nach den Elementen der letzten Spalte, so haben wir, abgekürzt geschrieben:

$$D = s_1 . (2, 3, \ldots 7) - s_2 . (1, 3, \ldots 7) + \cdots + s_7 . (1, 2, \ldots 6).$$

Da die s bis auf das Vorzeichen vollkommen willkürlich sind, die Determinante aber für alle mit der Vorzeichenbedingung verträglichen s von 0 verschieden sein soll, so sieht man leicht die Bedingung: Die Grössen

$$s_1 . (2, 3 \ldots 7),$$
$$-s_2 . (1, 3 \ldots 7),$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$s_7 . (1, 2 \ldots 6)$$

müssen gleiches Vorzeichen haben. Nehmen wir s_1 etwa positiv, so bestimmt sich hieraus das Vorzeichen der übrigen s.

Sind 7 Punkte bekannt, an denen die Abweichung angenommen wird, und wird der Sinn der Annahme bei einem Punkt willkürlich als positiv bezeichnet, so liefert uns $D \neq 0$ den Sinn, in dem die Abweichung an allen andern Stellen angenommen wird. Und zwar bestimmt sich dieser Sinn aus dem Vorzeichen einer Determinante, die aus den Projektionen der übrigen 6 Punkte gebildet wird. Die

z Koordinate ist ohne Einfluss darauf. — Ist eine der Determinanten z. B. $(1, 3 \ldots 7) = 0$, so kann s_2 beliebig positiv oder negativ angenommen werden. Nunmehr können wir, nachdem die Vorzeichen der s und damit die ε bekannt sind, die Annäherungsfunktion $f(x, y)$ leicht bestimmen; wir haben dazu nur das System der linearen Gleichungen (1) zu lösen.

$$\begin{aligned}
a_1x_1^2 + a_2x_1y_1 + a_3y_1^2 + a_4x_1 + a_5y_1 + a_6 - \varepsilon_1 L &= z_1 \\
a_1x_2^2 + a_2x_2y_2 + a_3y_2^2 + a_4x_2 + a_5y_2 + a_6 - \varepsilon_2 L &= z_2 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
a_1x_7^2 + a_2x_7y_7 + a_3y_7^2 + a_4x_7 + a_5y_7 + a_6 - \varepsilon_6 L &= z_7 .
\end{aligned}$$

Das System dieser 7 Gleichungen mit den 7 Unbekannten $a_1 \ldots a_6$ und L ist sicher eindeutig lösbar. Denn die Determinante des Systems unterscheidet sich von D nur dadurch, dass statt der s hier die ε auftreten; sie ist also sicher von 0 verschieden.

Wir haben nachgewiesen, dass es eine Funktion kleinerer Abweichung als die so konstruierte Funktion $f(x,y)$ nicht geben kann. Es fragt sich, ob und wann es eine von $f(x,y)$ verschiedene Funktion von ebensogrosser Abweichung geben kann. Nehmen wir an, $g(x,y)$ sei eine solche Funktion, so muss, gleichviel an welchen Punkten $g(x,y)$ seinerseits die Abweichung annimmt, an den 7 Punkten, an denen $f(x,y)$ seine Abweichung annimmt,

$$| f(x_\mu y_\mu) - z_\mu | \geqq | g(x_\mu y_\mu) - z_\mu | ,$$

d. h. es darf $f(x,y) - g(x,y)$ an den Punkten $x_\mu y_\mu$ nicht entgegengesetztes Vorzeichen haben wie s_μ, sondern es muss entweder gleiches Vorzeichen haben oder verschwinden, was wir durch s_μ' andeuten wollen. Dies ergiebt für die Koefficienten der Differenz $f(x,y) - g(x,y)$ die Bedingungen:

$$\begin{aligned}
b_1x_1^2 + b_2x_1y_1 + b_3y_1^2 + b_4x_1 + b_5y_1 + b_6 &= s_1' \\
b_1x_2^2 + b_2x_2y_2 + b_3y_2^2 + b_4x_2 + b_5y_2 + b_6 &= s_2' \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
b_1x_7^2 + b_2x_7y_7 + b_3y_7^2 + b_4x_7 + b_5y_7 + b_6 &= s_7' .
\end{aligned}$$

Die Bedingung für die Auflösbarkeit ist das Verschwinden der Determinante. Ist keine der Unterdeterminanten gleich Null,

so kann dies nur eintreten, wenn $s_1' = s_2' = \cdots = s_7' = 0$ und alsdann müssen in den übrig bleibenden homogenen Gleichungen alle b verschwinden, d. h. $f(x,y)$, ist eindeutig bestimmt.

Ist aber z. B. $(1, 2 \ldots 6) = 0$, so kann s_7' von 0 verschieden sein, und es brauchen nur $s_1' = s_2' = \cdots s_6' = 0$. Die hieraus resultierenden Gleichungen sind nicht homogen und liefern nach willkürlicher Festsetzung von s_7' ein bestimmtes System der Koefficienten von $f(x,y) - g(x,y)$. An allen Punkten, an denen $f(x,y)$ die Abweichung annimmt, nimmt sie auch $g(x,y)$ an, nur an dem Punkte $x_7 y_7$ braucht dies, wie aus der willkürlichen Festsetzung von s_7' hervorgeht, nicht der Fall zu sein.

§ 2. Der Fall verschwindender Determinante.

Wir werden also auf den oben ausgeschlossenen Fall geführt, dass die Abweichung an weniger als 7 Punkten, also etwa 6 angenommen wird. Wie man sieht, kann dies nur dann der Fall sein, wenn die Projektionen der 6 Punkte auf einem Kegelschnitt liegen. Alsdann ist die Annäherungsfunktion nicht eindeutig bestimmt. Man sieht leicht, innerhalb welcher Grenzen die Annäherungsfunktion willkürlich ist. Es sei $f(x,y)$ die Annäherungsfunktion, die die Abweichung an 6 Punkten annehme. $g(x,y) = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes, dem die Projektionen genügen:

$$| f(x,y) + \lambda . g(x,y) - z |$$

ist dann für $\lambda = 0$ an allen Punkten, an denen die Abweichung nicht angenommen wird, kleiner als L. Wenn nun nicht alle Projektionen der gegebenen Punkte auf dem Kegelschnitt $g(x,y) = 0$ liegen, so ergeben sich Grenzen für λ, die nicht überschritten werden dürfen, ohne dass $| f(x,y) + \lambda\, g(x,y) - z |$ bei mindestens einem der gegebenen Punkte grösser wird als L und damit

$$f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$$

aufhört Annäherungsfunktion zu sein. Setze ich für λ einen dieser Grenzwerte ein, so wird die Abweichung an 7 Punkten angenommen. Wir können also stets erreichen, dass die Abweichung an mindestens 7 Punkten angenommen wird, mit Ausnahme des Falles, wo die Projektionen aller gegebenen Punkte auf einem

Kegelschnitt liegen. — Analog verhält es sich, wenn auch noch niedrigere Determinanten der Projektionen verschwinden, was geometrisch bedeutet, dass alle Projektionen mit Ausnahme einer einzigen auf einer Geraden liegen, oder dass sie alle auf einer Geraden liegen.

Wir wollen zum Fall $\nu = 6$ noch einige Bemerkungen machen. Das System der Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&b_1x_1^2 + b_2x_1y_1 + b_3y_1^2 + b_4x_1 + b_5y_1 + b_6 = s_1\\
&b_1x_2^2 + b_2x_2y_2 + b_3y_2^2 + b_4x_2 + b_5y_2 + b_6 = s_2\\
&\quad\cdot\\
&\quad\cdot\\
&\quad\cdot\\
&b_1x_6^2 + b_2x_6y_6 + b_3y_6^2 + b_4x_6 + b_5y_6 + b_6 = s_6
\end{aligned}
\tag{2}
$$

kann nur dann unauflösbar sein, wenn die Determinante verschwindet. Aber diese Bedingung ist zur Unauflösbarkeit noch nicht hinreichend; es muss sich vielmehr aus der Matrix:

$$
\begin{matrix}
x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 & s_1\\
x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 & s_2\\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & x_6 & y_6 & 1 & s_6
\end{matrix}
$$

eine nichtverschwindende 6 reihige Determinante bilden lassen; hieraus bestimmen sich die s. Zunächst sieht man, dass es gleichgültig ist, welche der 6 reihigen Determinanten wir dabei zur Untersuchung heranziehen. Verschwindet eine, so verschwinden auch alle andern. Es möge z. B. die durch Weglassung der 5ten Vertikalreihe entstehende Determinante verschwinden. Unsere Behauptung lautet dann in abgekürzter Schreibweise, dass wir aus

$$| x^2, xy, y^2, x, y, 1 | = 0$$

und

$$| x^2, xy, y^2, x, y, s | = 0$$

z. B. auf

$$| x^2, xy, y^2, x, 1, s |$$

schliessen können. Dies ist ein spezieller Fall des auf S. 67 bewiesenen allgemeinen Satzes. Nur dürfen die 5 ausgezeichneten Vertikalreihen, die mit den s zusammen die zu untersuchende Determinante bilden sollen, nicht gerade so gewählt sein, dass

alle 5reihigen Determinanten verschwinden. Dies ist möglich, denn wir setzen voraus, dass nicht alle 5reihigen Determinanten der Matrix verschwinden, in welchem Fall wir $\nu = 5$ setzen müssten.

Es genügt also, das Vorzeichen der s so zu bestimmen, dass für dies einmal bestimmmte Vorzeichensystem für alle s

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & s \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & s \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & x_6 & y_6 & s \end{vmatrix} \neq 0.$$

Man sieht leicht, dass die Einschränkung, es sollen nicht alle 5reihigen Determinanten $| x_1^2, xy, y^2, x, y |$ verschwinden in unserm Fall des nichtzerfallenden Kegelschnittes nichts anderes bedeutet, als dass der Punkt $x = 0 \quad y = 0$ nicht auf dem Kegelschnitt liegen soll.

Wir wollen eine einfache Regel über das Vorzeichen der s ableiten. Die Bedingung

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & s_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & s_2 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & x_6 & y_6 & s_6 \end{vmatrix} \neq 0$$

lautet entwickelt:

$$s_1(2, 3 \ldots 6) - s_2(1, 3 \ldots 6) + s_3(1, 2, 4 \ldots 6) - \ldots \neq 0,$$

wo die Abkürzungen sofort verständlich sind. Wir denken uns nun die Punkte $1, 2, \ldots 6$ auf dem Kegelschnitt so angeordnet, dass wir sie bei einer Umlaufung des ganzen Kegelschnittes in dieser cyklischen Reihenfolge passieren. Ich behaupte, alsdann haben die Determinanten

$$(2, 3, \ldots 6), \qquad (1, 3, \ldots 6) \ldots$$

alle dasselbe Vorzeichen. Wir betrachten, um dies zu beweisen, die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & x_6 & y_6 & 1 \\ x^2 & xy & y^2 & x & y & 1. \end{vmatrix}$$

Für den betrachteten Punkt xy möge sie nicht verschwinden Wir lassen nun bei festgehaltenem xy den Punkt x_2y_2 nach x_1y_1 hinwandern, sodass er bei der Wanderung immer auf dem Kegelschnitt bleibt. Hierbei kann die Determinante nicht verschwinden; denn dies würde bedeuten, dass der Punkt xy auf dem von den 5 andern bestimmten Kegelschnitt läge, während er dies in der ursprünglichen Lage nicht that und der Kegelschnitt doch derselbe geblieben ist. Es haben also

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & x_6 & y_6 & 1 \\ x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & x_6 & y_6 & 1 \\ x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix}$$

dasselbe Vorzeichen. Für $x = 0$ $y = 0$ heisst dies nichts anderes, als dass $(1, 3 \ldots 6)$ und $(2, 3 \ldots 6)$ gleiches Vorzeichen haben, und zwar ohne 0 zu sein, da der Punkt $x = 0$ $y = 0$ nicht auf dem Kegelschnitt liegen soll.

Aus der Bedingung

$$s_1(2, 3 \ldots 6) - s_2(1, 3 \ldots 6) + s_3(1, 2, 4 \ldots 6) - \cdots \neq 0$$

können wir daher schliessen: die s müssen abwechselndes Vorzeichen haben.

Liegen die Projektionen von 6 Annahmestellen der Abweichung auf einem Kegelschnitt, so wechselt der Sinn der Abweichung ab, wenn wir den Kegelschnitt durchlaufen.

Dies Resultat gilt für $n > 2$ unverändert, wenn die betreffende Kurve eine Unikursalkurve

ist; andernfalls gilt für jeden einzelnen Ast ein entsprechender Satz.

§ 3. Allgemeine Lösung des Problems.

Es sei jetzt $\nu > 7$. Es sei xy die Projektion eines Punktes, an dem die Abweichung angenommen wird, und zwar wollen wir xy mit p bezeichnen, wenn $s > 0$ und mit $\bar{p}$ wenn $s < 0$. Unsere Bedingung (2) S. 86 können wir dann auch so fassen: Es soll unmöglich sein, eine Funktion

$$b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x + b_5y + b_6$$

anzugeben, die an allen Punkten p positive und an allen Punkten $\bar{p}$ negative Werte annimmmt.

Es folgt nun aus dem Satze des vorigen Kapitels: Wenn die Punkte p und $\bar{p}$ so gelegen sind, dass sie die Existenz einer derartigen Funktion

$$b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x + b_5y + b_6$$

ausschliessen, so kann man aus ihnen 7 derartige Punkte auswählen, dass schon sie eine Funktion der verlangten Form und Eigenschaft unmöglich machen.

Setzen wir

$$x^2 = \xi^{(1)} \quad xy = \xi^{(2)} \quad y^2 = \xi^{(3)} \quad x = \xi^{(4)} \quad y = \xi^{(5)}.$$

Bezeichnet p einen Punkt x_1y_1, so bezeichne π den entsprechenden Punkt des 5dimensionalen Raums

$$\pi_1 = \pi(\xi_1^{(1)}\, \xi_1^{(2)}\, \xi_1^{(3)}\, \xi_1^{(4)}\, \xi_1^{(5)})$$

und wir unterscheiden Punkte π und $\bar{\pi}$. Es kann nun keine Funktion

$$\beta_1\xi^{(1)} + \beta_2\xi^{(2)} + \beta_3\xi^{(3)} + \beta_4\xi^{(4)} + \beta_5 + \beta_6$$

geben, die an allen Punkten π positive und an allen Punkten $\bar{\pi}$ negative Werte annähme; denn es würde alsdann die Funktion

$$\beta_1x^2 + \beta_2xy + \beta_3y^2 + \beta_4x + \beta_5y + \beta_6$$

auch an allen Punkten p positive und an allen Punkten $\bar{p}$ negative Werte annehmen. Ich wähle unter den Punkten π und $\bar{\pi}$

nach § 6 des vorigen Kapitels 7 aus und nehme dann die diesen 7 Punkten entsprechenden Punkte p und $\overline{p}$ und behaupte: Es kann keine Funktion

$$b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x + b_5y + b_6$$

geben, die an den ausgewählten Punkten p positive und an den ausgewählten Punkten $\overline{p}$ negative Werte annimmt, denn sonst würde sich

$$b_1\xi^{(1)} + b_2\xi^{(2)} + b_3\xi^{(3)} + b_4\xi^{(4)} + b_5\xi^{(5)} + b_6$$

bei den entsprechenden Punkten π und $\overline{\pi}$ ebenso verhalten.

Daraus folgt: Nimmt die Annäherungsfunktion die Abweichung mehr als 7mal an, so lassen sich aus der Zahl der Annahmestellen 7 so auswählen, dass die Annäherungsfunktion auch Annäherungsfunktion dieser 7 Punkte allein ist.

Hieraus ergiebt sich die Lösung des Problems: Man greift aus der Zahl der gegebenen Punkte 7 heraus und bestimmt ihre Annäherungsfunktion nach § 1. Man untersucht sodann, ob die so gefundene Funktion die Annäherungsfunktion für die Gesamtheit der gegebenen Punkte ist, indem man untersucht, ob $| f(x_\mu y_\mu) - z_\mu | \gtreqless L$ für alle gegebenen Punkte erfüllt ist. Dies ist, wenn man auf alle möglichen Arten 7 Punkte herausgreift einmal und im Wesentlichen auch nur einmal der Fall. Liegen die Projektionen aller gegebenen Punkte auf einem Kegelschnitt, so wählen wir nur 6 Punkte aus, und entsprechend, wenn die Unterdeterminanten von noch niedrigerem Grade verschwinden. Man sieht dies leicht, wenn man bedenkt, dass alsdann der den xy entsprechende ξ-Raum in Wahrheit um eine bezw. mehrere Dimensionen niedriger ist, als im allgemeinen Fall.

Der spezielle Fall, wo 6 Punkte auf einem Kegelschnitt liegen und die Annäherungsfunktion nicht völlig bestimmt ist, hat noch eine weitere Bedeutung. Man sieht nämlich sofort, dass die Annäherungsfunktion sich nicht unbedingt stetig ändern kann, wenn sich einer der gegebenen Punkte bewegt. Denn dann könnten wir von der Annäherungsfunktion, die zu irgend welchen 7 Punkten gehört durch stetige Aenderung zu der Annäherungsfunktion gelangen, die zu irgend einer andern Lage der Punkte gehört. Ein Punkt, bei dem die Abweichung in positivem Sinn angenommen würde, könnte hierbei diese Eigenschaft nicht ver-

lieren und die Anzahl der positiven Annahmen und ebenso die der negativen Annahmen müsste von der Lage der Punkte unabhängig sein. Dies ist aber, wie wir wissen, nicht der Fall. Man sieht leicht: Die Annäherungsfunktion ändert sich im Allgemeinen stetig mit den anzunähernden Punkten; sie macht aber einen Sprung, wenn sich die Projektion eines Punktes durch den Kegelschnitt, den die Projektionen von 5 andern bilden, hindurchbewegt.

Den Hauptsatz des vorigen Kapitels können wir geometrisch für einen speziellen Fall so aussprechen: Es seien in der Ebene Punkte $p_1, p_2, p_3 \cdots$ und $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3 \cdots$ gegeben und ein Kegelschnitt gesucht, der die p von den $\overline{p}$ trennt. Die Aufgabe ist entweder möglich, oder man kann 7 Punkte aus den gegebenen auswählen, die auch schon die Trennung durch einen Kegelschnitt unmöglich machen. Entsprechende Sätze gelten für die gerade Linie und für höhere Kurven.

Wir haben unsere Theorie für den Fall $n = 2$ durchgeführt, man sieht aber sofort, dass sie allgemein gültig ist. Die Anzahl der Annahmestellen der Abweichung ist im Allgemeinen um 1 grösser als die der zur Verfügung stehenden Parameter. Unsere Determinante D S. 87 lautet für $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & y_1^3 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 & s_1 \\ x_2^3 & x_2^2y_2 & x_2y_2^2 & y_2^3 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 & s_2 \\ \cdot & & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & & \\ x_{11}^3 & x_{11}^2y_{11} & x_{11}y_{11}^2 & y_{11}^3 & x_{11}^2 & x_{11}y_{11} & y_{11}^2 & x_{11} & y_{11} & 1 & s_{11} \end{vmatrix}$$

und die s bestimmen sich aus $D \neq 0$. Ebenso sieht man leicht, dass die Theorie auch für mehr als zwei unabhängige Variabele gilt; auch hier ändert sich nichts gegenüber dem eben behandelten Fall. Für 3 Variable und $n = 2$ lautet die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 & y_1^2 & y_1z_1 & z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 & s_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & x_2z_2 & y_2^2 & y_2z_2 & z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 & s_2 \\ \cdot & & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & & \\ x_{11}^2 & x_{11}y_{11} & x_{11}z_{11} & y_{11}^2 & y_{11}z_{11} & z_{11}^2 & x_{11} & y_{11} & z_{11} & 1 & s_{11} \end{vmatrix}.$$

Ferner lässt die Theorie eine Uebertragung auf den Fall zu, wo die Form der Annäherungsfunktion weiteren Bedingungen unterworfen ist, z. B. homogen sein soll u. dergl.

Für alle diese Fälle können wir die folgenden Sätze aussprechen:

1) Die Abweichung wird im allgemeinen Fall einmal öfter angenommen, als die Zahl der Parameter der Annäherungsfunktion beträgt. Spezielle Fälle treten ein, wenn die Projektionen der gegebenen Punkte auf die Ebene der unabhängigen Variabeln gewissen Determinantengleichungen genügen.

2) Der Sinn, in dem die Abweichung angenommen wird, wird durch eine Determinantenungleichung geliefert.

3) Alle diese Probleme sind durch Auflösung eines Systems linearer Gleichungen lösbar. Dieses System selbst wird aus einer endlichen Anzahl von Systemen durch Versuche bestimmt.

Wir haben uns auf das Interpolationsproblem beschränkt; man sieht aber leicht, wie die Theorie für das allgemeinere Annäherungsproblem zu erweitern ist: Soll eine ganze Funktion etwa $\varphi(x,y)$ in einem gegebenen Intervall etwa $-1 \leqq x \leqq 1$; $-1 \leqq y \leqq 1$ durch $f_n(v,y)$ angenähert dargestellt werden, so braucht die Abweichung nicht an einer endlichen Anzahl diskreter Punkte angenommen zu werden, sondern wir können hier Abweichungskurven haben. Wir projicieren diese in die xy-Ebene und ergänzen sie, falls sie noch nicht konvex sind, durch Hinzunahme geradliniger Strecken zu zwei konvexen Figuren. Für diese ist der Satz des vorigen Kapitels nachzuweisen, was hier zu weit führen dürfte. Ist m die Anzahl der verfügbaren Parameter der gesuchten Annäherungsfunktion, so wird die Abweichung an mindestens $m+1$ Stellen angenommen. Es lassen sich $m+1$ Punkte der gegebenen Funktion so bestimmen, dass die Annäherungsfunktion dieser $m+1$ Punkte die gesuchte Annäherungsfunktion der gegebenen Funktion ist. Dieser Satz stellt die genaue Verallgemeinerung des von Tchebychef für den Fall einer Variabeln ausgesprochenen Resultates dar. Die Frage nach einer Methode der Auswahl der $m+1$ Punkte, die wir beim Interpolationsproblem durch eine endliche Anzahl von Versuchen erledigen konnten, bedarf einer weitern Untersuchung.

Inhalt.

Einleitung 5

Kapitel I. Allgemeine Theorie bei einer reellen Veränderlichen.

§ 1. Definition 6
§ 2. Existenzbeweis 7
§ 3. Notwendige Bedingungen 11
§ 4. Diese Bedingungen sind eindeutig und hinreichend . . . 16
§ 5. Stetigkeit 18
§ 6. Exkurs über die Darstellung durch rationale Funktionen. 21
§ 7. Interpolationsprobleme 26

Kapitel II. Aufstellung der Annäherungsfunktion.

§ 1. Analytische Formulierung 30
§ 2. Aufstellung für den einfachsten Fall 32
§ 3. Die Annäherungsfunktion beliebiger analytischer Funktionen 34

Kapitel III. Rand- und Nebenbedingungen.

§ 1. Eine Randbedingung 49
§ 2. Eine Nebenbedingung. 51

Kapitel IV. Von den konvexen Polyedern.

§ 1. Polyeder 60
§ 2. Konvexe Polyeder 65
§ 3. Anordnung zu konvexen Polyedern 71
§ 4. Trennung zweier konvexer Polyeder 75
§ 5. Zerlegung in Elementarpolyeder 78
§ 6. Auswahl der $(n + 2)$ Punkte bei Unmöglichkeit der Trennung 81

Kapitel V. Das Interpolationsproblem bei zwei Variabeln.

§ 1. Die allgemeinen Bedingungen 84
§ 2. Der Fall verschwindender Determinante 89
§ 3. Allgemeine Lösung des Problems 93

Lebenslauf.

Ich, Paul Kirchberger, wurde am 23sten Juni 1878 zu Niederlahnstein am Rhein als Sohn des Kaufmanns Theodor Kirchberger geboren. In Weilburg, wohin meine Eltern alsbald verzogen, besuchte ich die Volksschule und das Königliche Gymnasium, das ich Ostern 1897 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren, bezog ich zunächst die Berliner Universität und besuchte Vorlesungen und Uebungen u. A. bei den Herren Professoren und Dozenten: Blasius, Fischer, Frobenius, Fuchs (†), Hensel, Knoblauch, Planck, Rosenheim, H. A. Schwarz, Warburg. Von Berlin, wo mich insbesondere die Vorlesungen des Herrn Professors Frobenius so lange festgehalten hatten, wandte ich mich Ostern 1900 nach Göttingen. Hier hörte ich Vorlesungen und Uebungen bei den Herren Professoren und Dozenten: Abraham, Baumann, Hilbert, Klein, v. Koenen, Liebisch, G. E. Müller, Rehnisch (†), Riecke, Schilling, Voigt, Wallach. Mein Staatsexamen für das Lehramt an höheren Schulen bestand ich am 24. Januar 1902.

Allen meinen verehrten Lehrern schulde ich herzlichsten Dank; namentlich hat mich Herr Professor Hilbert durch sein ständiges förderndes Interesse, sowie durch manchen wertvollen Rat zu tiefer und dauernder Dankbarkeit verpflichtet. Auch einigen Kollegen vom Göttinger Mathematischen Verein bleibe ich dankbar für mancherlei Anregung und Aufklärung.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515C126 C001 V005
CALCULUS [S.L.
3 0112 017225118